Задача о доставке ресурсов на заводы с непрерывным потреблением

Ю.В. Захарова, В. Фаткутдинов

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015-П.

Структура доклада

- Постановка задачи и варианты
- Вычислительная сложность
- Модель ЧЦЛП
- Алгоритм локального поиска

Вдохновляющие статьи

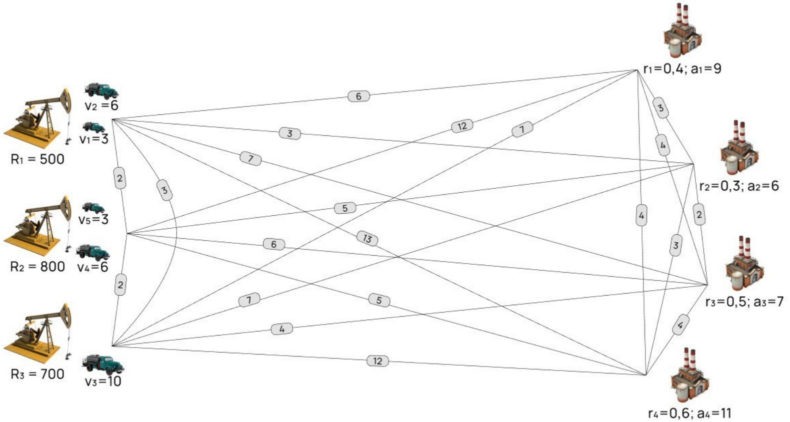
Toth P., Vigo D. (ed.). The vehicle routing problem. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

Kulachenko I. N., Kononova P. A. A hybrid algorithm for the drilling rig routing problem //Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2021. – Vol. 15. – №. 2. – P. 261-276.

Постановка задачи

$T \in R^+$ – горизонт планирования
$I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ – пункты хранения ресурса (склады)
$R_i \in R^+$ – запас ресурса в пункте $i \in I$
$J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ – пункты производства (заводы)
$\rho_j \in R^+$ – интенсивность потребления ресурса на заводе $j \in J$ (единиц/час)
$a_j \in R^+$ – начальный запас ресурса на заводе $j \in J$
$M = \{m_1, \ldots, m_p\}$ – машины
$v_l \in R^+$ – вместимость машины $l \in M$
$t_{ij} \in R^+$ – длительности перемещения между пунктами $i, j \in I \cup J$
Условие 1: Для каждого завода $j \in J$ и для любого момента времени $t \in [0, T)$ уровень ресурса должен быть неотрицательным.
Условие 2: Для каждого склада $i \in I$ и для любого момента времени $t \in [0, T)$ уровень ресурса должен быть неотрицательным.
Вопрос: Существует ли расписание доставки ресурса, гарантирующее выполнения условия?

Постановка задачи



R_i (баррели) кол-во ресурсов в i пункте хранения

r_j (баррели/час) кол-во потребляемых ресурсов в j пункте производства

v_k (баррели) кол-во ресурсов перевозимых k транспортным средством

t_{ij} (часы) длительности перевозки от i к j

Вычислительная сложность

Вход: Множество элементов $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ с положительными целочисленными весами $w(e_i) \in \mathbb{N}^+$.

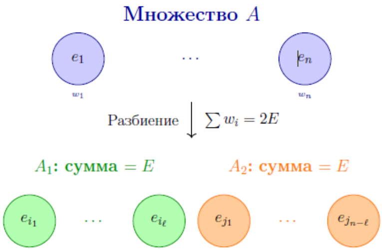
Пусть суммарный вес всех элементов равен $2E$, где:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$$

Вопрос: Существует ли разбиение $A = A_1 \cup A_2$, такое что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и

$$\sum_{e_i \in A_1} w(e_i) = \sum_{e_j \in A_2} w(e_j) = E?$$

Задача «Разбиение» является классической NP-полной задачей распознавания (Karp, 1972).

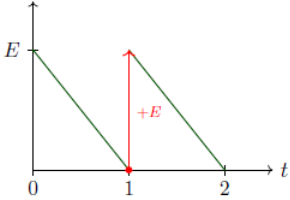


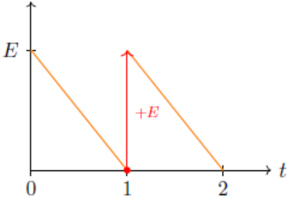
Вычислительная сложность

Теорема

Задача является NP-трудной даже в случае двух заводов (NP-трудной в сильном смысле при произвольном числе заводов).

