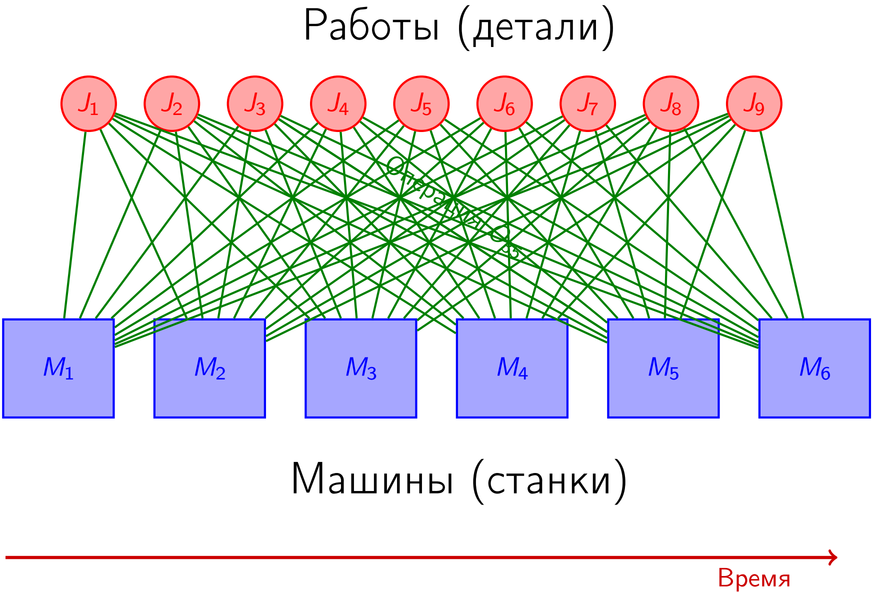
О вычислительной сложности вариантов двухстадийной задачи open shop с маршрутизацией и учетом ресурсных ограничений

Ю.В. Захарова, О.С. Кривоногова, И.Д. Черных

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015


Работы (детали)
J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6 J_7 J_8 J_9
Операция O_{35}
M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6
Машины (станки)
Время

Задача open shop (задача открытого типа)

Ограничение

Операции каждой работы могут выполняться в произвольном порядке. Операции одной машины (как и операции одной работы) не могут выполняться одновременно.

Цель

Построить допустимое расписание минимальной длины ($C_{\max}$).

Пример содержательной постановки

Диспансеризация. Группе пациентов (работы) требуется пройти осмотр у множества специалистов (машины). Время приема каждого пациента каждым специалистом известно заранее. Требуется составить расписание, в котором минимизируется время окончания последнего приема. Задержками при переходе пациентов из одного кабинета в другой можно пренебречь.

Пять алгоритмов для задачи с двумя машинами

Нижняя оценка

- ℓ_i — сумма длительностей операций, выполняемых машиной M_i (нагрузка M_i),
- d_j — сумма длительностей операций работы J_j (длина J_j).

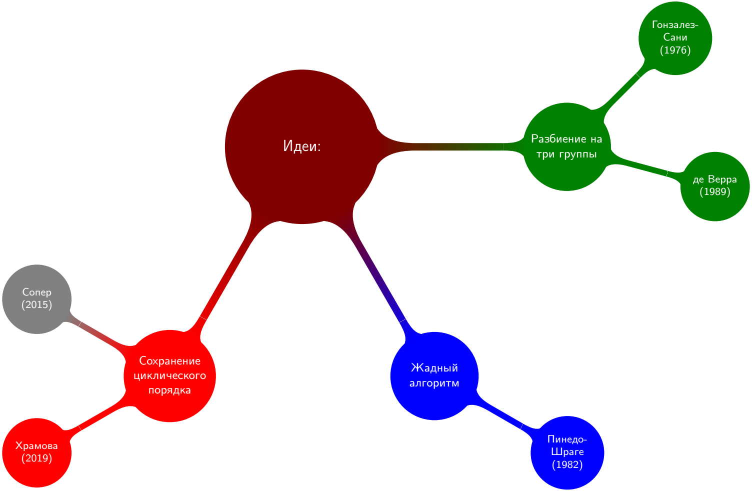
$$\bar{C} = \max\left\{\max_i \ell_i, \max_j d_j\right\}.$$

Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

Длина оптимального расписания для любого примера задачи open shop с двумя машинами и матрицей длительностей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Алгоритм Гонзалеза, Сани (1976)
Алгоритм Пинедо, Шраге (1982)
Алгоритм де Верра (1989)
Алгоритм Сопера (2015)
Алгоритм Храмовой (2021)

Идеи алгоритмов



Постановка задачи с маршрутизацией

Задача open shop с маршрутизацией объединяет классическую постановку задачи с метрической задачей коммивояжера:

1. Работы расположены в вершинах транспортной сети, заданной связным графом $G = \langle V; E \rangle$.
2. Машины изначально находятся в выделенной базе $v_0 \in V$.
3. На рёбрах графа G заданы неотрицательные веса, соответствующие временам перемещения между вершинами.
4. Машины могут перемещаться по рёбрам транспортной сети. Для выполнения операции некоторой работы машина должна находится в соответствующей вершине.
5. Цель состоит в построении кратчайшего по времени расписания выполнения всех работ и возвращения всех машин на базу.

Обозначение задачи

- $ROm||R_{\max}$, или
- $ROm|G = X|R_{\max}$, если структура транспортной сети ограничена графом вида X.

Стандартная нижняя оценка для $RO||R_{max}$

Обозначения

- ℓ_i — сумма длительностей операций, выполняемых машиной M_i (нагрузка M_i),
- d_j — сумма длительностей операций работы J_j (длина J_j),
- τ_{0j} — расстояние от базы v_0 до вершины, в которой расположена работа J_j,
- T^* — оптимум задачи коммивояжера (вес кратчайшего обхода графа G).

Длина любого допустимого расписания для задачи $RO||R_{\max}$ не меньше, чем

$$\bar{R} = \max\left\{\max_i \ell_i + T^*, \max_j(d_j + 2\tau_{0j})\right\}.$$

Труднорешаемость

Теорема [Averbakh, Berman, Chernykh 2006]

Задача $RO2|G = K_2|R_{\max}$ является NP-трудной в обычном смысле.

Теорема [Kononov 2012]

Для задачи $RO2|G = K_2|R_{\max}$ существует FPTAS.

Теорема [Pyatkin, Chernykh 2022]

Задача $RO2|G = K_2,\ j\text{-}prpt|R_{\max}$ является NP-трудной в обычном смысле.

Полиномиально разрешимые случаи: диагональная работа

Теорема [Кононов 2012]

Пусть в примере задачи $RO2|G = K_2|R_{\max}$ для диагональной работы J_r выполняется по крайней мере одно из следующих свойств:

1. Работа J_r находится в базе v_0,
2. Длина работы J_r не меньше чем наибольшая из нагрузок машин.

Тогда для этого примера за $O(n)$ можно построить расписание длины $\bar{R}$.

Замечание

Результат легко обобщается на случай $G = chain$ при дополнительном условии, что база — висячая вершина цепи, и диагональная работа расположена в висячей вершине цепи (возможно, не в той, где база).

Полиномиально разрешимые случаи: перегруженная база

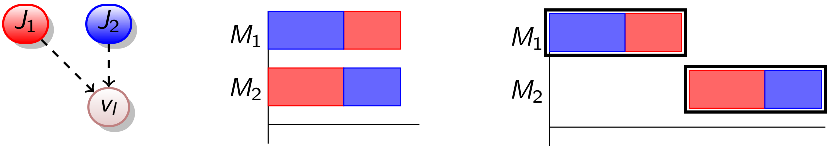
Определение

База v_0 называется перегруженной, если суммарная длина работ, находящихся в базе, превышает стандартную нижнюю оценку $\bar{R}$.

Теорема [Черных 2021]

Пусть в примере задачи $RO2||R_{\max}$ база перегружена. Тогда длина оптимального расписания совпадает с $\bar{R}$. Такое расписание может быть построено за время $O(n) + t_{TSP}$, где t_{TSP} — время нахождения кратчайшего обхода в графе G.

Полиномиально разрешимые случаи: сверхперегруженная вершина



Идея процедуры склеивания работ

Заменить подмножество работ в вершине одной, просуммировав длительности операций всех работ подмножества

Определение

Вершина называется сверхперегруженной, если работы в ней можно склеить ровно в три таким образом, что дальнейшее склеивание нарушает стандартную нижнюю оценку $\bar{R}$.

