

Вычислительная сложность и алгоритмы для задач составления производственных расписаний с ресурсными ограничениями

Ю.В. Захарова, А.А. Романова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал),
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Исследование выполнено за счет гранта Российского
научного фонда № 22-71-10015.

Актуальность приобретают задачи составления производственных расписаний с ресурсными ограничениями.

Oliveira F., Hamacher, S., Almeida, M.R. Process Industry Scheduling Optimization Using Genetic Algorithm and Mathematical Programming. Journal of Intelligent Manufacturing, 2011.

Lei D., Cai J. Multi-population meta-heuristics for production scheduling: A survey. Swarm and Evolutionary Computation. 2020.

Shakhlevich N.V., Sotskov Y. N., Werner F., Complexity of mixed shop scheduling problems: A survey. European Journal of Operational Research, 2000.

Kononov, A. and Zakharova, Y.: Speed scaling scheduling of multiprocessor jobs with energy constraint and makespan criterion. J Glob Optim 83 (2022).

Постановка задачи 1

- Имеется n работ, m машин.
- Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$, задан объем работы V_j и директивный срок d_j .
- Имеется невозобновимый ресурс (общего объема R), влияющий на длительности работ:

$$p_j(r) = \left(\frac{V_j}{r} \right)^\kappa, 0 < \kappa \leq 1.$$

- Критерий: максимальное временное смещение
 $L_{\max} = \max_j \{C_j - d_j\},$
где C_j – момент окончания работы j .

- Полином в случае задачи с прерываниями.
- NP-трудность случая без прерываний.
- Задача при фиксированном разбиении работ между машинами.
- Модель целочисленного программирования.
- Идея генетического алгоритма.

- Shabtay D., Kaspi M. Parallel machine scheduling with a convex resource consumption function. European J. Oper. Res., 2006, vol. 173, no. 1, pp. 92–107. doi: 10.1016/j.ejor.2004.12.008
- Shabtay D., Kaspi M. Minimizing the makespan in open-shop scheduling problems with a convex resource consumption function. Naval Research Logistics, 2006, vol. 53, no. 3, pp. 204–216. doi: 10.1002/nav.20133

Задача с прерываниями

$c \in C$ – конфигурация (подмножество работ и заданное потребление ресурса)

$r_{j,c}$ – потребление ресурса работой j в конфигурации c

F_l – подмножество конфигураций, где есть только работы $\{l, l+1, \dots, n\}$

$I_1 = [0, d_1 + L_{\max}]$, $I_l = [d_{l-1} + L_{\max}, d_l + L_{\max}]$, $l = 2, \dots, n$ – интервалы

x_c^l – длительность конфигурации c в интервале l

$L_{\max} \rightarrow \min$,

$$\sum_{c \in F_1} x_c^1 \leq d_1 + L_{\max},$$

$$\sum_{c \in F_l} x_c^l \leq d_l - d_{l-1}, \quad l = 2, \dots, n,$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{c \in F_l: j \in C} (x_c^l r_{jc}^\kappa)^{1/\kappa} \geq V_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{c \in C} \sum_{j \in C} x_c^l r_{jc}^\kappa \leq R.$$

Задача с заданным разбиением работ по машинам

Задано разбиение работ по машинам: $\pi^1, \dots, \pi^l$.

$$L_{\max} \rightarrow \min$$

$$L_{l, \pi_j^l} = \sum_{i=1}^j p_{\pi_i^l} - d_{\pi_j^l}, \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n^l,$$

$$L_{l, \pi_j^l} \leq L_{\max}, \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n^l,$$

$$\sum_{j=1}^n V_j(p_j)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \leq R,$$

$$p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Замечание. В оптимальном расписании работы на каждой машине упорядочены по неубыванию директивных сроков.

Теорема. Задача полиномиально разрешима при заданном разбиении работ по машинам.

Следствие. Задача на одной машине полиномиально разрешима.

Задача без прерываний

NP-трудность в обычном смысле

В случае двух машин задача является NP-трудной (сводится задача Разбиение).

Идея сводимости: общий директивный срок B и суммарное потребление ресурса $2B$.

NP-трудность в сильном смысле

В случае произвольного числа машин задача является NP-трудной в сильном смысле (сводится задача 3-Разбиение).

Идея сводимости: общий директивный срок B и суммарное потребление ресурса mB .

Идея алгоритма

1. Перейти к задаче на одной машине, уменьшив объемы работ $V_j^1 = \frac{V_j}{m}$ и общий объем ресурса $R^1 = \frac{R}{m}$.
2. Построить оптимальное решение для задачи на одной машине.
3. Увеличить полученные в п. 2 длительности работ в m раз и построить расписание путем добавления работ последовательно по неубыванию директивных сроков на наименее загруженную на текущий момент машину.