$T = 2$ — горизонт планирования
n пунктов хранения: $R_i = w(e_i)$ для $i = 1, \ldots, n$
2 завода с параметрами:
$\rho_1 = \rho_2 = \mathrm{E}$
$a_1 = a_2 = \mathrm{E}$
n машин: $v_i = w(e_i)$, машина i изначально находится на складе i
Все времена перемещения: $t_{ij} = 1$



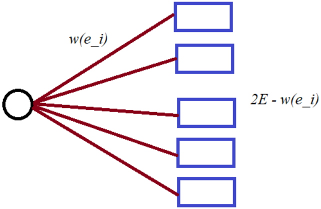


Вычислительная сложность

Теорема

Задача является NP-трудной даже в случае двух машин (NP-трудной в сильном смысле при произвольном числе машин).

$T = 2E$ — горизонт планирования
1 пункт хранения: $R_1 = 2E$
n заводов с параметрами:
$\rho_i = 1$ для $i = 1, \ldots, n$
$a_i = 2E - w(e_i)$
2 машины: $v_i = \max_{i \in I} w(e_i)$
Времена перемещения: $t_{0i} = w(e_i)$



Модель ЧЦЛП (переменные)

Общее число пунктов $N = I \cup J$.

Переменные маршрутизации

- $x^l_{kij} =$
$$\begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-я поездка машины } l \text{ проходит из пункта } i \text{ в пункт } j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Временные переменные

- $t^s_{kl} \geq 0$ — время начала k-й поездки машины l,
- $t^f_{kl} \geq 0$ — время окончания k-й поездки машины l.

Ресурсные переменные (перевозки)

- $v_{kl} \geq 0$ — объём ресурса, перевозимый в k-й поездке машиной l.

Вспомогательные обозначения

Индикатор принадлежности складу:

$$\mathbb{I}_{i \in S} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I \text{ (склад)}, \\ 0, & \text{если } i \in J \text{ (завод)}. \end{cases}$$

Модель ЧЦЛП (переменные)

Переменные для складов

- $R_{mi} \geq 0$ — остаток ресурса на складе i после m-го события,
- $T_{mi} \geq 0$ — временная метка m-го события на складе i,
- $Z_{mikl} =$
$$\begin{cases} 1, & \text{если } m\text{-е событие на складе } i \text{ совпадает по времени} \\ & \text{с началом } k\text{-й поездки машины } l \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

M_i — максимальное число посещений склада i (обозначение)

Переменные для заводов

- $V_{mj} \geq 0$ — остаток ресурса на заводе j после m-го события,
- $T'_{mj} \geq 0$ — временная метка m-го события на заводе j,
- $Z'_{mjkl} =$
$$\begin{cases} 1, & \text{если } m\text{-е событие на заводе } j \text{ совпадает по времени} \\ & \text{с окончанием } k\text{-й поездки машины } l \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

M'_j — максимальное число поступлений на заводе j (обозначение)

Модель ЧЦЛП (ограничения)

1. Связность маршрута

Если машина прибыла в пункт j в поездке k, то следующая поездка (если есть) начинается из j:

$$\sum_{i \in N} x^l_{kij} = \sum_{p \in N} x^l_{k+1,jp}, \quad \forall l, k = 1, \dots, K-1, \; j \in N.$$

2. Неприрывность поездок

Машина не может начать новую поездку, если завершила движение:

$$\sum_{i,j \in N} x^l_{k+1,ij} \leq \sum_{i,j \in N} x^l_{kij}, \quad \forall l, k = 1, \dots, K-1,$$

$$\sum_{i,j \in N} x^l_{kij} \leq 1, \quad \forall l, k.$$

3. Хронология поездок

$$t^s_{kl} \geq t^f_{k-1,l}, \quad \forall l, k = 2, \dots, K.$$

4. Расчёт времени окончания

$$t^f_{kl} = t^s_{kl} + \sum_{i,j \in N} d_{ij} \cdot x^l_{kij}, \quad \forall l, k.$$

5. Ограничение объёма перевозки

Объём ограничен вместимостью машины и доступным ресурсом **только при отправке со склада**:

$$v_{kl} \leq M_l \cdot \sum_{i \in S} \sum_{j \in N} x^l_{kij}, \quad \forall l, k,$$

$$v_{kl} \leq \sum_{m=1}^{M_i} R_{m-1,i} \cdot Z_{mikl} +, \quad \forall l, k, \ i \in I.$$

6. Баланс ресурсов на складах

$$R_{mi} = R_{m-1,i} - \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} v_{kl} \cdot Z_{mikl}, \quad \forall i \in I, \ m = 1, \ldots, M_i.$$

7. Неотрицательность остатков на складах

$$R_{mi} \geq 0, \quad \forall i \in I, \ m.$$

8. Начальные условия для складов

$$R_{0i} = R_i, \quad \forall i \in I.$$

Модель ЧЦЛП (ограничения)

9. Уникальность события на складе

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} Z_{mikl} \le 1, \quad \forall i \in I,\ m.$$

