Приближенные алгоритмы для задачи open shop с зависящими от потребления ресурса длительностями операций

Ю.В. Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015, https://rscf.ru/project/22-71-10015/.

Структура доклада

- Постановка задачи и приложения
- Различные варианты задачи
- Методы решения
- Обобщение подходов и планы

Вдохновляющие статьи

- Bampis E., Letsios D., Lucarelli G. A note on multiprocessor speed scaling with precedence constraints (2014)
- Benoit A., Canon L. C., Elghazi R., and Heam P. C. List and shelf schedules for independent parallel tasks to minimize the energy consumption with discrete or continuous speed (2023)
- Kononov A., Zakharova Yu. Speed scaling scheduling of multiprocessor jobs with energy constraint and makespan criterion (2022)
- Ji M., Yao D.L., Ge J.J., Chen, T.C.E. Single-machine slack duewindow assignment and scheduling with past-sequence-dependent delivery times and controllable job processing times. (2015, электротехника, схемотехника, обработка металла)

$$p_j(R_j) = \left(\frac{Ch_j}{R_j}\right)^{\kappa},$$

где $0 < \kappa < 1$ – заданная константа, Ch_j – характеристика объема работы $j \in J$, R_j – объем ресурса, потребляемый работой $j \in J$.

Постановка задачи open-shop

- $J = \{1, \ldots, n\}$ – множество работ
- $P = \{1, \ldots, m\}$ – множество процессоров
- $O_{j1}, \ldots, O_{jm}$ – операции работы j
- операция O_{ji}: процессор i, объем W_{ji}
- В каждый момент времени каждый процессор может выполнять не более одной операции, а также в каждый момент времени не может выполняться более одной операции каждой работы.

Потребление энергии

Скорость

Если операция O_{ji} выполняется со скоростью s_{ji}, то потребление энергии в еденицу времени составляет s_{ji}^{α} ($\alpha > 1$ – константа)

Динамическая составляющая

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha}$$

Статическая составляющая

$$m \cdot P_{stat} \cdot C_{\max}$$

Расход энергии как ограничение

Непрерывное множество скоростей [Bampis et. al.]

Длительности операций и нижняя оценка

$$LB \to \min, \tag{1}$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \;\; i \in P, \tag{2}$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \;\; j \in J, \tag{3}$$

$$E \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + (m \cdot LB \cdot P_{stat}), \tag{4}$$

$$p_{ij} \geq 0, \;\; j \in J, \;\; i \in P. \tag{5}$$

2-приближенный алгоритм

Как только освобождается процессор $i \in P$ запускаем на нем операцию O_{ji} работы $j \in J$, которая в этот момент не выполняется ни на каком другом процессоре.

Непрерывное множество скоростей: частные случаи

Труднорешаемость ($m \geq 3$)

При $m = 3$ задача является NP-трудной. Для сводимости используется задача Разбиение.

Полиномиальная разрешимость ($m = 2$)

$$LB \to \min, \tag{6}$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \ i = 1, \ 2, \tag{7}$$

$$LB \geq p_{1j} + p_{2j}, \ j \in J, \tag{8}$$

$$E \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha}, \tag{9}$$

$$p_{ij} \geq 0, \ j \in J, \ i = 1, \ 2. \tag{10}$$

Непрерывное множество скоростей: частные случаи

Идея алгоритма

J_1 – множество работ, для которых $p_{1j} \leq p_{2j}$.
Пусть $J_2 = J \setminus J_1$.

Идентифицируем работу $k \in J_1$, для которой
$p_{2k} \geq \max\{p_{1j},\ j \in J_1\}$,
и работу $r \in J_2$, для которой $p_{1r} \geq \max\{p_{2j},\ j \in J_2\}$.
Трудоемкость – $O(n)$.

Свойство

Одно из расписаний, задаваемых перестановками
$(?; \pi_{J_1 \setminus \{k\}}; \pi_{J_2 \setminus \{r\}}; ?)$, где работы $k,\ r$ стоят в начале или в конце расписания, будет иметь длину расписания, равную LB.

Дискретные скорости и прерывания

C – множество допустимых конфигураций операций на процессорах, которые могут выполняться параллельно.

Конфигурация c задается набором операций O_c и скоростью $s_{i,j,c}$ каждой операции $(i,j) \in O_c$.

Мгновенная мощность для $c \in C$ – $E_c = \sum_{(i,j)\in O_c} (s_{i,j,c})^{\alpha} + mP_{stat}$.

Переменная x_c – длительность конфигурации $c \in C$.

