Приближенные алгоритмы решения для частных случаев соразмерной задачи open shop с маршрутизацией на дереве

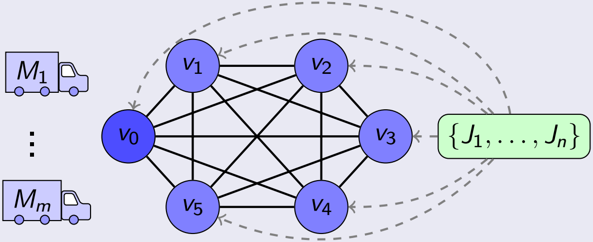
Кривоногова О.С.

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”

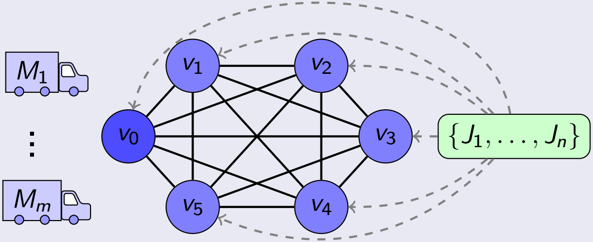
30.11.2024

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 22-71-10015

Задача Open shop с маршрутизацией

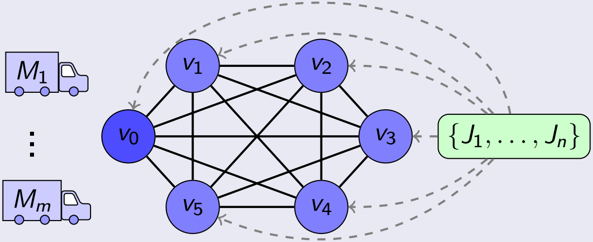


Задача Open shop с маршрутизацией



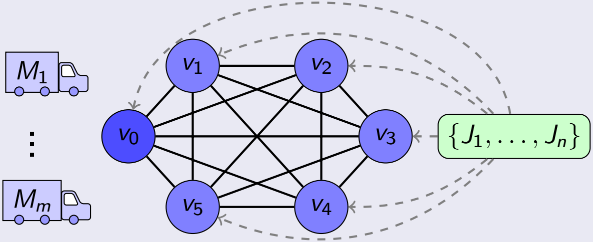
$$ROm|\text{j}\text{--}\text{prpt}, G = X|R_{\max}$$

Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, G = X|R_{\max}$ $ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\text{j-prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|\text{j-prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

$\overrightarrow{R}Om|\text{j-prpt}, G = X|R_{\max}$

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Нижняя оценка для задачи $RO2|Rtt|R_{max}$

$$\bar{R} = \max\Big\{\max_i(\ell_i + T_i^*),\\ \max_{v \in V}\left(d_{max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)\right)\Big\}$$

Локализация оптимумов

Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R^*_{\max}(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

Problem	Opt. loc.	Problem with Qtt/Rtt	Opt. loc.
$RO2\|G = K_2\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = K_2, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|G = K_3\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = K_3, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|G = tree\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = tree, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_2\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_2, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_3\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_3, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2\|j\text{-}prpt, G = tree\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2\|j\text{-}prpt, G = tree, Rtt\|R_{\max}$	?

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j - prpt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Теорема 2

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j\mathrm{-prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на цепи. Независимые времена перемещения

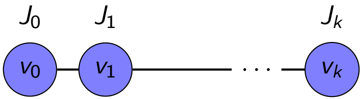
Теорема 1

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на цепи. Независимые времена перемещения

Теорема 1

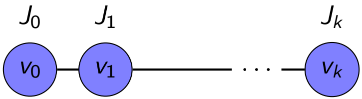
Пусть I — пример задачи $RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.



Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на цепи. Независимые времена перемещения

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.

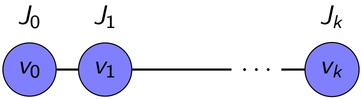


- T_i - длина цепи для машины M_i

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на цепи. Независимые времена перемещения

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.

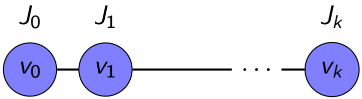


- T_i - длина цепи для машины M_i
- $T_i^* = 2T_i$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на цепи. Независимые времена перемещения

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.



