Задача open shop с маршрутизацией и тоннелями: вызовы и перспективы

Илья Черных

Институт математики им С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы
для задач составления расписаний”
26.10.2024

*Исследование выполнено за счёт гранта
Российского научного фонда №22-71-10015*

Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

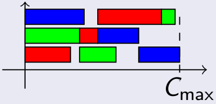
Open Shop ($Om||C_{max}$)...

Машины	$\boxed{M_1}$	$\cdots$	$\boxed{M_m}$
Работы	J_1	$\cdots$	J_n

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины M_1 $\cdots$ M_m

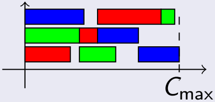
Работы J_1 $\cdots$ J_n



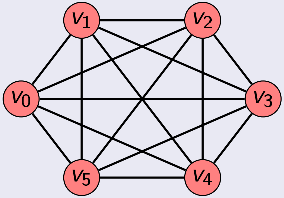
Open Shop ($Om||C_{\max}$)…

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n



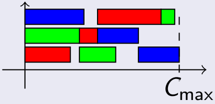
Задача коммивояжера…



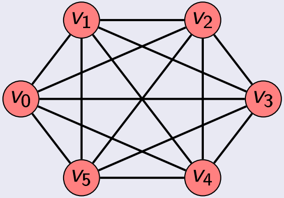
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

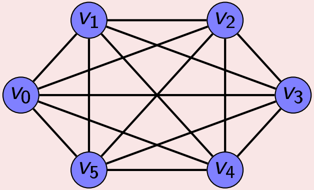
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



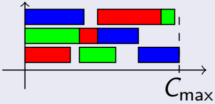
... их комбинация



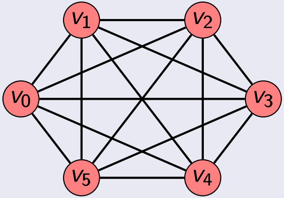
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

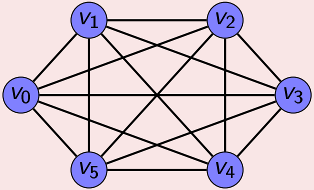
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



... их комбинация

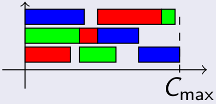


$\{J_1, \ldots, J_n\}$

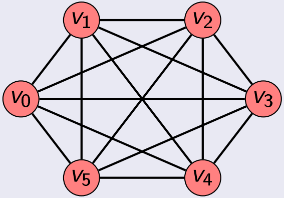
Open Shop $(Om||C_{\max})$...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

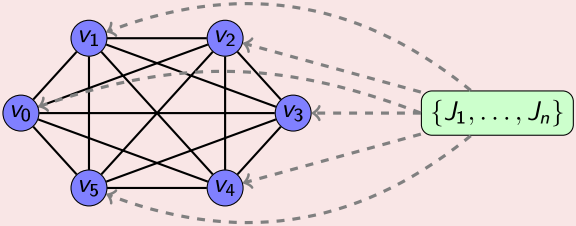
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



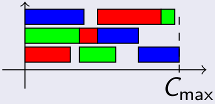
... их комбинация



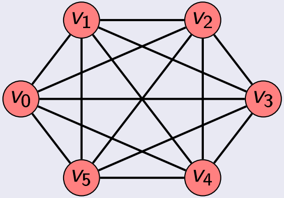
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...

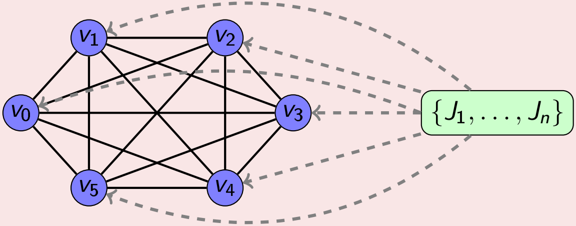


... их комбинация

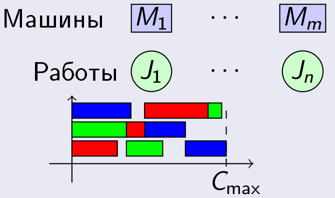
$\boxed{M_1}$

$\vdots$

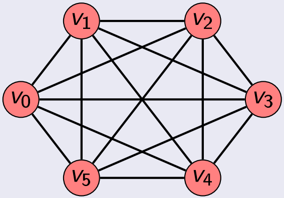
$\boxed{M_m}$



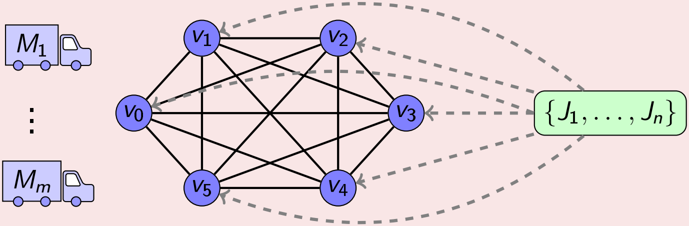
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...