Оценка точности

Алгоритм позволяет построить расписание s со значением критерия $L_{\max}(s) \leq mL_{\max}^{1*} + d_{\max}$.

$$L_{\max} \rightarrow \min,$$

$$L_{\max} \geq C_j - d_j, \quad j \in J,$$

$$C_j \geq C_{i,k} - M(1 - x_{jik}), \quad j \in J, \quad i \in I, \quad k \in K,$$

$$C_{i,k+1} \geq C_{i,k} + \sum_{j \in J} x_{jik} p_j, \quad i \in I, \quad k \in K,$$

$$\sum_{j \in J} x_{jik} \geq \sum_{j \in J} x_{j,i,k+1}, \quad i \in I, \quad k \in K,$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{jik} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} V_j(p_j)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \leq R,$$

$$x_{jik} \in \{0, 1\}, \quad p_j \geq 0, \quad C_j \geq 0, \quad C_{i,k} \geq 0, \quad j \in J, \quad i \in I, \quad k \in K.$$

Кодировка решений

- m подмножеств работ для машин
- целевая функция вычисляется за полиномиальное время

Операторы

кроссинговер – работа размещается на машине как у одного из родителей, выбор вероятностный или детерминированный, потребление ресурса вычисляется по среднему значению

мутация – подмножество работ перемещается с одной машины на другую и/или меняется потребление ресурса у подмножества работ

Постановка задачи 2

- Имеется n работ и 1 машина.
- Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$, задан объем работы V_{jr} и интенсивность потребления ресурса i в единицу времени q_{jir} по рецепту r .
- Имеются складироваемые ресурсы:
 a_i – интенсивность поступления ресурса i ;
 $Q_i^{\min}$ – минимально допустимый объем ресурса i ;
 $Q_i^{\max}$ – максимально допустимый объем ресурса i .
- Критерий: длина расписания $C_{\max} = \max_j \{C_j\}$, где C_j – момент окончания работы j .

- Схожесть с задачей с воспроизводимыми ресурсами и суммированием векторов.
- NP-трудность различных частных случаев.
- Динамическое программирование.
- Модель целочисленного программирования.
- Идея алгоритма на перестановках.

- Севастьянов С.В. О компактном суммировании векторов, Дискрет. матем., 1991, том 3, выпуск 3, 66–72
- Kononov A., Lin B.M.-T. Relocation problems with multiple working crews. // Discrete Optimization. — 2006. — V. 3. — P. 366– 381.
- Kononov A., Lin B.M.-T. Minimizing the total weighted completion time in the relocation problem. // Journal of Scheduling. — 2010 — V.13, N 2. — P. 123–129.

NP-трудность в обычном смысле

В случае двух ресурсов и одного рецепта у каждой работы задача является NP-трудной (сводится задача Разбиение).

Идея сводимости: длительности всех работ кроме одной единичные, рецепты основаны на потреблении одного ресурса, длительности работ единичные.

NP-трудность в сильном смысле

В случае произвольного числа ресурсов и рецептов задача является NP-трудной в сильном смысле (сводится задача Паросочетания с ограничениями по весу).

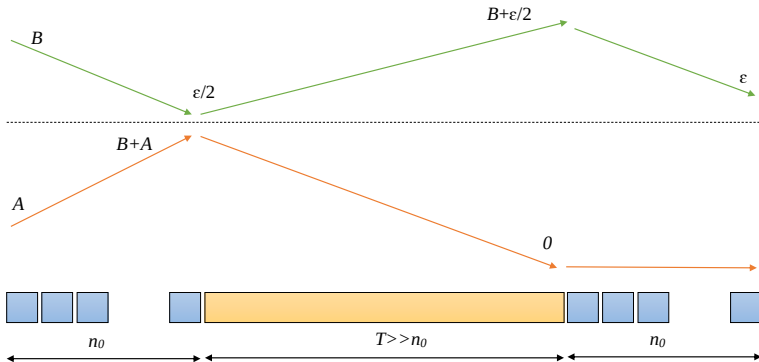
Идея сводимости: рецепт определяется ресурсом, длительности работ единичные.

Сводимость задачи «Разбиение»

$2n_0$ работ потребляет 1-ый ресурс с интенсивностью a_i и имеют объем 1, $\sum_i a_i = 2B$.

1 работа потребляет 2-ой ресурс с интенсивностью $\frac{B+A}{T}$ и имеет объем $T \gg n_0$.

У каждой работы один рецепт.