- T_i - длина цепи для машины M_i
- $T_i^* = 2T_i$
- Так как задача с соразмерными длительностями: $d_j = 2p_j$

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_1:
Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_1:
Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_1:
Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \le \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.
- Обозначим длительность конфликтной работы d_{c1}. Тогда $R_{\max}(S_1) \le \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c1}$

$RO2|j-prpt, Rtt, G=chain|R_{\max}$

Расписание S_1:
Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \le \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.
- Обозначим длительность конфликтной работы d_{c1}. Тогда $R_{\max}(S_1) \le \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c1}$

Если $d_{c1} \le \frac{2}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_1) \le \frac{6}{5}\bar{R}$ и условия теоремы выполняются.
Далее будем предполагать, что $d_{c1} > \frac{2}{5}\bar{R}$.

$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_2:
Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1}, работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1}, затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.

$RO2|j-prpt, Rtt, G=chain|R_{\max}$

Расписание S_2:
Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1}, работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1}, затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \le \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1}, то $R_{\max}(S_2) \le \bar{R}$.

$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_2:
Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1}, работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1}, затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1}, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт в J_{c2}, отличной от J_{c1}. Тогда $R_{\max}(S_2) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c2}$

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

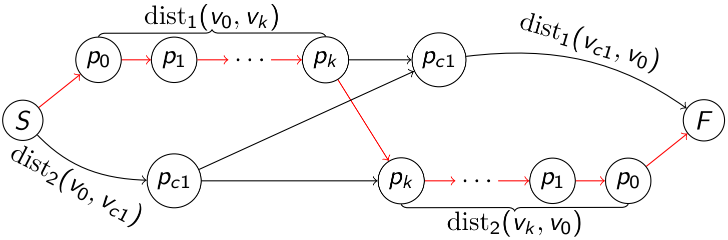
Расписание S_2:
Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1}, работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1}, затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1}, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт в J_{c2}, отличной от J_{c1}. Тогда $R_{\max}(S_2) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c2}$

Если $d_{c2} \leq \frac{2}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_1) \leq \frac{6}{5}\bar{R}$ и условия теоремы выполняются.
Далее будем предполагать, что $d_{c2} > \frac{2}{5}\bar{R}$.
При необходимости переобозначим работы так, чтобы J_{c1} находилась левее на цепочке, чем J_{c2}.

$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_3:



Предполагаем, что $R_{\max}(S_3) \geq \bar{R}$, тогда

$$R_{\max}(S_3) = \sum_{j \in \mathcal{J} \setminus \{J_{c1}\}} d_j + T_1 + T_2 = \Delta - d_{c1} + T_1 + T_2$$

Из определения нижней оценки: $\Delta \leq 2\bar{R} - T_1^* - T_2^*$, следовательно

$$R_{\max}(S_3) \leq 2\bar{R} - (d_{c1} + T_1 + T_2)$$

$RO2|j-prpt, Rtt, G=chain|R_{\max}$

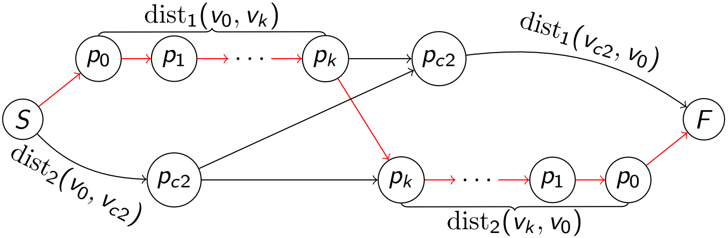
Расписание S_3:

$$R_{\max}(S_3) \le 2\bar{R} - (d_{c1} + T_1 + T_2)$$

Если $d_{c1} + T_1 + T_2 > \frac{4}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_3) \le \frac{6}{5}\bar{R}$ и условие теоремы выполнено.
Далее будем предполагать, что $d_{c1} + T_1 + T_2 \le \frac{4}{5}\bar{R}$.

