

Конструктивные алгоритмы для задач составления расписаний с ресурсными ограничениями

Ю.В. Захарова¹, М.Ю. Сахно¹

¹ Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева
СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015, <https://rscf.ru/project/22-71-10015>.

Актуальность

Актуальность приобретают задачи составления расписаний с ресурсными ограничениями. Это характерно и для производственного сектора, и для компьютерных систем.

Постановка задачи

- ▶ Имеется n работ, t ядер процессора.

Постановка задачи

- ▶ Имеется n работ, m ядер процессора.
- ▶ Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$, заданы объем работы V_j и количество $size_j$ требуемых ядер.

Постановка задачи

- ▶ Имеется n работ, m ядер процессора.
- ▶ Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$, заданы объем работы V_j и количество $size_j$ требуемых ядер.
- ▶ Имеется такой ресурс, как шина данных и для каждой работы задан необходимый ей процент шины данных b_j . Если работа использует меньше шины данных, чем нуждается, то она пропорционально замедляется.

Постановка задачи

- ▶ Имеется n работ, m ядер процессора.
- ▶ Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$, заданы объем работы V_j и количество $size_j$ требуемых ядер.
- ▶ Имеется такой ресурс, как шина данных и для каждой работы задан необходимый ей процент шины данных b_j . Если работа использует меньше шины данных, чем нуждается, то она пропорционально замедляется.
- ▶ Имеется такой ресурс, как энергия. Если процессор работает со скоростью s , то мгновенное потребление энергии равно s^α , где $\alpha > 1$ является константой.

Задача 1

Рассматриваемый ресурс – шина данных. Для каждой работы j , $j = 1, \dots, n$ задано количество единиц времени s_j , необходимое ей для выполнения в идеальных условиях, а $size_j = 1$.

Необходимо составить расписание выполнения работ на ядрах процессора с минимальным общим временем завершения.

$$LB = \max_{i \in J} \left(s_i, \frac{\sum_{j \in J} s_j}{m} \right)$$

Алгоритм 1 Жадный алгоритм A_{gr} из [Eremeev & Sakhno, 2020]

Пока присутствуют незавершенные работы, повторять:

- 1: Выбрать m работ для выполнения.
 - 2: Вычислить скорости выполнения выбранных работ.
 - 3: Определить, какая из работ завершится первой.
-

Алгоритмы для сравнения:

- ▶ Жадный алгоритм A_{gr} .
- ▶ Алгоритм списочного типа с упорядоченными по невозрастанию длительностей работами A_d .
- ▶ Жадный алгоритм с фейковыми работами A_f .
- ▶ Алгоритм списочного типа с упорядоченными по невозрастанию длительностей работами и фейковыми работами A_{df} .

Результаты сравнения с нижней границей, %

Сгенерировано 2 серии по 30 тестовых примеров, где работами являются процедуры из библиотеки Intel MKL. Частичный порядок отсутствует.

	n = 50, m = 12				n = 100, m = 24			
	A_{gr}	A_d	A_f	A_{df}	A_{gr}	A_d	A_f	A_{df}
min	0.00	0.00	0.00	0.00	58.52	46.66	98.81	51.30
avg	13.74	2.00	13.84	4.37	65.18	54.97	131.68	63.15
max	25.73	3.47	25.10	17.07	76.06	61.35	173.97	77.45

Результаты сравнения с нижней границей, %

Сгенерировано 2 серии по 30 тестовых примеров, где работами являются процедуры из библиотеки Intel MKL. Частичный порядок – бинарное дерево.

	n = 50, m = 12				n = 100, m = 24			
	A_{gr}	A_d	A_f	A_{df}	A_{gr}	A_d	A_f	A_{df}
min	25.24	23.60	25.24	23.60	78.03	83.25	121.36	92.33
avg	80.03	75.67	80.03	75.81	125.75	126.30	174.77	128.82
max	228.9	228.9	228.9	228.9	214.03	214.03	238.36	207.93

Задача 2: $P2|size_j, energy| \sum C_j$

Рассматриваемый ресурс – энергия. Необходимо составить расписание выполнения работ на ядрах такое, что суммарное время завершения всех работ $\sum C_j$ при заданном энергетическом бюджете E и $m = 2$ минимально.

