# Точные алгоритмы для задач составления расписаний с предписаниями работ на одной машине

Ю.В. Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Москва–2023

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ, грант N 22-71-10015

# Структура доклада

- Постановка задачи: общий случай
- Предыдущие исследования
- Постановка задачи: одна машина
- NP-трудность
- Подходы к решению
- Заключение и планы

# Постановка задачи

- $\mathcal{J}$, $|\mathcal{J}| = n$, – множество работ.
- $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}| = m$, – множество машин.
- Одностадийные и многостадийные системы.
- $p_{vj}$ – длительность операции $v$ работы $j$.
- $K_l = \{1, \ldots, k_l\}$ – множество позиций машины $l$.
- Предписания работ: $X^{i,l}$ – множество работ (операций), которые могут выполняться в позиции $i \in K_l$ машины $l$.
- Цель – назначить работы (или операции) в позиции машин так, чтобы полиномиально вычислимый критерий принимал минимальное значение.

# Мотивация

## Технологические ограничения

Технологические ограничения в производсвенных и многопроцессорных компьютерных системах, где порядок работ обуславливается переналадкой оборудования, фиксированными маршрутами, структурными ограничениями и другими факторами.

## Оптимальная рекомбинация

Дано два родительских решения – перестановки работ $\pi^1 = (\pi_1^1, \ldots, \pi_n^1)$ и $\pi^2 = (\pi_1^2, \ldots, \pi_n^2)$. Требуется найти перестановку-потомка $\pi' = (\pi_1', \ldots, \pi_n')$, такую что

(I) $\pi_i' = \pi_i^1$ or $\pi_i' = \pi_i^2$ для всех $i = 1, \ldots, n$;

(II) $\pi'$ имеет минимальное значение целевой функции среди всех перестановок, удовлетворяющих условию (I).

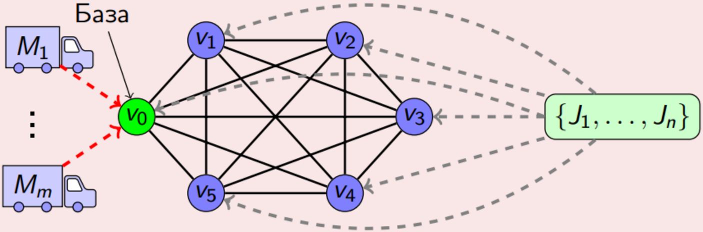
Тогда работы $\pi_i^1$ и $\pi_i^2$ образуют предписание $X^{i,1}$ для позиции $i$ машины.

# Мотивация

## Технологические ограничения

Технологические ограничения в производсвенных и многопроцессорных компьютерных системах, где порядок работ обуславливается переналадкой оборудования, фиксированными маршрутами, структурными ограничениями и другими факторами.

## Расписание и маршрутизация



# Предыдущие исследования

## Задачи составления расписаний

- Serdyukov A.I.: On travelling salesman problem with prohibitions, Upravlaemye systemi (1978)
- Eremeev A., Kovalenko Yu. On complexity of optimal recombination for one scheduling problem with setup times, Diskretn. Anal. Issled. Oper. (2012)
- Eremeev A., Kovalenko Yu.: Optimal recombination in genetic algorithms for combinatorial optimization problems, Yug. J. Oper. Res. (2014)
- Eremeev A., Kovalenko Yu.: On solving travelling salesman problem with vertex requisitions, Yugoslav Journal of Operations Research (2017)
- Eremeev A., Kovalenko Yu.: A memetic algorithm with optimal recombination for the asymmetric travelling salesman problem, Memetic Computing (2020)
- Chernykh I., Kononov A., Sevastyanov S.: Efficient approximation algorithms for the routing open shop problem, Computers and Operations Research (2013)

## Другие задачи

- Yagiura M., Ibaraki T.: The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems, Eur. Jour. Oper. Res. (1996)
- Balas E., Niehaus W.: Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems, Journ. Heur. (1998)
- Chicano F., Ochoa G., Whitley D., Tinos R.: Quasi-optimal recombination operator, LNCS (2019)

# Задачи на одной машине с предписаниями

## Входные данные

- Работы $j \in \mathcal{J}$: момент поступления $r_j$, директивный срок $d_j$, длительность $p_j$ и вес $w_j$.
- Предписания работ: $X^i$, $i = 1, \dots, n = |\mathcal{J}|$.