$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Аналогично строим **расписание** S_4:



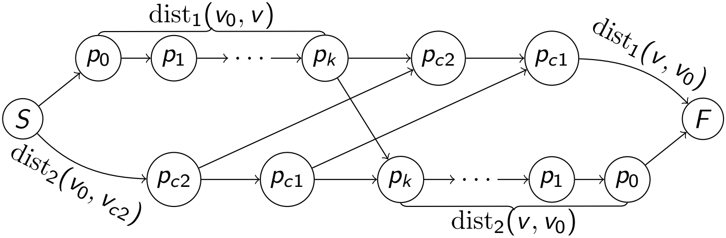
$$R_{\max}(S_4) \le \sum_{j \in \mathcal{J} \setminus \{J_{c2}\}} d_j + T_1 + T_2$$

Если $d_{c2} + T_1 + T_2 > \frac{4}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_4) \le \frac{6}{5}\bar{R}$ и условие теоремы выполнено.

Далее будем предполагать, что $d_{c2} + T_1 + T_2 \le \frac{4}{5}\bar{R}$.

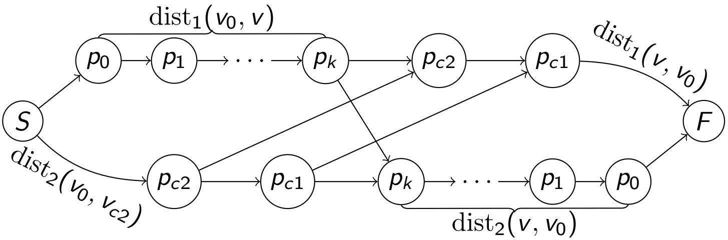
$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Расписание S_5:



$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{max}$

Расписание S_5:



Критические пути:

$$R_{51} \le \Delta - d_{c1} - d_{c2} + T_1 + T_2 \le 2\bar{R} - \frac{2}{5}\bar{R} - \frac{2}{5}\bar{R} \le \frac{6}{5}\bar{R}$$

$$R_{52} \le 2p_{c2} + p_{c1} + dist_1(v_0, v_{c2}) + dist_2(v_0, v_{c2})$$

$$R_{53} \le p_{c2} + 2p_{c1} + dist_1(v_0, v_{c1}) + dist_2(v_0, v_{c1}) + 2dist_2(v_{c1}, v_{c2})$$

$$R_{54} \le l + T_2^* + 2dist_2(v_{c1}, v_{c2})$$

$RO2|j-prpt, Rtt, G=chain|R_{\max}$

Пусть $R_{\max}(S_5) = R_{52}$.

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Пусть $R_{\max}(S_5) = R_{52}$.
Обозначим $R = \min\{R_{\max}(S_4), R_{\max}(S_5)\}$. Тогда

$$2R \le R_{\max}(S_4)+R_{\max}(S_5) \le 2p_{c2}+p_{c1}+T_1+T_2+\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\{J_{c2}\}} d_j+T_1+T_2 \le$$

$$\le 2\bar{R} + \frac{2}{5}\bar{R}$$

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Пусть $R_{\max}(S_5) = R_{52}$.
Обозначим $R = \min\{R_{\max}(S_4), R_{\max}(S_5)\}$. Тогда

$$2R \leq R_{\max}(S_4)+R_{\max}(S_5) \leq 2p_{c2}+p_{c1}+T_1+T_2+\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\{J_{c2}\}} d_j+T_1+T_2 \leq$$

$$\leq 2\bar{R}+\frac{2}{5}\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{6}{5}\bar{R}$.

$RO2|j-prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Пусть $R_{\max}(S_5) = R_{52}$.
Обозначим $R = \min\{R_{\max}(S_4), R_{\max}(S_5)\}$. Тогда

$$2R \leq R_{\max}(S_4)+R_{\max}(S_5) \leq 2p_{c2}+p_{c1}+T_1+T_2+\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\{J_{c2}\}} d_j+T_1+T_2 \leq$$

$$\leq 2\bar{R} + \frac{2}{5}\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{6}{5}\bar{R}$.

Аналогичные рассуждения для $R_{\max}(S_5) = R_{53}$ и $R_{\max}(S_5) = R_{54}$ требуют построения ещё двух расписаний S_6 и S_7.

Дальнейшие планы

- Найти пример, на котором оценка $\frac{6}{5}\bar{R}$ достигается, или улучшить оценку алгоритма до $\frac{7}{6}\bar{R}$.
- Сократить количество необходимых схем расписаний
- Адаптировать алгоритм для задачи на дереве

Спасибо за внимание!