Полиномиально разрешимые случаи: сверхперегруженная вершина

Замечание

Задача проверки сверхперегруженности вершины является NP-трудной.

Необходимое условие сверхперегруженности

Если вершина v перегружена, то
$$\Delta(v) > \frac{3}{2}\left(\bar{R} - 2\tau\right).$$
Здесь $\Delta(v)$ — суммарная длина работ из вершины v (нагрузка v), τ — расстояние от v_0 до v.

Следствие

Сверхперегруженная вершина является перегруженной.

Полиномиально разрешимые случаи: сверхперегруженная вершина

Замечание

Задача проверки сверхперегруженности вершины является NP-трудной.

Необходимое условие сверхперегруженности

Если вершина v перегружена, то

$$\Delta(v) > \frac{3}{2}\left(\bar{R} - 2\tau\right).$$

Здесь $\Delta(v)$ — суммарная длина работ из вершины v (нагрузка v), τ — расстояние от v_0 до v.

Достаточное (конструктивное) условие сверхперегруженности

Вершина v является сверхперегруженной, если

$$\Delta(v) > \frac{3}{2}\left(\bar{R} - 2\tau\right) + d_{\max}(v).$$

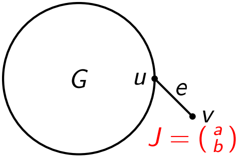
Здесь $d_{\max}(v)$ — наибольшая длина работы из v.

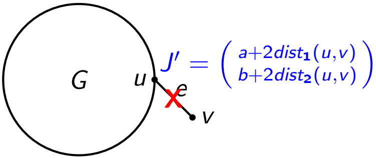
Полиномиально разрешимые случаи: сверхперегруженная вершина

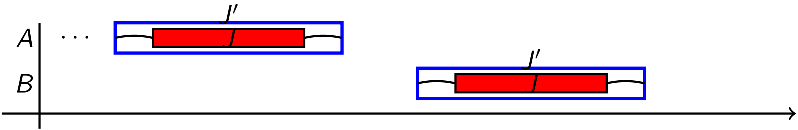
Теорема [Пяткин, Черных 2021]

Пусть пример задачи $RO2||R_{\max}$ содержит сверхперегруженную вершину и существует оптимальный обход графа G такой, что сверхперегруженная вершина смежна с базой в этом обходе. Тогда для этого примера за $O(n) + t_{TSP} + t_{SOL}$ можно построить расписание длины $\bar{R}$, где t_{TSP} — время нахождения такого обхода графа и t_{SOL} — время конструктивной проверки сверхперегруженности вершины.

Полиномиально разрешимые случаи: задача на дереве







Идея стягивания висячих ребер

Перенести работу из висячей вершины в смежную ей, увеличив длительности операций работы на удвоенную длину ребра.

Полиномиально разрешимые случаи: задача на дереве

Процедура упрощения исходного примера

Последовательно провести операции склеивания работ и стягивания висячих вершин, пока дальнейшее преобразование не увеличит стандартную нижнюю оценку $\bar{R}$.

Теорема [Черных, Льготина, 2021]

Граф G', получившийся в результате применения процедуры упрощения к примеру задачи $RO2|G = tree|R_{\max}$, имеет один из следующих видов:

1. G' состоит из одной вершины (базы);
2. $G' = chain$, соединяющая базу с перегруженным ребром;
3. $G' = chain$, соединяющая базу со сверхперегруженной вершиной;
4. $G' = chain$, соединяющая базу с перегруженной вершиной, не являющейся сверхперегруженной.

Полиномиально разрешимые случаи: задача на дереве

Процедура упрощения исходного примера

Последовательно провести операции склеивания работ и стягивания висячих вершин, пока дальнейшее преобразование не увеличит стандартную нижнюю оценку $\bar{R}$.

Теорема [Черных, Льготина 2021]

Пусть граф G', получившийся в результате применения процедуры упрощения к примеру задачи $RO2|G = tree|R_{\max}$, имеет один из следующих видов:

1. G' состоит из одной вершины (базы);
2. $G' = chain$, соединяющая базу с перегруженным ребром;
3. $G' = chain$, соединяющая базу со сверхперегруженной вершиной.

Тогда для этого примера за $O(n)$ можно построить расписание длины $\bar{R}$.