## Критерии

$1|r_j|\sum_j C_j$ (the total completion time);
$1|r_j = 0, C_j \leq d_j, w_j|\sum_j w_j C_j$ (the weighted total completion time);
$1|r_j, d_j|\sum_j U_j$ (the number of tardy jobs);
$1|r_j = 0, d_j, w_j|\sum_j w_j U_j$ (the weighted number of tardy jobs);
$1|r_j, d_j|\sum_j T_j$ (the total tardiness);
$1|r_j, d_j|\sum_j w_j T_j$ (the total weighted tardiness);
$1||C_{\max} = \max_j C_j$ (the makespan);
$1|r_j, d_j|L_{\max} = \max_j L_j$ (the maximum lateness);
$2||C_{\max}, L_{\max}, \sum_j U_j, \sum_j T_j$.

## Упорядоченное 2-Разбиение

Дано упорядоченное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n_0}\}$ и вес $e_i$ каждого элемента $a_i \in A$, такой что $\sum_{a_i \in A} e_i = 2E$ и $e_i < e_{i+1},\ i = 1, \dots, 2n_0 - 1$.

Требуется определить, можно ли множество $A$ разбить на два подмножества $A_1$ и $A_2$, таких что

$$\sum_{a_i \in A_1} e_i = \sum_{a_i \in A_2} e_i = E,\ |A_1| = |A_2| = n_0,$$

и подмножество $A_1$ содержит только один элемент из каждой пары $a_{2i-1},\ a_{2i},\ i = 1, \dots, n_0$.

## Свойства

Расписание называется непрерывным, если машина не простаивает в интервале $[r_{\min}, d_{\max}]$
Пример задачи имеет свойство быть непрерывным, если все допустимые расписания непрерывны.

## Сводимость

Доказательсво NP-трудности основано на полиномиальной сводимости задачи Упорядоченное 2-Разбиение к распозновательной версии задачи составления расписаний.
Получаемые индивидуальные задачи распознования имеют свойство быть непрерывными.
Базовые работы $j$ соотвествуют работам $a_j$ и предписания работ содержат пары $a_{2i-1},\ a_{2i}$.
Вводится пороговое значение для критерия и дополнительные критические работы.
Требуется разбить множество базовых работ на две части.

Число работ $n = 2n_0$.
Характеристики работ $p_j = w_j = e_j$, $d_j = E$, $j \in \mathcal{J}$.
Предписания работ $X^{i+n_0} = X^i = \{2i-1,\ 2i\}$, $i = 1, \dots, n_0$.
Пороговое значение $\sum_j w_j U_j(\pi) \le E$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $2n_0$-1 | 1 | 3 | | $2n_0$-1 |
| 2 | 4 | $2n_0$ | 2 | 4 | | $2n_0$ |
| 1 | 2 | $n_0$ | $n_0$+1 | $n_0$+2 | | $2n_0$ |
| | | | $E$ | | | |

# NP-трудность

| Задача |
|---|
| $1\|r_j = 0, d_j = d, w_j, X^i\| \sum_j w_j U_j$ |
| $1\|r_j, d_j, X^i\|\gamma,\ \gamma \in \{L_{\max}; \sum_j U_j; \sum_j T_j\}$ |
| $1\|r_j = 0, d_j, w_j, X^i\| \sum_j w_j T_j\}$ |
| $1\|r_j = 0, C_j \le d_j, w_j, X^i\| \sum_j w_j C_j$ |
| $1\|r_j, X^i\| \sum_j C_j$ |
| $P2\|X^{i,l}\|\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max}, L_{\max}, \sum_j U_j, \sum_j T_j\}$ |

# Подход к решению, $|X^i| \le 2$

## Основная идея

- $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$ – двудольный граф.
- $\bar{U} = \{\{i, x\} : i \in X_n,\ x \in X^i\}$ – множество ребер.
- Вершины левой части $\leftrightarrow$ позиции.
- Вершины правой части $\leftrightarrow$ работы.
- Существует взаимооднозначное соответствие между множеством совершенных паросочетаний $\mathcal{W}$ в $\bar{G}$ и множеством $\Pi$ допустимых перестановок задачи $I(\gamma,\ X^i)$[a].

