Приближенные алгоритмы для одной задачи составления производственного расписания

Юлия Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева (Омский филиал)

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015-П.

ОМСК–2026

Структура доклада

- Постановка задачи
- Задача с прерываниями (дискретное и непрерывное множество скоростей)
- Одна или все машины
- Заданное распределение работ по машинам
- Общий случай задачи без прерываний
- Заключение

Постановка задачи

Исходные данные

n – число работ;
m – число машин;
W_j – объем работы j;
$size_j$ – число требуемых машин работой j;
$d_j \geq 0$ – директивный срок работы j.
Задача рассматривается как в варианте с прерываниями, так и в варианте без прерываний.

Длительности работ

$p_j(r_j) = \frac{(W_j)^{\kappa+1}}{(r_j)^{\kappa}}$, где $0 < \kappa \leq 1$ – заданная константа.
Общий объем ресурса ограничен в совокупности величиной R.

Критерий

C_j – момент окончания работы j;
$L_{\max} = \max_{j \in J}\{C_j - d_j\}$.

Постановка задачи

Длительности работ

$p_j(r_j) = \frac{(W_j)^{\kappa+1}}{(r_j)^{\kappa}}$, где $0 < \kappa \leq 1$ – заданная константа.
Общий объем ресурса ограничен в совокупности величиной R.

Характеристики

Интенсивность выполнения (скорость) работы j:
$s_j := \frac{W_j}{p_j} = \frac{W_j(r_j)^{\kappa}}{(W_j)^{\kappa+1}} = \left(\frac{r_j}{W_j}\right)^{\kappa}$.
Интенсивность потребления ресурса работой j на каждой задействованной машине:
$v_j := \frac{r_j}{p_j} = \frac{r_j(r_j)^{\kappa}}{(W_j)^{\kappa+1}} = \left(\frac{r_j}{W_j}\right)^{\kappa+1}$.
Тогда
$v_j = (s_j)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}$, $j \in J$.

Прерывания и дискретное множество скоростей

Обозначения

$c \in C$ – конфигурация, т.е. подмножество работ, которые могут выполняться одновременно с учетом числа используемых машин, совместно с заданными скоростями работ.
Интервалы $I_l = [d_{l-1} + L_{\max},\ d_l + L_{\max}],\ l = 2, \ldots, n$ и
$I_1 = [d_0 := 0, d_1 + L_{\max}]$.
$x_c^l \geq 0$ – длительность конфигурации c в интервале $l = 1, \ldots, n$.

$$\begin{gathered}
L \to \min, \\
\sum_{c \in C_1} x_c^1 \leq d_1 - d_0 + L, \\
\sum_{c \in C_l} x_c^l \leq d_l - d_{l-1},\ l = 2, \ldots, n, \\
\sum_{l=1}^{n} \sum_{c \in C_l:\ j \in c} \frac{x_c^l s_{j,c}}{W_j} \geq 1,\ j = 1, \ldots, n, \\
\sum_{l=1}^{n} \sum_{c \in C_l} v_c x_c^l \leq R, \\
x_c^l \geq 0,\ L \geq 0,\ l = 1, \ldots, n,\ c \in C_l.
\end{gathered}$$

Прерывания и дискретное множество скоростей

Прямая задача

$$
\begin{gathered}
L \to \min, \\
\sum_{c \in C_1} x_c^1 \le d_1 - d_0 + L, \\
\sum_{c \in C_l} x_c^l \le d_l - d_{l-1}, \ \ l = 2, \dots, n, \\
\sum_{l=1}^n \sum_{c \in C_l:\ j \in c} \frac{x_c^l s_{j,c}}{W_j} \ge 1, \ \ j = 1, \dots, n, \\
\sum_{l=1}^n \sum_{c \in C_l} v_c x_c^l \le R, \\
x_c^l \ge 0, \ \ L \ge 0, \ \ l = 1, \dots, n, \ \ c \in C_l.
\end{gathered}
$$

Двойственная задача

$$
\begin{gathered}
\sum_{l=1}^n (d_{l-1} - d_l) y_l + \sum_{j \in \mathcal{J}} z_j - R\mu \to \max, \\
y_1 = 1, \\
\sum_{j \in c} \frac{s_{j,c} z_j}{W_j} - y_l - v_c \mu \le 0, \ \ c \in C_l, \ \ l = 1, \dots, n, \\
z_j \ge 0, \ \ j \in \mathcal{J}, \\
y_l \ge 0, \ \ l = 1, \dots, n, \\
\mu \ge 0.
\end{gathered}
$$

Задача с прерываниями: результаты

Теорема

Для задачи $P|size_j, pmtn, discr, res|L_{\max}$ можно построить оптимальное расписание за время, полиномиальное от m и размера входа задачи.