Задача коммивояжера...



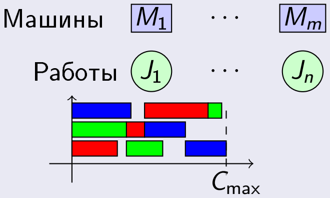
... их комбинация



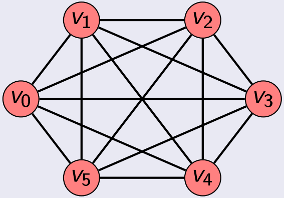
Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

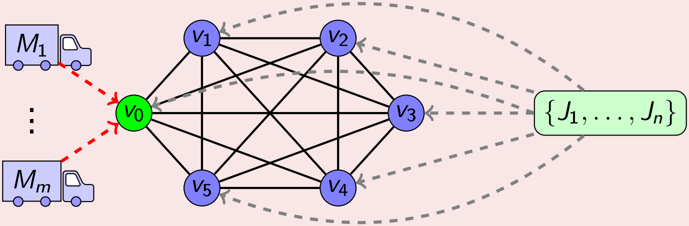
Open Shop ($Om||C_{max}$)...



Задача коммивояжера...



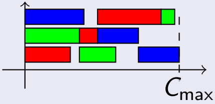
... их комбинация



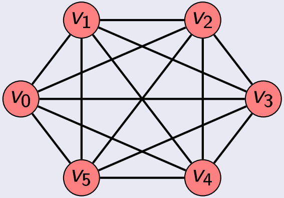
Open Shop ($Om||C_{\max}$)…

Машины M_1 $\cdots$ M_m

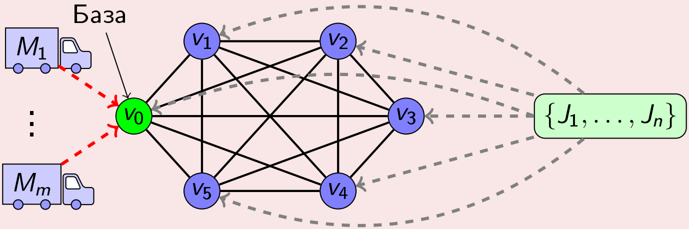
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера…



… их комбинация



Стандартная нижняя оценка

- $\ell_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ji}$ — нагрузка M_i, $d_j = \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ji}$ — длина J_j,
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max\limits_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — длина кратчайшего обхода графа G машиной M_i

Стандартная нижняя оценка

- $\ell_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}$ — нагрузка M_i, $d_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}$ — длина J_j,
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max\limits_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — длина кратчайшего обхода графа G машиной M_i

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$

Мини-обзор задачи $RO2||R_{\max}$

Сложность

- $RO2||R_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле
- $RO2|G = K_2|R_{\max}$ NP-трудна, существует FPTAS
- $RO2|G = K_2, j\text{-}prpt|R_{\max}$ NP-трудна

Мини-обзор задачи $RO2||R_{\max}$

Сложность

- $RO2||R_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле
- $RO2|G = K_2|R_{\max}$ NP-трудна, существует FPTAS
- $RO2|G = K_2, j\text{-}prpt|R_{\max}$ NP-трудна

Локализация оптимумов

Структура G	Оценка верхней границы интервала
$G = K_2$	$6/5\bar{R}$
$G = K_3$	$6/5\bar{R}$
$G = tree$	$6/5\bar{R}$
$G = C_4$	$5/4\bar{R}$
G произвольный	$\leqslant 4/3\bar{R}$

Мини-обзор задачи $RO2||R_{\max}$

Сложность

- $RO2||R_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле
- $RO2|G = K_2|R_{\max}$ NP-трудна, существует FPTAS
- $RO2|G = K_2, j\text{-}prpt|R_{\max}$ NP-трудна

Локализация оптимумов

Структура G	Оценка верхней границы интервала
$G = K_2$	$6/5\bar{R}$
$G = K_3$	$6/5\bar{R}$
$G = tree$	$6/5\bar{R}$
$G = C_4$	$5/4\bar{R}$
G произвольный	$\leqslant 4/3\bar{R}$

Приближенные алгоритмы

- 7/4-приближенный [Averbakh, Berman, Ch 2006]
- 13/8-приближенный [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013]
- 4/3-приближенный [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013]

Своевременное напоминание про TSP

Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф $G = \langle V; E \rangle$.
- Требуется: найти ГЦ минимального веса w^*.

