

О двухмашинной соразмерной задаче open shop с маршрутизацией

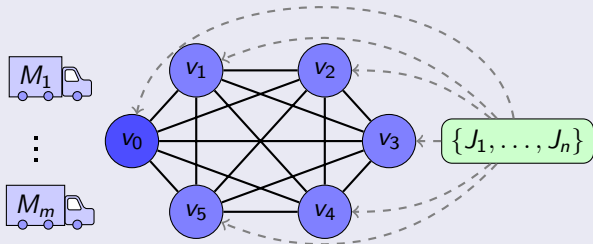
Кривоногова О.С.

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”

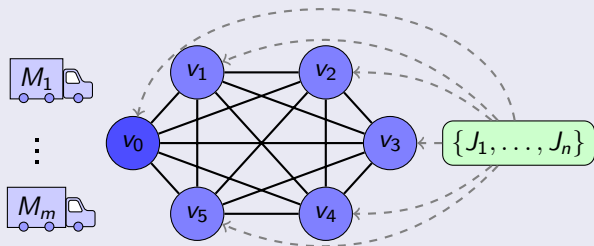
19.04.2025

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 22-71-10015

Задача Open shop с маршрутизацией

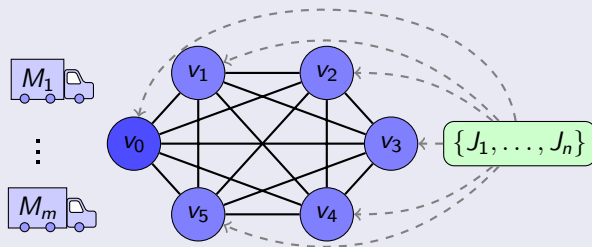


Задача Open shop с маршрутизацией



$RO2|j\text{-prpt}, G = tree, R_{tt}|R_{\max}$

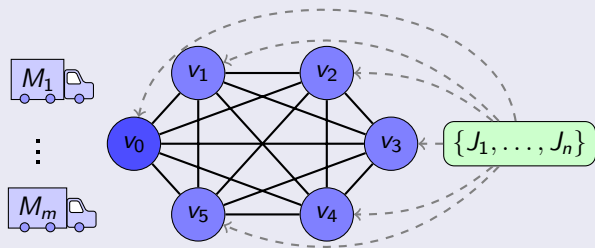
Задача Open shop с маршрутизацией



$RO2|j\text{-prpt}, G = \text{tree}, R_{tt}|R_{\max}$

Соразмерная задача: $p_{ij} = p_j$

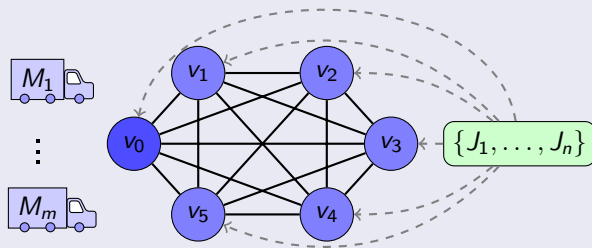
Задача Open shop с маршрутизацией



$RO2|j\text{--}prpt, G = \text{tree}, R_{tt}|R_{\max}$

Структура транспортной сети G – дерево

Задача Open shop с маршрутизацией



$$RO2|j\text{-prpt}, G = \text{tree}, \textcolor{red}{R_{tt}}|R_{\max}$$

Независимые времена перемещения для каждой машины

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка для задачи $RO2|Rtt|R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \max_i (\ell_i + T_i^*), \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)) \right\}$$

- ℓ_i – нагрузка машины M_i
- T_i^* – длина кратчайшего обхода для машины M_i
- $d_{\max}(v)$ – максимальная длина работы из вершины v
- $dist_i(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j на машине M_i

Локализация оптимумов

Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R_{\max}^*(I) \in [\bar{R}, \rho \bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

Problem	Opt. loc.	Problem with Qtt/Rtt	Opt. loc.
$RO2 G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2 G = tree, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = K_2 R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = K_2, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = chain R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = chain, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = tree, Rtt R_{\max}$	?

$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S , длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$.

$$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_1 :

Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

$$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_1 :

Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.

$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_1 :

Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.
- Обозначим длительность конфликтной работы d_{c1} . Тогда $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c1}$

$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_1 :

Машина M_1 начинает с базы и выполняет работы по порядку, машина M_2 едет в конец цепочки и выполняет работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\}$.
- Обозначим длительность конфликтной работы d_{c1} . Тогда $R_{\max}(S_1) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c1}$

Если $d_{c1} \leq \frac{2}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_1) \leq \frac{6}{5}\bar{R}$ и условия теоремы выполняются. Далее будем предполагать, что $d_{c1} > \frac{2}{5}\bar{R}$.

$$RO2|j - prpt, Rtt, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_2 :

Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1} , работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1} , затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.

$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_2 :

Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1} , работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1} , затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1} , то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.