Нижнюю границу дает полиномиально разрешимая задача, в которой все работы распараллеливаются.

Алгоритм 2 Жадный алгоритм с локальными улучшениями A_{gr_li} из [Zakharova & Sakhno, 2025]

Шаг 1: Построить расписание алгоритмом A_{gr} из [Kononov & Zakharova, 2023] и найти блоки в решении.

Шаг 2: Последовательно просматривать блоки с Шага 1, применяя локальные улучшения между блоками.

Шаг 3: Применить локальные улучшения внутри блоков к полученному решению.

Шаг 4: Вернуть лучшее найденное решение в качестве результата выполнения алгоритма.

Результаты сравнения с нижней границей, %

Сгенерированы серии из 30 тестовых примеров различной структуры, в том числе специальная серия, являющаяся сложной для алгоритма A_{gr} . Частичный порядок отсутствует, $n = 50, m = 2$.

	A_{gr}	A_{gr_li}
Серия 1	8.27	4.0
Серия 2	4.46	2.54
Серия 3	6.58	3.86
Серия 4	2.63	2.24
Специальная серия	23.9	7.8

Задача 3: $1|r_j, d_j|E$

Рассматриваемый ресурс – энергия. Необходимо составить расписание выполнения всех работ на ядрах такое, что суммарное потребление энергии минимально, при $m = 1$ и заданных для каждой работы моментов поступления (release dates) r_j и крайних сроков завершения (deadlines) d_j .

Нижнюю границу дает решение задачи с прерываниями, которая полиномиально разрешима.

Алгоритмы для сравнения

- ▶ Алгоритм списочного типа с работами, упорядоченными по невозрастанию объемов A_V .
- ▶ Алгоритм списочного типа с работами, упорядоченными по неубыванию моментов поступления A_r .
- ▶ Алгоритм списочного типа с работами, упорядоченными по неубыванию $d_j - r_j$ A_{dr} .
- ▶ Алгоритм списочного типа с работами, упорядоченными по невозрастанию $V_j / (d_j - r_j)$ A_{vdr} .

Результаты сравнения с нижней границей, %

Сгенерированы 2 серии по 30 тестовых примеров, $m = 1$.

	50				100			
	A_v	A_r	A_{dr}	A_{vdr}	A_v	A_r	A_{dr}	A_{vdr}
min	79.75	7.69	58.95	90.74	65.56	10.98	93.49	106.01
avg	148.7	23.5	180.8	196.7	113.9	22.53	146.3	167.3
max	227.5	45.10	327.6	319.95	194.8	37.57	281.9	245.2

Результаты сравнения с оптимальным решением, %

Сгенерированы 2 специальных серии по 30 тестовых примеров с известным оптимумом, $m = 1$.

	50				100			
	A_v	A_r	A_{dr}	A_{vdr}	A_v	A_r	A_{dr}	A_{vdr}
min	14.93	14.93	50.24	0.00	13.33	13.33	47.84	47.84
avg	193.1	173.3	254.5	85.91	175.3	157.5	213.9	213.9
max	789.1	789.1	882.3	595.9	794	794	594.9	594.9

Заключение

- ▶ Проведено исследование конструктивных эвристик для трех задач с ресурсными ограничениями.
- ▶ Показано, что результаты работы эвристик зависят от структуры исходных данных, целевого критерия и от типа ресурса.
- ▶ В качестве дальнейшего исследования можно рассматривать частичную дерандомизацию конструктивных эвристик, чтобы использовать полученные решения как начальную популяцию для метаэвристик.

Спасибо за внимание!