[a] Serdyukov A.I. (1978); Eremeev A., Kovalenko Yu. (2017)

## Типы ребер

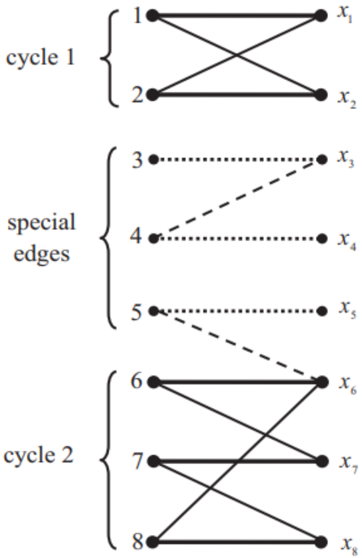
- Ребро $\{i, x\} \in \bar{U}$ называется *особым*, если $\{i, x\}$ принадлежит всем совершенным паросочетаниям графа $\bar{G}$.
- Все ребра, кроме особых и смежных с ними, разбиваются на циклы.

# Алгоритм решения $I(\gamma,\ X^i)$

**Шаг 1.** Построить граф $\bar{G}$, идентифицировать особые ребра и циклы, найти максимальные паросочетания в циклах.
**Шаг 2.** Перебирать все совершенные паросочетания $W \in \mathcal{W}$ графа $\bar{G}$ комбинацией максимальных паросочетаний в циклах и особых ребер.
**Шаг 3.** Построить соответствующее решение $\pi \in \Pi$ для каждого $W \in \mathcal{W}$ и вычислить $\gamma(\pi)$.
**Шаг 4.** Вернуть в качестве результата $\pi^* \in \Pi$, такую что $\gamma(\pi^*) = \min\limits_{\pi \in \Pi} \gamma(\pi)$.

## Вычислительная сложность

$O(T(\gamma)2^{q(I)})$, где $q(I) = q(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и последнее неравество достижимо, $T(\gamma)$ – время вычисления функции $\gamma$.


cycle 1
special edges
cycle 2
1
2
3
4
5
6
7
8
$x_1$
$x_2$
$x_3$
$x_4$
$x_5$
$x_6$
$x_7$
$x_8$

# “Почти все” индивидуальные задачи

Граф $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$ называется “хорошим”, если выполняется неравенство $q(\bar{G}) \leq 1.1 \ln n$.

$\bar{\chi}_n$ – множество “хороших” графов $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$.

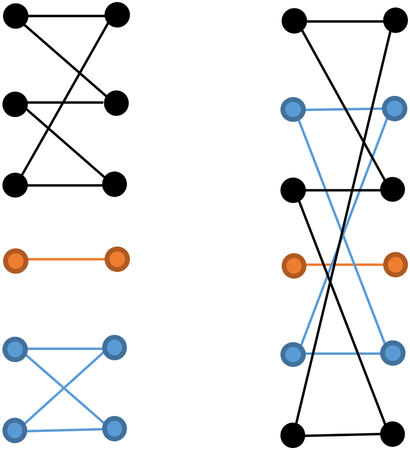
$\chi_n$ – множество всех графов $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$.

$\frac{|\bar{\chi}_n|}{|\chi_n|} \to 1$ при $n \to \infty$ (Serdyukov A.I., 1978).

**Теорема**

“Почти все” системы предписаний работ с $|X^i| \leq 2, \; i = 1, \ldots, n$, приводят к индивидуальным задачам $I(\gamma, \; X^i)$, имеющим не более $n$ допустимых решений и разрешимым за время $O(n^2)$.

# Зависимые и независимые циклы



# Модель целочисленного программирования

## Булевы переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ выполняется в позиции } i, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n, \; j \in X^i.$

## Непрерывные переменные

$y_i \geq 0$ – длительность работы в позиции $i$;

$z_i \geq 0$ – момент поступления работы в позиции $i$;

$v_i \geq 0$ – директивный срок работы в позиции $i$;

$C_i$ – момент окончания работы в позиции $i$.