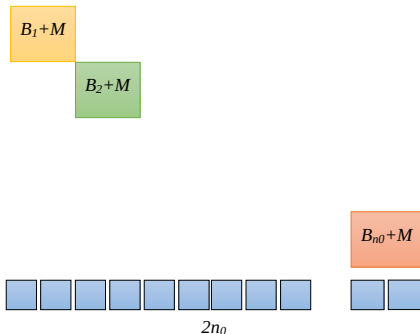


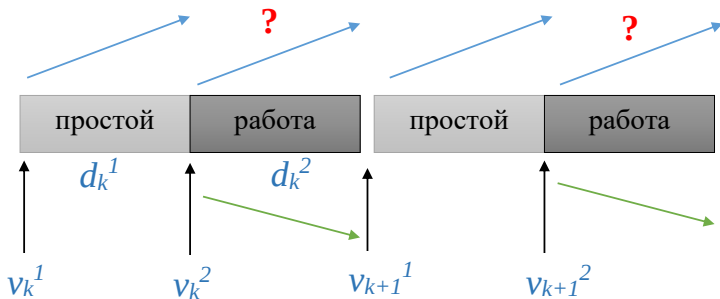
Сводимость задачи «Паросочетание с ограничением по весу»

n_0 работ потребляет любой ресурс с интенсивностью a_i и имеют объем 1.

n_0 работ потребляет любой ресурс с интенсивностью $a_i + M$ и имеют объем 1, $M \gg B_j$.

Рецепт определяется ресурсом.





Обозначения

(S, x) – состояние (подзадача), соответствующее выполнению работ множества S с начальным вектором x имеющихся ресурсов.

Управление для состояния (S, x) – выбор

- работы j , выполняющейся первой;
- рецепта r выполнения работы j ;
- вектора $t = (t_1, \dots, t_m)$ времен зачки ресурса для выполнения работы j ;
- режима $Mode_j$ выполнения работы j (0 – зачка параллельно с потреблением, 1 – зачка, потом потребление).

Соотношения

$F(\mathbf{S}, \mathbf{x})$ – минимальная длина расписания выполнения работ множества $\mathbf{S}$ с начальным вектором $\mathbf{x}$ ресурсов.

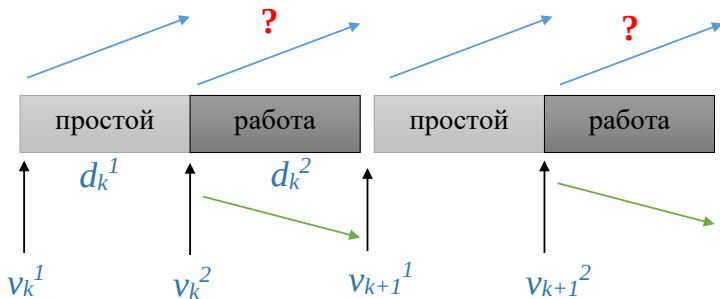
$$F(\mathbf{S}, \mathbf{x}) = \min_{j \in \mathbf{S}, r=1, K} \min \left\{ \min_{\mathbf{t} \in \Delta_0} \left(F(\mathbf{S} \setminus \{j\}, \mathbf{y}) + \max_i \max \left\{ t_i, \frac{q_{irj} V_j}{b_j} \right\} \right) \right. \\ \left. \min_{\mathbf{t} \in \Delta_1} \left(F(\mathbf{S} \setminus \{j\}, \mathbf{y}) + \max_i \left(t_i + \frac{q_{irj} V_j}{b_j} \right) \right) \right\},$$

где $y_i = x_i + t_i a_i - q_{irj} V_j$,

Δ_w соответствует множеству допустимых векторов $\mathbf{t}$, если работа j выполняется в режиме $Mode_j = w$.

$$\Delta_0 = \left\{ (t_1, \dots, t_m) \left| \frac{Q_i^{\min} + q_{irj} V_j - x_i}{a_i} \leq t_i \leq \right. \right. \\ \left. \left. \leq \frac{Q_i^{\max} - x_i}{a_i} + \frac{q_{irj} V_j}{\max\{a_i, b_j\}} \right\},$$

$$\Delta_1 = \left\{ (t_1, \dots, t_m) \left| \frac{Q_i^{\min} + q_{irj} V_j - x_i}{a_i} \leq t_i \leq \frac{Q_i^{\max} - x_i}{a_i} \right. \right\}.$$



$$C_{\max} = \sum_{k \in K} (d_k^1 + d_k^2) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{k \in K} x_{jrk} = 1, \quad j \in J,$$

$$d_k^2 = \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} x_{jrk} V_{jr}, \quad k \in K,$$

$$Q_i^{\min} \leq v_{ki}^1, \quad v_{ki}^2 \leq Q_i^{\max}, \quad k \in K, \quad i \in I,$$

$$v_{ki}^2 = v_{ki}^1 + a_i d_k^1, \quad k \in K, \quad i \in I,$$

$$v_{ki}^1 = v_{k-1,i}^2 + y_{ki} a_i d_k^2 - \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} x_{jrk} q_{jir} V_{jr}, \quad k \in K \setminus \{1\}, \quad i \in I,$$

$$x_{jrk}, y_{ki} \in \{0, 1\}, d_k^1, d_k^2 \geq 0, \quad j \in J, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad r \in R.$$

Кодировка

Перестановка работ, по которой определяется потребление ресурсов для наименьшей длины расписания.

Типы алгоритмов

Локальный поиск

Генетический алгоритм

Обучение с подкреплением (priority lists)

Спасибо за внимание!