Теорема

Для задачи $P|size_j, pmtn, res|L_{\max}$ расписание с потреблением ресурса не более $R + \theta$ можно найти за время, полиномиальное от m, $1/\theta$ и размера входа задачи.

Задача $P|size_j \in \{1, m\}, pmtn, res|L_{\max}$

Обозначения

$\mathcal{J}_1$ – одномашинные работы
$\mathcal{J}_m$ – m-машинные работы
$J_{1l} := \{j \in \{l,\ l+1, \dots, n\} :\ size_j = 1\}$,
$J_{ml} := \{j \in \{l,\ l+1, \dots, n\} :\ size_j = m\}$ для $l = 1, \dots, n$
$L_j = \{l = 1, \dots, n :\ j \in J_{1l} \cup J_{ml}\}$ для $j \in \mathcal{J}$

$$
\begin{gathered}
L_{\max} \to \min, \\
\tfrac{1}{m} \sum_{j \in \mathcal{J}_{11}} p_{jl} \le d_1 + L_{\max} - \sum_{j \in \mathcal{J}_{m1}} p_{j1}, \\
\max_{j \in \mathcal{J}_{11}} \{p_{j1}\} \le d_l + L_{\max} - \sum_{j \in \mathcal{J}_{m1}} p_{j1}, \\
\tfrac{1}{m} \sum_{j \in \mathcal{J}_{1l}} p_{jl} \le d_l - d_{l-1} - \sum_{j \in \mathcal{J}_{ml}} p_{jl},\ \ l = 2, \dots, n, \\
\max_{j \in \mathcal{J}_{1l}} \{p_{jl}\} \le d_l - d_{l-1} - \sum_{j \in \mathcal{J}_{ml}} p_{jl},\ \ l = 2, \dots, n, \\
\sum_{j \in \mathcal{J}_1} \left(\sum_{l \in L_j} p_{jl} \right)^{-1/\kappa} W_j^{1+1/\kappa} + \\
\sum_{j \in \mathcal{J}_m} m \left(\sum_{l \in L_j} p_{jil} \right)^{-1/\kappa} W_j^{1+1/\kappa} \le R, \\
L_{\max} \ge 0,\ \ p_{jl} = 0,\ \ l = 1, \dots, n,\ \ j \in \mathcal{J}.
\end{gathered}
$$

Задача с прерываниями

Теорема

Для задачи $P|size_j, pmtn, discr, res|L_{\max}$ можно построить оптимальное расписание за время, полиномиальное от m и размера входа задачи.

Теорема

Для задачи $P|size_j, pmtn, res|L_{\max}$ расписание с потреблением ресурса не более $R + \theta$ можно найти за время, полиномиальное от m, $1/\theta$ и размера входа задачи.

Задача без прерываний

Алгоритм

1. Переходим от P на m машинах к $P1$ на одной машине. Объёмы работ $W'_j := \frac{W_j \cdot size_j}{m}$, $j \in J$. Объем ресурса уменьшается в m раз, директивные сроки работ не изменяются.
2. Решается $P1$ на одной машине, длительности p'_j вычисляются с помощью M_π, где работы упорядочены согласно последовательности π по неубыванию директивных сроков.
3. Вычисляются длительности $p_j = \frac{p'_j \cdot m}{size_j}$, $j \in J$.
4. Для задачи P работы назначаются в расписание в порядке, полученном в п. 2).

Теорема

Если $L_{\max}(P)$ – значение целевой функции задачи P для расписания, построенного алгоритмом $A-m-1-m$, $L^*_{\max}(P)$ – оптимальное значение целевой функции для задачи P, то $L_{\max}(P) \leq mL^*_{\max}(P) + (m-1)\max_{j\in J} d_j$.

Одномашинные работы

Предположение

n_i – число работ на машине $i \in I$,
π_l^i – работа, выполняемая l-ой по счету на машине i,
$l = 1, \dots, n_i$.

Математическая модель

$$L_{\max} \to \min,$$
$$L_{\max} \geq T_j^f - d_j, \; j \in J,$$
$$T_{\pi_l^i}^f = \sum_{k=1}^{l} p_{\pi_k^i}, l = 1, \dots, n_i, \; i \in I,$$
$$\sum_{j \in J} (W_j)^{1+\frac{1}{\kappa}} (p_j)^{\frac{-1}{\kappa}} \leq R,$$
$$p_j \geq 0, \; T_j^f \geq 0, \; j \in J.$$

Заключение

- Доказано, что в случае задачи с прерываниями «почти точное» решение может быть найдено за полиномиальное время при ограниченном константой числе машин, или когда работы задействуют одну или все машины.
- Для задачи без прерываний разработан алгоритм с гарантированной оценкой точности.
- Выделены полиномиально разрешимые случаи.

Спасибо за внимание!