# Модель целочисленного программирования

$$\sum_{j \in X^i} x_{ij} = 1, \; i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in Y^j} x_{ij} = 1, \; j \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

$$C_i \geq C_{i-1} + y_i, \; i = 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$C_i \geq z_i + y_i, \; i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

$$y_i = \sum_{j \in X^i} x_{ij} p_j, \; i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

$$z_i = \sum_{j \in X^i} x_{ij} r_j, \; i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$v_i = \sum_{j \in X^i} x_{ij} d_j, \; i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$C_i \geq 0, \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \; i = 1, \dots, n, \; j \in X^i. \tag{8}$$

the maximum lateness

$$L_{\max} \geq C_i - v_i, \; i = 1, \dots, n,$$

the total tardiness

$$T_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

$$T_i \geq 0, \; T_i \geq C_i - v_i, \; i = 1, \dots, n,$$

the total completion time

$$C_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

the number of tardy jobs

$$U_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

$$C_i \leq v_i + U_i \cdot BigM, \; U_i \in \{0, 1\}, \; i = 1, \dots, n.$$

# Новая модель целочисленного программирования

## Булевы переменные

$$x_l = \begin{cases} 0, & \text{если первое паросочетание выбрано в цикле } l, \\ 1, & \text{если второе паросочетание выбрано в цикле } l, \end{cases}$$

$l = 1, \ldots, q(\bar{G})$.

## Непрерывные переменные

$y_i \geq 0$ – длительность работы в позиции $i$;

$z_i \geq 0$ – момент поступления работы в позиции $i$;

$v_i \geq 0$ – директивный срок работы в позиции $i$;

$C_i$ – момент окончания работы в позиции $i$.

# Новая модель целочисленного программирования

$$C_i \geq C_{i-1} + y_i, \ i = 2, \dots, n, \tag{9}$$

$$C_i \geq z_i + y_i, \ i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

$$y_i = p_i^0(1 - x_l) + p_i^1 x_l, \ l = 1, \dots, q(\bar{G}), \ i \in N_l, \tag{11}$$

$$y_i = p_i^0, \ i = 1, \dots, n : |X^i| = 1,$$

$$z_i = r_i^0(1 - x_l) + r_i^1 x_l, \ l = 1, \dots, q(\bar{G}), \ i \in N_l, \tag{12}$$

$$z_i = r_i^0, \ i = 1, \dots, n : |X^i| = 1,$$

$$v_i = d_i^0(1 - x_l) + d_i^1 x_l, \ l = 1, \dots, q(\bar{G}), \ i \in N_l, \tag{13}$$

$$v_i = d_i^0, \ i = 1, \dots, n : |X^i| = 1,$$

$$C_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n, \tag{14}$$

$$x_l \in \{0, 1\}, \ l = 1, \dots, q(\bar{G}). \tag{15}$$

# Задача на нескольких машинах

## Алгоритм

Общее число позиций по всем машинам равно числу работ. Задача с несколькими машинами может быть решена теми же методами, что задача на одной машине.

## Пример

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $\{j_1, j_5\}$ | $\{j_9, j_{10}\}$ | | |
| $M_2$ | $\{j_3, j_5\}$ | $\{j_4, j_6\}$ | $\{j_6, j_7\}$ | $\{j_2, j_8\}$ |
| $M_3$ | $\{j_2, j_9\}$ | $\{j_7, j_8\}$ | $\{j_1, j_{10}\}$ | |
| $M_4$ | $\{j_{11}\}$ | $\{j_3, j_4\}$ | | |

# Заключение и планы

## Заключение

1. Доказательства NP-трудности для задач составления расписаний с предписаниями работ.
2. Методы переборного типа и модели целочисленного программирования.

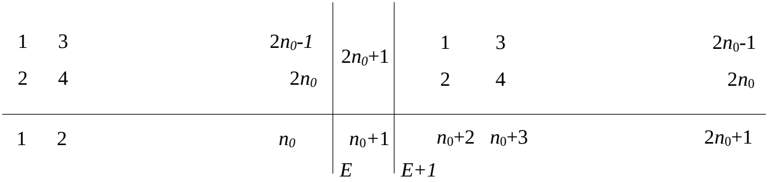
## Планы

1. Вычислительная сложность многостадийных и многопроцессорных задач с различными критериями.
2. Экспериментальное исследование раличных подходов к решению.
3. Новые свойства циклов в двудольных графах и параллельные алгоритмы.