Модель выпуклого программирования

$$\sum_{c\in C} x_c \to \min, \tag{11}$$

$$\sum_{c\in C:\ (i,j)\in O_c} \frac{s_{i,j,c} x_c}{W_{ij}} \geq 1,\ \ (i,j) \in O, \tag{12}$$

$$-\sum_{c\in C} E_c x_c \geq -E. \tag{13}$$

Дискретные скорости и прерывания

Прямая задача

$$\begin{gathered}
\sum_{c\in C} x_c \to \min, \\
\sum_{c\in C:\ (i,j)\in O_c} \frac{s_{i,j,c}x_c}{W_{ij}} \geq 1,\ (i,j)\in O, \\
-\sum_{c\in C} E_c x_c \geq -E, \\
x_c \geq 0,\ c\in C.
\end{gathered}$$

Двойственная задача

$$\begin{gathered}
\sum_{(i,j)\in O} \lambda_{ij} - E\mu \to \max, \\
\sum_{(i,j)\in O_c} \frac{s_{i,j,c}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} - E_c\mu \leq 1,\ c\in C, \\
\lambda_{ij} \geq 0,\ (i,j)) \in O, \\
\mu \geq 0.
\end{gathered}$$

Дискретные скорости и прерывания

Отделяющий оракул

При заданном решении $(\lambda_{i,j}, \mu)$ определяет является ли решение допустимым, и если ответ отрицательный, то идентифицирует нарушенное ограничение.

Наилучшая скорость

Для каждой операции (i, j) скорость v_{ij} отыскивается как одна из ближайших к величине $\left(\frac{\lambda_{ij}}{W_{ij}\alpha\mu}\right)$.

Максимальное паросочетание

$\sum_{(i,j)\in O_c} \left(\frac{v_{i,j}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^{\alpha}\mu\right) \to \max.$

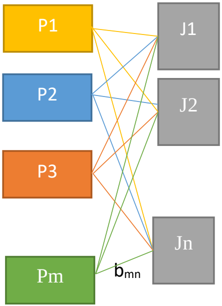
Двудольный граф $G = (J, P, E)$.
Доли вершин $J, P \longleftrightarrow$ работы и процессоры.
Ребра $E \longleftrightarrow$ операции (i, j) с весами $\left(\frac{v_{i,j}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^{\alpha}\mu\right)$.

Дискретные скорости и прерывания

Максимальное паросочетание

$$\sum_{(i,j)\in O_c} \left(\frac{v_{i,j}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^{\alpha} \mu \right) \to \max.$$

Двудольный граф $G = (J, P, E)$.
Доли вершин $J, P \longleftrightarrow$ работы и процессоры.
Ребра $E \longleftrightarrow$ операции (i, j) с весами $b_{ij} = \left(\frac{v_{i,j}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^{\alpha} \mu \right)$.



Минимизация расхода энергии

Длительности операций и нижняя оценка

$$E_{LB} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + LB \times P_{stat} \times m \to \min, \qquad (14)$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \; i \in P, \qquad (15)$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \; j \in J. \qquad (16)$$

2-приближенный алгоритм

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + C_{\max}(p_{ij}) \times P_{stat} \times m \leq 2E_{LB}.$$

Как только освобождается процессор $i \in P$ запускаем на нем операцию O_{ji} работы $j \in J$, которая в этот момент не выполняется ни на каком другом процессоре.

Минимизация расхода энергии: частные случаи

Труднорешаемость ($m \geq 3$)

При $m = 3$ задача является NP-трудной. Для сводимости используется задача Разбиение.

Полиномиальная разрешимость ($m = 2$)

$$E_{LB} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + 2LB \times P_{stat} \to \min,$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \; i = 1, 2,$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \; j \in J.$$

Минимизация расхода энергии: одна скорость

Обозначения

$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$.
$E(\sigma, s_\sigma) = W s_\sigma^\alpha + mC_{\max}(\sigma) P_{stat}$ – потребление энергии для расписания σ при скорости s_σ.

Выбор скорости

Пусть дано расписание σ с единичными скоростями операций. Тогда минимальное подребление энергии для этого расписания достигается при скорости

$$s_\sigma^E = \left(\frac{mC_{\max} P_{stat}}{W(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Минимизация расхода энергии: одна скорость

Расписание для критерия makespan

Пусть σ_2 есть 2-приближенное решение относительно критерия $C_{\max}$ при единичных скоростях операций. Тогда $C_{\max}(\sigma_2, s^E_{\sigma_2}) \le C_{\max}(\sigma_2, s^E_{\sigma^*}) \le 2C_{\max}(\sigma^*, s^E_{\sigma^*})$, где σ^* есть оптимальное расписание относительно критерия $C_{\max}$ при единичных скоростях.