10. Связь времени события и начала поездки (склад)

$$T_{mi} \ge t^{s}_{kl} - M_{\text{big}}(1 - Z_{mikl}), \quad \forall i \in I,\ m,\ k,\ l,$$

$$T_{mi} \le t^{s}_{kl} + M_{\text{big}}(1 - Z_{mikl}), \quad \forall i \in I,\ m,\ k,\ l.$$

11. Монотонность событий на складе

$$T_{mi} \ge T_{m-1,i}, \quad \forall i \in I,\ m = 2, \dots, M_i.$$

Модель ЧЦЛП (ограничения)

12. Баланс ресурсов на заводах

Остаток на заводе обновляется с учётом потребления и поступлений:

$$V_{m-1,j} - \rho_j(T'_{mj} - T'_{m-1,j}) \geq 0, \quad \forall j \in J,\ m,$$

$$V_{mj} \leq V_{m-1,j} - \rho_j(T'_{mj} - T'_{m-1,j}) + v_{kl} + M_{\text{big}}(1 - Z'_{mjkl}), \quad \forall j \in J,\ m, k, l$$

$$V_{mj} \geq V_{m-1,j} - \rho_j(T'_{mj} - T'_{m-1,j}) + v_{kl} - M_{\text{big}}(1 - Z'_{mjkl}), \quad \forall j \in J,\ m, k, l$$

13. Связь события на заводе с прибытием машины

$$T'_{mj} \geq t^f_{kl} - M_{\text{big}}(1 - Z'_{mjkl}), \quad \forall j \in J,\ m,\ k,\ l,$$

$$T'_{mj} \leq t^f_{kl} + M_{\text{big}}(1 - Z'_{mjkl}), \quad \forall j \in J,\ m,\ k,\ l.$$

14. Уникальность и хронология событий на заводах

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} Z'_{mjkl} \leq 1, \quad \forall j \in J,\ m,$$

$$T'_{mj} \geq T'_{m-1,j}, \quad \forall j \in J,\ m = 2, \ldots, M'_j.$$

15. Учет ресурса в момент окончания горизонта планирования

$$x_{jm}^{fin} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ крайнее активное событие для завода } j \in J, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\sum_m x_{jm}^{fin} = 1, \forall j \in J,$$

$$x_{jm}^{fin} \leq \sum_{k,l} Z_{mjkl}, \quad \forall i \in J, \ m,$$

$$V_{mi} - \rho_j (T - T_{mj}) + M_{big}(1 - x_{jm}^{fin}) \geq 0, \quad \forall j \in J, \ m.$$

Рандомизированный локальный поиск (схема)

Начальное решение

Очередная освободившаяся машина направляется на завод, где быстрее наступит дефицит ресурса.

Шаг поиск

Стратегия "первый улучшающий", случайные шаги в 20% окрестности.

Критерий остановки

Заданное число итераций рекорд не улучшается.

Рандомизированный локальный поиск (окрестности)

change_factory — изменение получателя в маршруте

Суть: для любого прямого рейса (с грузом) изменяется завод-получатель на любой другой допустимый завод.

swap_factories — обмен получателями между двумя маршрутами

Суть: два прямых рейса (принадлежащих разным транспортным средствам) обмениваются заводами-получателями.

shift_trip — переназначение рейса другой машине

Суть: прямой рейс переводится на другую машину, обладающую такой же грузоподъёмностью.

Рандомизированный локальный поиск (окрестности)

relocate_trip — сдвиг рейса во времени

Суть: прямой рейс (вместе с обратным) переносится на новое время отправления.

interchange_blocks — обмен блоками рейсов между машинами

Суть: по одному прямому рейсу обмениваются между двумя разными машинами.

Рандомизированный локальный поиск (эксперимент)

складов: 2, 3; $R_i \in (600, 1000)$
заводов: 3, 4; $\rho_j \in (0.20, 0.45)$, $a_j \in (10, 16)$
машин: 5; $v_l \in (6, 10)$
длительности перемещения: $t_{ij} \in (2, 5) \cup (8, 15)$

квадратичная функция штрафов

change_factory	relocate_trip	shift_trip	swap_factories	
842,13	262,33	20,10	858,83	improvement_avg
1,40	2,95	2,02	1,72	time_seconds_avg
0	0	0	0	min_final_penalty
3	3	20	3	count_min_final_penalt

линейная функция штрафов

change_factory	relocate_trip	shift_trip	swap_factories	
88,40	13,48	13,13	89,65	improvement_avg
16,93	25,41	24,43	15,08	time_seconds_avg
0	0	0	0	min_final_penalty
3	11	12	3	count_min_final_penalty

Заключение

- Предложены модель ЧЦЛП и алгоритм локального поиска.
- Исследована вычислительная сложность.
- Дальнейшие исследования, представляющие интерес: доработка алгоритма локального поиска, разработка математической эвристики на основе предложенной модели, основательный вычислительный эксперимент.

Спасибо за внимание!