

# Приближенные алгоритмы решения соразмерной задачи open shop с маршрутизацией с независимыми временами перемещения

Кривоногова О.С.

Институт математики им. С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”

04.05.2024

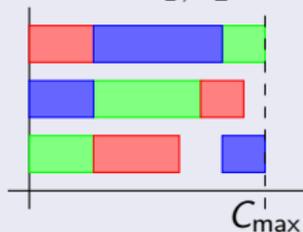
Исследование выполнено при поддержке гранта РФФ № 22-71-10015

# Задача Open shop

Open Shop( $O_m || C_{\max}$ )

Машины:  $M_1, M_2 \dots M_m$

Работы:  $J_1, J_2 \dots J_n$



- $O2 || C_{\max}$  полиномиально разрешима (Gonzalez, Sahni 1976)
- $O3 || C_{\max}$  NP-трудна (в сильном ли смысле?) (Gonzalez, Sahni 1976)

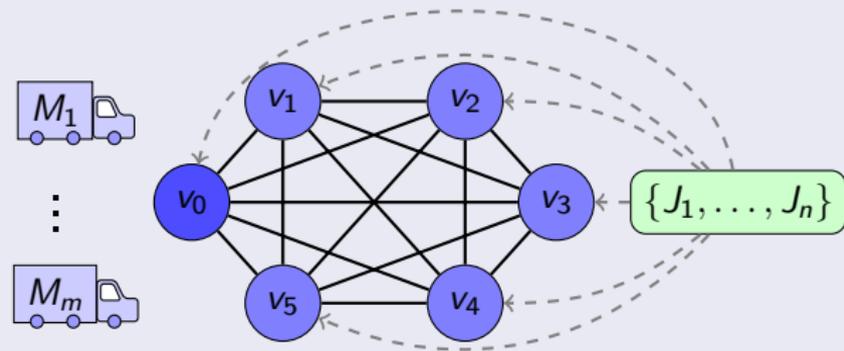
# Соразмерная задача Open Shop

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$\dots$	$J_n$
$M_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$\dots$	$p_{1n}$
$M_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$\dots$	$p_{2n}$
$M_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$\dots$	$p_{3n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$M_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$p_{m3}$	$\dots$	$p_{mn}$

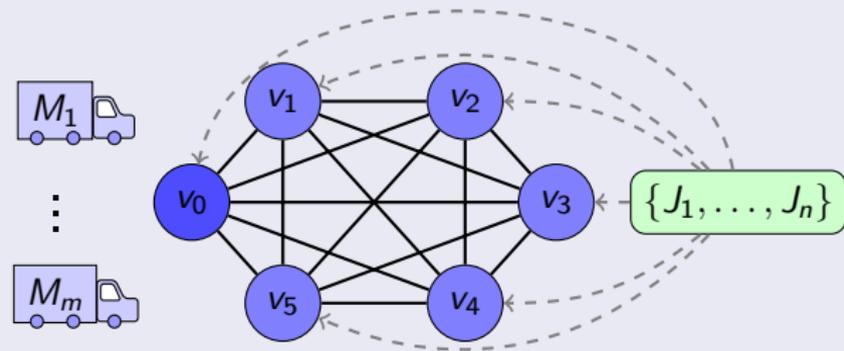
Для соразмерной задачи Open Shop ( $Om|j\text{-prpt}|C_{\max}$ ):  $p_{ij} = p_j$

- NP-трудность задачи  $O3|j\text{-prpt}|C_{\max}$  (Lui, Bulfin 1987)
- Псевдополиномиальный алгоритм решения задачи  $O3|j\text{-prpt}|C_{\max}$  (Sevastyanov 2019)