$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_2 :

Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1} , работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1} , затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1} , то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт в J_{c2} , отличной от J_{c1} . Тогда $R_{\max}(S_2) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c2}$

$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = chain|R_{\max}$$

Расписание S_2 :

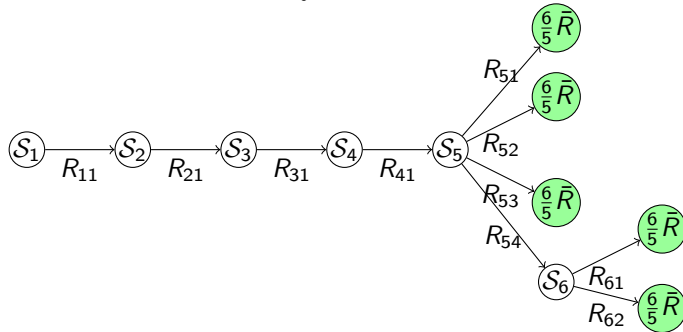
Машина M_2 начинает с базы и выполняет работы по порядку, пропуская работу J_{c1} , работу J_{c1} выполняет в обратном направлении. Машина M_1 едет в конец цепочки, выполняя работу J_{c1} , затем выполняет остальные работы в обратном направлении.

- Если конфликта не возникло, то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт снова в J_{c1} , то $R_{\max}(S_2) \leq \bar{R}$.
- Если конфликт в J_{c2} , отличной от J_{c1} . Тогда $R_{\max}(S_2) \leq \ell + \max\{T_1^*, T_2^*\} + p_{c2}$

Если $d_{c2} \leq \frac{2}{5}\bar{R}$, то $R_{\max}(S_1) \leq \frac{6}{5}\bar{R}$ и условия теоремы выполняются. Далее будем предполагать, что $d_{c2} > \frac{2}{5}\bar{R}$.

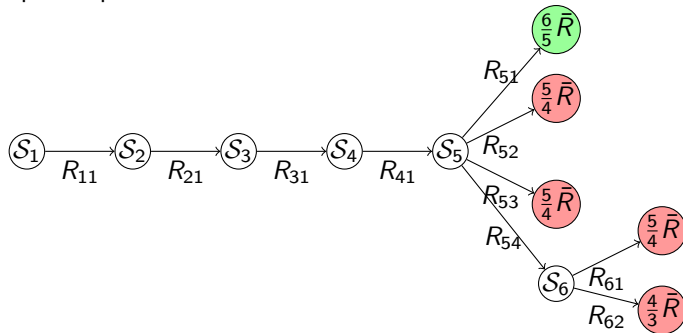
Дерево доказательства

$\mathcal{S}_i$ - схема расписания, R_{ij} - критический путь расписания $\mathcal{S}_i$



$$RO2|j - prpt, R_{tt}, G = tree|R_{\max}$$

Дерево доказательства для задачи на цепочки, в случае транспортной сети $G = tree$:



$$RO2|j - prpt, Rtt, G = tree|R_{\max}$$

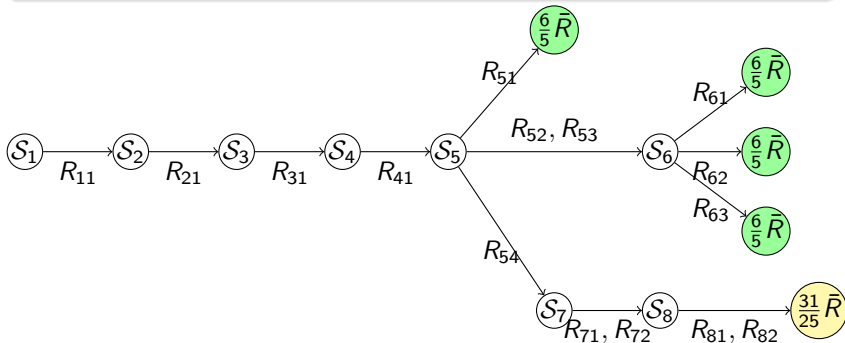
Теорема 2

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S , длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{31}{25}\bar{R}]$.

$$RO2|j - prpt, Rtt, G = tree|R_{\max}$$

Теорема 2

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S , длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{31}{25}\bar{R}]$.



Заключение

Problem	Opt. loc.	Problem with Qtt/Rtt	Opt. loc.
$RO2 G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2 G = tree, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = K_2 R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = K_2, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = chain R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = chain, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$
$RO2 j\text{-}prpt, G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j\text{-}prpt, G = tree, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 31/25\bar{R}]$

- Полученная "некрасивая" оценка $\frac{31}{25}\bar{R}$ для задачи на дереве лучше, чем оценка $\frac{5}{4}\bar{R}$ в случае произвольных длительностей операций
- Оценки неточные: примеры, на которых бы достигались оценки $\frac{6}{5}\bar{R}$ для задачи на цепочке и $\frac{31}{25}$ для задачи на дереве пока не найдены.

Спасибо за внимание!