Своевременное напоминание про TSP

Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф $G = \langle V; E \rangle$.
- Требуется: найти ГЦ минимального веса w^*.

Сложность TSP

- NP-трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

Своевременное напоминание про TSP

Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф $G = \langle V; E \rangle$.
- Требуется: найти ГЦ минимального веса w^*.

Сложность TSP

- NP-трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

1. Найти в G остов T минимального веса
2. Пусть $O = \{v \in V | \deg_T(v) \text{ нечётна}\}$. Построить на O паросочетание M наименьшего веса
3. Найти эйлеров цикл E в $T \cup M$
4. Искомый гамильтонов цикл σ обходит вершины в порядке, в котором они появляются в E первый раз

Своевременное напоминание про TSP

Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф $G = \langle V; E \rangle$.
- Требуется: найти ГЦ минимального веса w^*.

Сложность TSP

- NP-трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

1. Найти в G остов T минимального веса
2. Пусть $O = \{v \in V | \deg_T(v)$ нечётна$\}$. Построить на O паросочетание M наименьшего веса
3. Найти эйлеров цикл E в $T \cup M$
4. Искомый гамильтонов цикл σ обходит вершины в порядке, в котором они появляются в E первый раз

Теорема

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова является 3/2-приближённым для метрической TSP.

Своевременное напоминание про TSP

Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф $G = \langle V; E \rangle$.
- Требуется: найти ГЦ минимального веса w^*.

Сложность TSP

- NP-трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

1. Найти в G остов T минимального веса $(w(T) \leqslant w^*)$.
2. Пусть $O = \{v \in V |\, \deg_T(v)$ нечётна$\}$. Построить на O паросочетание M наименьшего веса $(w(M) \leqslant \frac{1}{2} w^*)$.
3. Найти эйлеров цикл E в $T \cup M$ $(w(E) = w(T) + w(M) \leqslant \frac{3}{2} w^*)$.
4. Искомый гамильтонов цикл σ обходит вершины в порядке, в котором они появляются в E первый раз $(w(\sigma) \leqslant w(E) \leqslant \frac{3}{2} w^*)$.

Теорема

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова является 3/2-приближённым для метрической TSP.

Вступление: задача сельского почтальона (RPP)

Дано:

- Взвешенный связный граф $G = \langle V; E \rangle$, $w(e)$ — вес ребра $e \in E$,
- $N \subseteq E$ — множество необходимых рёбер.

Требуется:

Найти замкнутый маршрут минимального веса и содержащий все рёбра из N.

Дано:

- Взвешенный связный граф $G = \langle V; E\rangle$, $w(e)$ — вес ребра $e \in E$,
- $N \subseteq E$ — множество необходимых рёбер.

Требуется:

Найти замкнутый маршрут минимального веса и содержащий все рёбра из N.

Замечания

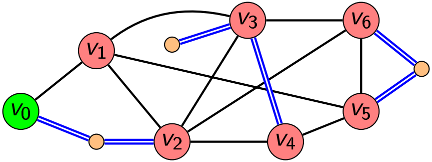
1. В случае $N = E$ задача называется задачей китайского почтальона и является полиномиально разрешимой.
2. В общем случае задача RPP NP-трудна в сильном смысле.
3. Можно всегда предполагать, что веса рёбер в RPP удовлетворяют неравенству треугольника.

3/2-приближённый алгоритм для *RPP*

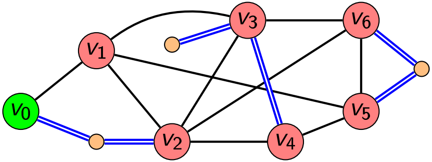
[Frederickson 1979]

1. Рассмотрим вспомогательный полный граф G', вершинами которого являются компоненты связности в графе $G(N)$, а расстояния между вершинами определяются длинами кратчайших цепей, соединяющих эти компоненты в G.
2. Найти в G' остовное дерево T' минимального веса. Построить граф $G'' = T' \cup N$.
3. Пусть O — множество вершин нечётной степени в G''. Построим на них паросочетание минимального веса M.
4. Искомый маршрут — эйлеров обход графа $G'' \cup M$.

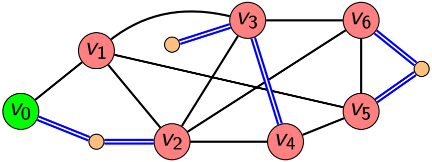
Задача с тоннелями $\overline{\overline{R}}O||R_{\max}$



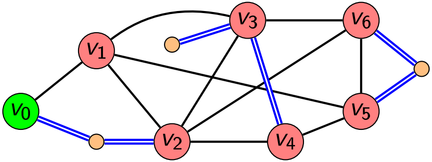
Задача с тоннелями $\overline{\overline{R}}O||R_{max}$



- v_0 — база.