# Задача Open shop с маршрутизацией

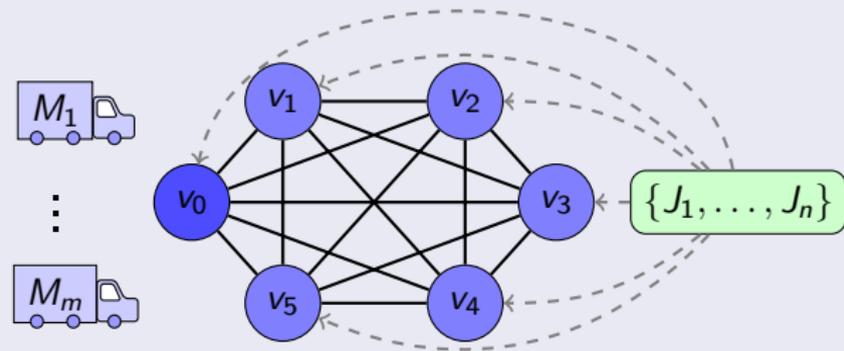


# Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|j\text{-prpt}, G = X|R_{\max}$

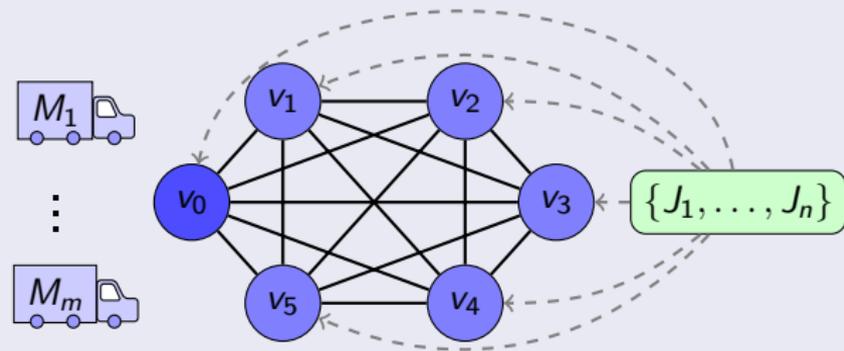
# Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|j\text{-prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|j\text{-prpt}, R_{tt}, G = X|R_{\max}$

# Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|j\text{-prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|j\text{-prpt}, R_{tt}, G = X|R_{\max}$

$\vec{R} Om|j\text{-prpt}, G = X|R_{\max}$

# Стандартная нижняя оценка

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	...	$J_n$	
$M_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	...	$p_{1n}$	$l_1$
$M_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	...	$p_{2n}$	$l_2$
$M_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	...	$p_{3n}$	$l_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$M_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$p_{m3}$	...	$p_{mn}$	$l_m$
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	...	$d_n$	

# Стандартная нижняя оценка

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	...	$J_n$	
$M_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	...	$p_{1n}$	$l_1$
$M_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	...	$p_{2n}$	$l_2$
$M_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	...	$p_{3n}$	$l_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$M_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$p_{m3}$	...	$p_{mn}$	$l_m$
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	...	$d_n$	

Нижняя оценка для задачи  $Om \parallel C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$$

## Стандартная нижняя оценка

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$\dots$	$J_n$	
$M_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$\dots$	$p_{1n}$	$l_1$
$M_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$\dots$	$p_{2n}$	$l_2$
$M_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$\dots$	$p_{3n}$	$l_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$M_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$p_{m3}$	$\dots$	$p_{mn}$	$l_m$
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\dots$	$d_n$	

Нижняя оценка для задачи  $Om \parallel C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$$

Нижняя оценка для задачи  $ROm \parallel R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{l_{\max} + T^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2 \text{dist}(v_0, v))\}$$

где  $\text{dist}(v_i, v_j)$  – время перемещения между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ .

## Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка  $ROM || R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где  $dist(v_i, v_j)$  – время перемещения между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ .

## Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка  $ROm || R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где  $dist(v_i, v_j)$  – время перемещения между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ .

Нижняя оценка для задачи  $RO2 | Rtt | R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{ \max_i(\ell_i + T_i^*), \right. \\ \left. \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)) \right\}$$

# Локализация оптимумов

## Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра  $\rho$  такое, что  $\forall I$  выполняется  $R_{\max}^*(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$ , а также в описании примера, на котором оценка достигается.