Полиномиально разрешимые случаи: задача с выбираемой базой

Вариация задачи с маршрутизацией

Выбираемая база: вершина, в которой расположена база, не задана изначально в примере задачи, а должна быть выбрана в процессе составления расписания. Машины начинают и заканчивают движение в этой выбранной базе.
Обозначение: $RO|variable - depot|R_{\max}$.

Нижняя оценка:

$$\bar{R}_{vd} = \max\left\{\max_i \ell_i + T^*, \max_j d_j\right\}.$$

Теорема [Храмова, Черных 2021]

Для любого примера задачи $RO2|variable - depot|R_{\max}$ длина оптимального расписания совпадает с $\bar{R}_{vd}$. Такое расписание может быть построено за время $O(n) + t_{TSP}$.

Вдохновляющие статьи

- Jurisch B., Kubiak W. Two machine open shop with renewable resources (1995)
- Bampis E., Letsios D., Lucarelli G. A note on multiprocessor speed scaling with precedence constraints (2014)
- Benoit A., Canon L. C., Elghazi R., and Heam P. C. List and shelf schedules for independent parallel tasks to minimize the energy consumption with discrete or continuous speed (2023)
- Ji M., Yao D.L., Ge J.J., Chen, T.C.E. Single-machine slack duewindow assignment and scheduling with past-sequence-dependent delivery times and controllable job processing times. (2015, электротехника, схемотехника, обработка металла)

$$p_j(R_j) = \left(\frac{Ch_j}{R_j}\right)^{\kappa},$$

где $0 < \kappa < 1$ – заданная константа, Ch_j – характеристика объема работы $j \in J$, R_j – объем ресурса, потребляемый работой $j \in J$.

Потребление ресурса – энергия

Скорость

Если операция O_{ji} выполняется со скоростью s_{ji}, то потребление энергии в единицу времени составляет s_{ji}^{α} ($\alpha > 1$ – константа)

Динамическая составляющая

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha}$$

Статическая составляющая

$$m \cdot P_{stat} \cdot C_{\max}$$

Выпуклая модель ($m = 2$)

$$LB \to \min, \tag{1}$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \;\; i = 1, \; 2, \tag{2}$$

$$LB \geq p_{1j} + p_{2j}, \;\; j \in J, \tag{3}$$

$$E \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + m \cdot P_{stat} \cdot LB, \tag{4}$$

$$p_{ij} \geq 0, \;\; j \in J, \;\; i = 1, \; 2. \tag{5}$$

Расписание ($m = 2$)

Любой из пяти алгоритмов за линейное время построит решение, на котором достигается нижняя оценка.

Задача $RO2|energy|R_{\max}$

Выпуклая модель ($m = 2$)

$$LB \to \min, \tag{6}$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + T^*, \ i = 1, \ 2, \tag{7}$$

$$LB \geq p_{1j} + p_{2j} + 2\tau_{0j}, \ j \in J, \tag{8}$$

$$E \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + m \cdot P_{stat} \cdot LB, \tag{9}$$

$$p_{ij} \geq 0, \ j \in J, \ i = 1, \ 2. \tag{10}$$

Результат

Вычисляются длительности и стандартная нижняя оценка.

Задача $RO2|energy|R_{\max}$

Полиномиально разрешимые случаи (зависимость от графа)

- $RO2|G = tree,\ energy|R_{\max}$, когда после упрощения примера граф не является цепью, соединяющей базу с перегруженной, но не сверхперегруженной, вершиной [Черных, Льготина 2021].
- $RO2|variable-depot,\ energy|R_{\max}$ [Храмова, Черных 2021].

Полиномиально разрешимые случаи (зависимость от длительностей)

- $RO2|G = K_2\ (chain),\ energy|R_{\max}$, когда диагональная работа в базе или имеет длину больше чем наибольная нагрузка машин [Кононов 2012].
- $RO2|energy|R_{\max}$, когда база перегружена [Черных 2021].
- $RO2|energy|R_{\max}$, когда сверхперегруженная вершина смежна с базой в одном из оптимальных обходов [Пяткин, Черных 2021].

NP-трудные случаи

- $RO2|G = K_2,\ energy|R_{\max}$ [Averbakh, Berman, Chernykh 2006].
- $RO2|G = K_2,\ j\text{-}prpt,\ energy|R_{\max}$ [Pyatkin, Chernykh 2022].

Спасибо за внимание!