Алгоритмы приближенного решения двухкритериальной задачи составления расписания выполнения заказов клиентов

Захаров А.О.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

Семинар "Модели и алгоритмы для задач составления расписаний"

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015-П.

Постановка задачи

Входные данные

m количество заказов (клиентов)
n количество продуктов
$p_{ij} \geq 0$ длительность прозводства продукта j для заказа i
$s_{jj'} \geq 0$ длительность переналадки с продукта j на продукт j'
$s'_j \geq 0$ длительность начальной переналадки для продукта j

Представление решения

Перестановка множества операций - пар "заказ, продукт" (i, j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Операции выполняются без прерываний.

Предыдущие исследования

Hazir, O., Gunalay, Y., Erel, E. (2008). Customer order scheduling problem: a comparative metaheuristics study. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 37, 589-598.

Erel, E., Ghosh, J. B. (2007). Customer order scheduling on a single machine with family setup times: Complexity and algorithms. Applied Mathematics and Computation, 185(1), 11-18.

Cetinkaya, F. C., Yeloglu, P., Catmakas, H. A. (2021). Customer order scheduling with job-based processing on a single-machine to minimize the total completion time.

Предыдущие исследования

B.M.T. Lin, A.V. Kononov (2007) Customer order scheduling to minimize the number of late jobs, Euro J Oper Res

Bruno de Athayde Prata, Carlos Diego Rodrigues, Jose Manuel Framinan (2021) Customer order scheduling problem to minimize makespan with sequence-dependent setup times, Comput & Ind Engin

Z. Shi, L. Wang, P. Liu and L. Shi (2017) Minimizing Completion Time for Order Scheduling: Formulation and Heuristic Algorithm, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering

Jose M. Framinan, Paz Perez-Gonzalez (2017) New approximate algorithms for the customer order scheduling problem with total completion time objective, Comp & Oper Res

Модель ЦЛП

$M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$, $K = \{1, \ldots, nm\}$.
Операция $o = (i, j)$. Множество всех операций обозначим через O.

$$x_{ok} = \begin{cases} 1, & \text{если операция } o \in O \text{ находится в позиции } k \in K, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$t_k^f \geq 0 \text{ – момент завершения операции в позиции } k \in K,$$

$$T_i \geq 0 \text{ – момент завершения выполнения заказа } i \in M,$$

$$k \in K, \ o \in O, \ i \in M.$$

Модель ЦЛП

Ограничения

$$\sum_{k \in K} x_{ok} = 1, \; o \in O, \tag{1}$$

$$\sum_{o \in O} x_{ok} = 1, \; k \in K, \tag{2}$$

$$t_1^f \geq \sum_{o \in O} x_{o1}(p_o + s'_o), \tag{3}$$

$$t_k^f \geq t_{k-1}^f + p_o + \sum_{o' \in O} x_{o',k-1} s_{o'o} - H(1 - x_{ok}), \tag{4}$$

$$k = 2, \ldots, nm, \; o \in O,$$

$$T_i \geq t_k^f - H(1 - x_{ok}), \; k \in K, \; o \in O, \tag{5}$$

$$T_i \geq 0, \; t_k^f \geq 0, \; x_{ok} \in \{0, 1\}, \; i \in M, \; k \in K, o \in O. \tag{6}$$

Двухкритериальная задача

Критерий

$f = (f_1, f_2)$
$f_1 = \sum_{i \in M} T_i, \quad f_2 = \max_{i \in M} T_i,$
T_i – момент завершения заказа i.

Множество допустимых решений

$X = \{x_{ok} \in \{0,1\} \,|\, \forall o \in O,\ \forall k \in K : (1)\text{–}(6)\}.$
$Y = f(X)$

Множество Парето

$P(Y) = \{y^* \in Y \,|\, \nexists y \in Y : \ y \leq y^*\}$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \ ? \ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$f_1(x) = \sum_{i\in M} T_i(x), \;\; f_2(x) = \max_{i\in M} T_i(x).$

Ограничение: входные данные целочисленные.
Параметры алгоритма: $\varepsilon > 0, step \geqslant 1$

1. Решаем $C^*_\Sigma := \min_X f_1$.
2. Решаем $C^*_{\max} := \min_X f_2$.
3. Решаем

$$f_2 \to \min:$$
$$(1)-(6),$$
$$C^*_\sum - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in M} T_i(x) \leqslant C^*_\sum + \varepsilon$$

Если решение нашли $C^{(1)}_{\max} := \min f_2$, то
$P(Y) = \{(C^*_\sum, C^{(1)}_{\max})\}$.
Если $C^{(1)}_{\max} \leqslant C^*_{\max}$, то останавливаемся.
Если $C^{(1)}_{\max} > C^*_{\max}$ или нет допустимого, то к шагу 4.