Problem	Opt. loc.	Problem with $Qtt/Rtt$	Opt. loc.
$RO2 G = K_2 R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2 G = K_2, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2 G = K_3 R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2 G = K_3, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2 G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2 G = tree, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2 j-prpt, G = K_2 R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j-prpt, G = K_2, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 j-prpt, G = K_3 R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j-prpt, G = K_3, Rtt R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 j-prpt, G = tree R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 j-prpt, G = tree, Rtt R_{\max}$	?

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

## Теорема 1

Пусть  $I$  — пример задачи  $\vec{R} O2|j - prpt, G = tree|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

## Теорема 1

Пусть  $I$  — пример задачи  $\vec{R} O2|j - prpt, G = tree|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

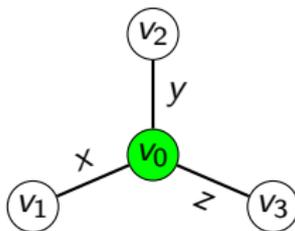
## Теорема 2

Пусть  $I$  — пример задачи  $\vec{R} O2|j - prpt, Rtt, G = tree|R_{\max}$ , удовлетворяющий условию:

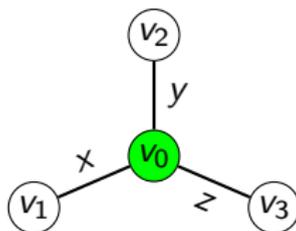
$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



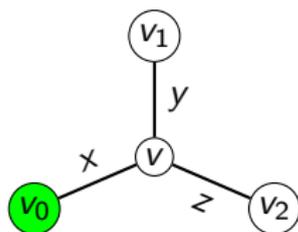
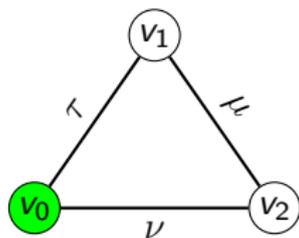
# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



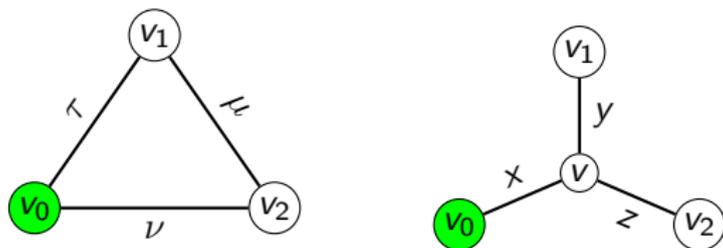
## Теорема

Пусть  $I$  — пример задачи  $RO2|j - prpt, Rtt, G = S_3|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения



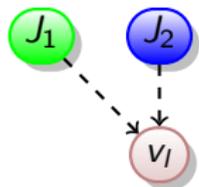
# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения



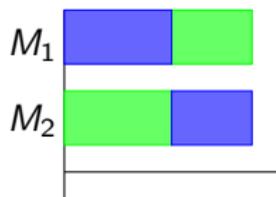
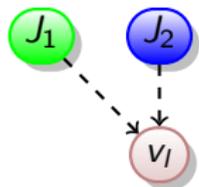
## Теорема

Пусть  $I$  — пример задачи  $RO2|j - prpt, Rtt, G = K_3|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

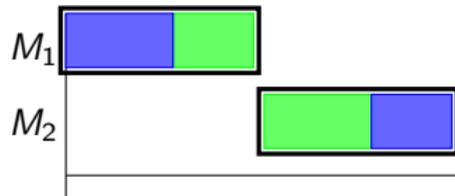
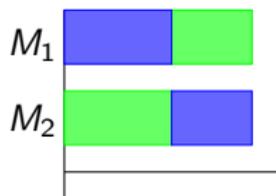
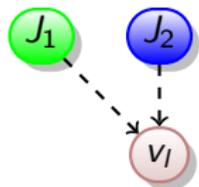
# Склеивание работ