Расписание для энергетического критерия

$$E(\sigma_2, s^E_{\sigma_2}) = (mP_{stat})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} W^{\frac{1}{\alpha}} \left((\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}}\right) (C_{\max}(\sigma_2))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \le$$

$$2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (mP_{stat})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} W^{\frac{1}{\alpha}} \left((\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}}\right) (C_{\max}(\sigma^*))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \le$$

$$2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} E(\sigma_{opt}).$$

Минимизация расхода энергии: одна дискретная скорость

Выбор скорости

Выбрать лучшу s^*_{discr} из двух скоростей, ближайших к

$$s^E_\sigma = \left(\frac{mC_{\max}P_{stat}}{W(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Оценка

$$E(\sigma_2, s^*_{discr}) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} W_{ij}(s^*_{discr})^{\alpha-1} + mP_{stat}C_{\max}(\sigma_2, s_{\max})\frac{s_{\max}}{s^*_{discr}} \leq$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} W_{ij}(s_{opt})^{\alpha-1} + mP_{stat}C_{\max}(\sigma_2, s_{\max})\frac{s_{\max}}{s_{opt}} \leq$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} W_{ij}(s_{opt})^{\alpha-1} + mP_{stat}2C_{\max}(\sigma^*, s_{\max})\frac{s_{\max}}{s_{opt}} \leq 2E(\sigma_{opt}, s_{opt}).$$

Минимизация расхода энергии: дискретный набор скоростей

$2m$-приближенный алгоритм A

Шаг 1. Для каждой работы $j \in J$ назначаем скорости операциям так, что величина $(p_{ij}(s_{ij})^{\alpha} + p_{ij}P_{stat})$ минимальна.
Шаг 2. При фиксированных длительностях операций p_{ij} строим приближенное расписание, такое что
$C_{\max} \leq 2\max\{\max_{i\in I} p_{ij}; \max_{j\in J} p_{ij}\}$.

$$E(\sigma_A) \leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}(s_{ij})^{\alpha} + mP_{stat}C_{\max} \leq$$

$$2m\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(p_{ij}(s_{ij'})^{\alpha} + P_{stat}p_{ij}) \leq$$

$$2m\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(p_{ij}(\sigma_{opt})(s_{ij}(\sigma_{opt}))^{\alpha} + P_{stat}p_{ij}(\sigma_{opt})) \leq 2mE(\sigma_{opt}).$$

Дискретные скорости и прерывания

Прямая задача

$$\sum_{c\in C} E_c x_c \to \min, \tag{17}$$

$$\sum_{c\in C:\ (i,j)\in O_c} \frac{s_{i,j,c}x_c}{W_{ij}} \geq 1,\ (i,j)\in O, \tag{18}$$

$$x_c \geq 0,\ c\in C. \tag{19}$$

Двойственная задача

$$\sum_{(i,j))\in O} \lambda_{ij} \to \max, \tag{20}$$

$$\sum_{(i,j)\in O_c} \frac{s_{i,j,c}\lambda_{i,j}}{W_{ij}} \leq E_c,\ c\in C, \tag{21}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0,\ (i,j))\in O, \tag{22}$$

$$\mu \geq 0. \tag{23}$$

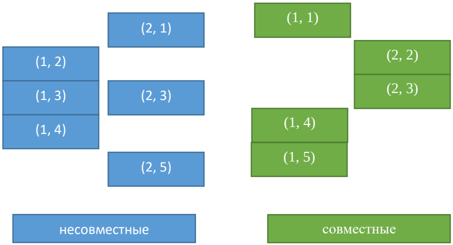
Многопроцессорные операции с ограниченным числом стадий

Особенность

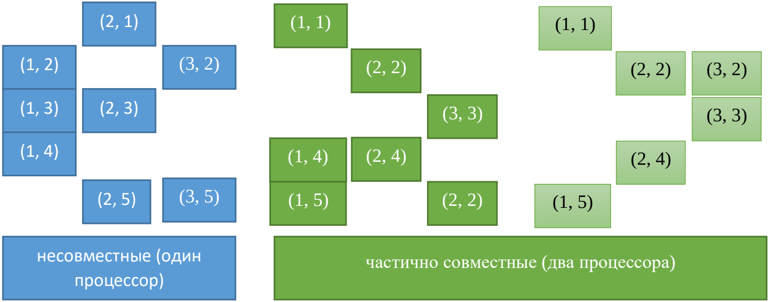
Работа состоит из 2 или 3 стадий, но операции при этом задействуют при своем выполнении несколько процессоров.

fix_{ij} – множество процессоров, которые задействует операция $i = 1, 2, 3$ работы $j \in J$
W_{ij} – объемом операции (i, j) на каждом из используемых процессоров

2 стадии



3 стадии



(2, 1)
(1, 2)
(3, 2)
(1, 3)
(2, 3)
(1, 4)
(2, 5)
(3, 5)
несовместные (один процессор)
(1, 1)
(2, 2)
(3, 3)
(1, 4)
(2, 4)
(1, 5)
(2, 2)
(1, 1)
(2, 2)
(3, 2)
(3, 3)
(2, 4)
(1, 5)
частично совместные (два процессора)

Заключение

- Предложены точные и приближенные алгоритмы для минимизации расхода энергии и ограничения на потребление энергии.
- Исследованы варианты задачи с непрерывным и дискретным набором скоростей.
- Дальнейшие исследования представляют интерес для частных случаев с другими типами взаимодействия работ.

Спасибо за внимание!