4. Решаем задачу

$$f_1 \to \min :$$

$$(1) - (6),$$

$$\sum_{i \in M} T_i(x) \geqslant C^*_{\sum} + step,$$

$$T_i(x) \leqslant C^{(1)}_{\max} \ \forall i \in M$$

Если есть допустимое решение, то
к шагу 5 (если на шаге 3 нашли решение) $C^{(1)}_{\sum} := \min f_1$
или
к шагу 3 (если на шаге 3 не нашли решение) $C^*_{\sum} := \min f_1$,
иначе останавливаемся.

Переборный поиск множества Парето/аппроксимации

5. Решаем задачу

$$f_2 \to \min :$$

$$(1) - (6),$$

$$C_{\Sigma}^{(1)} - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in M} T_i(x) \leqslant C_{\Sigma}^{(1)} + \varepsilon$$

Если решение нашли $C_{\max}^{(2)} := \min f_2$, то
$P(Y) = P(Y) \cup \{(C_{\sum}^{(1)}, C_{\max}^{(2)})\}$.
Если нет допустимого решения, то к шагу 4.
Если $C_{\max}^{(2)} \leqslant C_{\max}^{*}$, то останавливаемся, иначе к следующему шагу.

Переборный поиск множества Парето/аппроксимации

i. Решаем задачу

$$f_1 \to \min :$$

$$(1) - (6),$$

$$\sum_{i \in M} T_i(x) \geqslant C_{\sum}^{(i-1)} + step,$$

$$T_i(x) \leqslant C_{\max}^{(i)} \ \forall i \in M$$

Если есть допустимое решение, то
к шагу $i+1$, $C_{\sum}^{(i)} := \min f_1$,
иначе останавливаемся.

Переборный поиск множества Парето/аппроксимации

$i+1$. Решаем задачу

$$f_2 \to \min:$$

$$(1) - (6),$$

$$C_{\sum}^{(i)} - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in M} T_i(x) \leqslant C_{\sum}^{(i)} + \varepsilon$$

Если решение нашли $C_{\max}^{(i+1)} := \min f_2$, то
$P(Y) = P(Y) \cup \{(C_{\sum}^{(i)}, C_{\max}^{(i+1)})\}$.
Если нет допустимого решения, то к шагу $i-1$.
Если $C_{\max}^{(i)} \leqslant C_{\max}^{*}$, то останавливаемся, иначе к следующему шагу.

Метрики

GD, IGD

Generational distance (GD),
inverted generational distance (IGD)[a]:

$$GD(P^*, P) = \frac{1}{|P^*|}\sqrt{\sum_{i=1}^{|P^*|}\mu_i^2}, \; IGD(P^*, P) = \frac{1}{|P|}\sqrt{\sum_{i=1}^{|P|}\bar{\mu}_i^2},$$

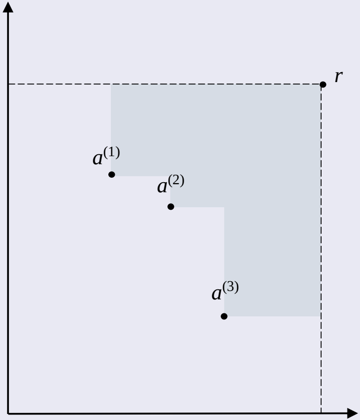
μ_i ($\bar{\mu}_i$) евклидово расстояние между i-ой точкой множества P^* (P) и ближашей точкой множества P (P^*).
P – множество Парето, P^* – аппроксимация множества Парето.

[a] Yuan Y., Xu H., Wang B. An improved NSGA-III procedure for evolutionary many-objective optimization. GECCO–14.

Метрики

Hyper-volume (HV) / Гиперобъем

$P^* = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$, r – референтная точка.



Вычислительный эксперимент

Тестовые примеры

Заказов $m = 3$, продуктов $n = 4$.
Длительности случайным образом из $(0, 15)$, переналадки – $(10, 20)$, $(1, 30)$, $(25, 35)$, $(15, 45)$.

GD, IGD, HV (отн.): average (deviation)

$\varepsilon = 0.5$, $step = 1$, GUROBI, время солвера 1 мин.

$m = 3,\ n = 4$	DG	IDG	HV (отн.)
(10,20)	0.87 (1.25)	1.84 (2.47)	0.996 (0.004)
(1,30)	0.6 (0.65)	1.67 (2.08)	0.997 (0.003)
(25, 35)	0.33 (0.18)	1.28 (5.4)	0.999 (0.0005)
(15, 45)	0.072 (1.68)	2.26 (6.73)	0.999 (0.001)

Спасибо за внимание!