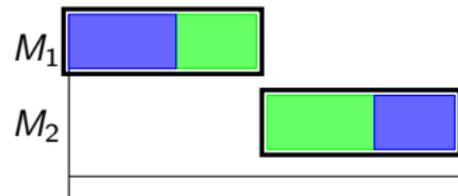
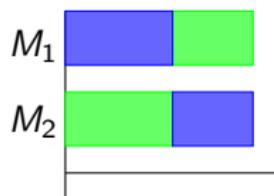
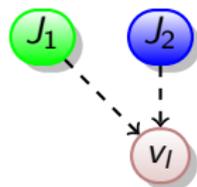
# Склеивание работ



# Склеивание работ



# Склеивание работ

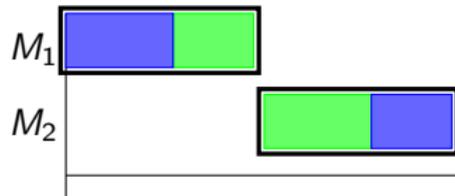
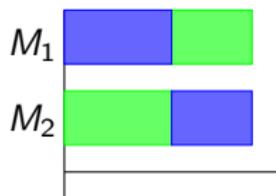
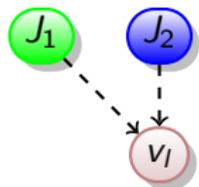


## Определение

Вершина  $v$  называется **перегруженной**, если

$$\Delta(v) > \bar{R}(I) - dist_1(v_0, v) - dist_2(v_0, v)$$

# Склеивание работ



## Определение

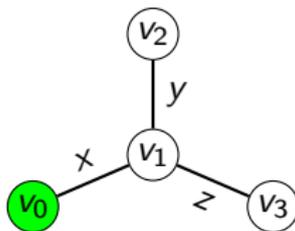
Вершина  $v$  называется **перегруженной**, если

$$\Delta(v) > \bar{R}(I) - dist_1(v_0, v) - dist_2(v_0, v)$$

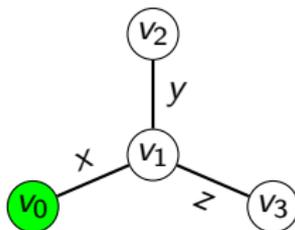
## Лемма

Пусть  $I$  — пример задачи  $\vec{R} O2 | R_{tt} | R_{\max}$ . Тогда  $G(I)$  содержит не более одной перегруженной вершины, в которой находится не более трёх работ.

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



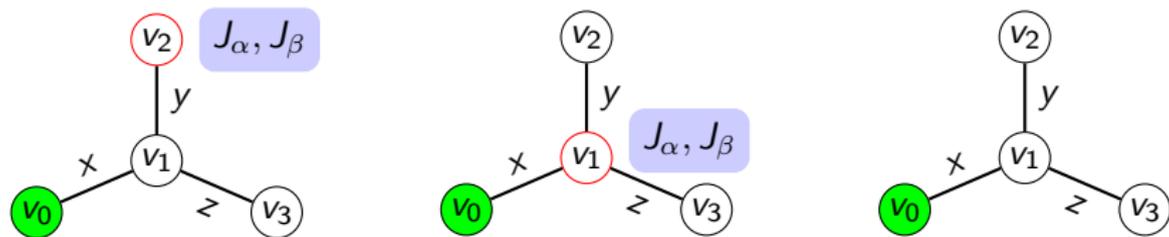
# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



## Теорема

Пусть  $I$  — пример задачи  $RO2|j - prpt, Rtt, G = S_3|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

# Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



## Теорема

Пусть  $I$  — пример задачи  $RO2|j - prpt, Rtt, G = S_3|R_{\max}$ . Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание  $S$ , длина которого принадлежит интервалу  $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ .

## Дальнейшие планы

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве с двумя машинами и независимыми временами перемещения  
( $RO2|j\text{-prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$ )

- Обобщение полученных алгоритмов для задачи на дереве с произвольным числом вершин
- Поиск контрпримера для задачи  $RO2|j\text{-prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$
- Нахождение интервалов локализации оптимумов для задач на звезде с большим числом вершин и/или на деревьях более сложной структуры