Спасибо за внимание!

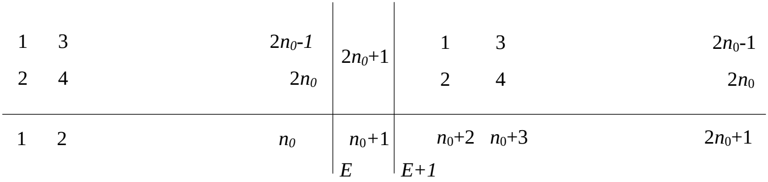
# $1|r_j, d_j, X^i|\gamma,\ \gamma \in \{L_{\max}; \sum_j U_j; \sum_j T_j\}$

The number of jobs $n = 2n_0 + 1$.
Job characteristics:
$p_j = e_j,\ d_j = 2E + 1,\ r_j = 0$ for $j = 1, \ldots, 2n_0$;
$p_{2n_0+1} = 1,\ r_{2n_0+1} = E,\ d_{2n_0+1} = E + 1$.
Job requisitions:
$X^{i+n_0+1} = X^i = \{2i - 1,\ 2i\},\ \ i = 1, \ldots, n_0$;
$X^{n_0+1} = \{2n_0 + 1\}$.
Threshold value $L_{\max}(\pi) \le 0$ ($\sum_j U_j(\pi) \le 0$ or $\sum_j T_j(\pi) \le 0$).

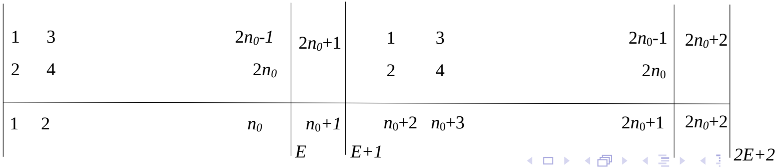


## $1|r_j = 0, C_j \le d_j, w_j, X^i|\sum_j w_jC_j$

The number of jobs $n = 2n_0 + 1$.
Job characteristics:
$p_j = w_j = e_j$, $d_j = 2E + 1$ for $j = 1, \dots, 2n_0$;
$p_{2n_0+1} = 1$, $w_{2n_0+1} = 0$, $d_{2n_0+1} = E + 1$.
Job requisitions:
$X^{i+n_0+1} = X^i = \{2i - 1,\ 2i\}$, $i = 1, \dots, n_0$;
$X^{n_0+1} = \{2n_0 + 1\}$.
Threshold value $\sum_j w_jC_j(\pi) \le \sum_{1\le i\le j\le 2n_0} e_ie_j + E$.



The number of jobs $n = 2n_0 + 2$.
Job characteristics:
$p_j = e_j,\ r_j = 0$ for $j = 1, \ldots, 2n_0$;
$p_{2n_0+1} = p_{2n_0+2} = 1$,
$r_{2n_0+1} = E,\ r_{2n_0+3} = 2E + 1$.
Job requisitions:
$X^{i+n_0+1} = X^i = \{2i-1,\ 2i\},\ i = 1, \ldots, n_0$;
$X^{n_0+1} = \{2n_0+1\},\ X^{2n_0+2} = \{2n_0+2\}$.
Threshold value $\sum_j C_j(\pi') \le$
$(E+1)+(2E+2)+\left(\sum_{j=1}^{n_0}(n_0-j+1)(e_{2j-1}+e_{2j}) + (E+1)n_0\right)$.



## $P2|X^{i,l}|\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max}, L_{\max}, \sum_j U_j, \sum_j T_j\}$

The number of jobs $n = 2n_0$.
Job characteristics:
$p_j = e_j,\ r_j = 0,\ d_j = E$ for $j = 1, \ldots, 2n_0$;
Job requisitions:
$X^{i,1} = X^{i,2} = \{2i - 1,\ 2i\},\ i = 1, \ldots, n_0$.
Threshold value $C_{\max} \le E,\ L_{\max} \le 0, \sum_j U_j \le 0, \sum_j T_j \le 0$.