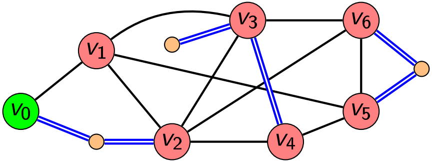


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).



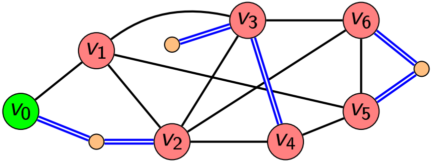
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.

Задача с тоннелями $\overline{\overline{R}}O||R_{\max}$

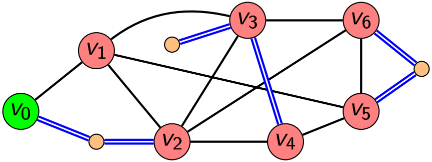


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:

Задача с тоннелями $\overline{\overline{R}}O||R_{\max}$

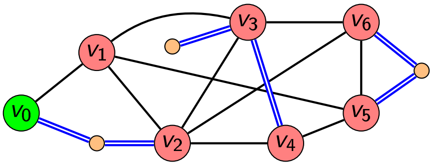


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).



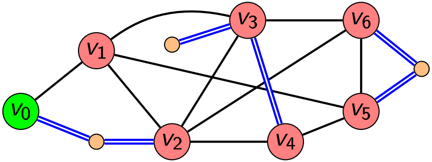
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).

Задача с тоннелями $\overline{\overline{R}}O||R_{max}$

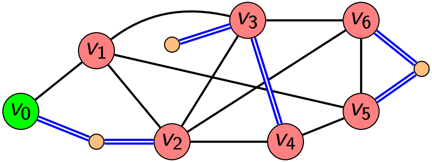


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по тоннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном тоннеле.

Задача с тоннелями $\overline{RO}||R_{\max}$



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по тоннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном тоннеле.
  - Машина выполняет операцию в тоннеле в процессе перемещения.



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по тоннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном тоннеле.
  - Машина выполняет операцию в тоннеле в процессе перемещения.
- Требуется выполнить все работы и вернуться на базу ASAP.

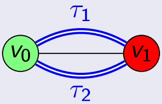
Связь между задачами $RO2||R_{\max}$ и $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$

1. $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$ — обобщение задачи $RO2||R_{\max}$.

Связь между задачами $RO2||R_{\max}$ и $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$

1. $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$ — обобщение задачи $RO2||R_{\max}$.
2. Сведение с сохранением нижней оценки:

Теорема

Любой пример задачи $RO2||R_{\max}$ можно свести к примеру задачи $\overline{\overline{RO}}2|G = \mathcal{P}+|R_{\max}$ с сохранением стандартной нижней оценки, где структура $\mathcal{P}+$ имеет вид 

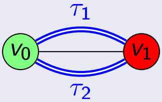
с одной работой в v_0 и не более тремя в v_1.

Связь между задачами $RO2||R_{\max}$ и $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$

1. $\overline{\overline{RO}}2||R_{\max}$ — обобщение задачи $RO2||R_{\max}$.
2. Сведение с сохранением нижней оценки:

Теорема

Любой пример задачи $RO2||R_{\max}$ можно свести к примеру задачи $\overline{\overline{RO}}2|G = \mathcal{P}+|R_{\max}$ с сохранением стандартной нижней оценки, где структура $\mathcal{P}+$ имеет вид



с одной работой в v_0 и не более тремя в v_1.

Локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$

Структура G	Оценка верхней границы интервала
$G = K_2$	$6/5\bar{R}$
$G = K_3$	$6/5\bar{R}$
$G = tree$	$6/5\bar{R}$
$G = C_4$	$5/4\bar{R}$
G произвольный	$\leqslant 4/3\bar{R}$

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

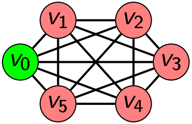
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

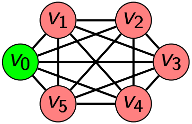
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$

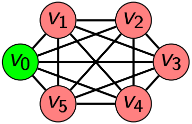


Задача комивояжера

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$

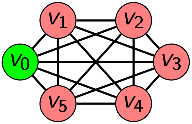


Задача коммивояжера

T^* — длина кратчайшего обхода в TSP.

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{ \ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v \in V} \Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v) \Big) \right\}$$

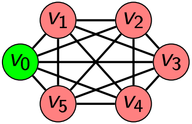


Задача коммивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.

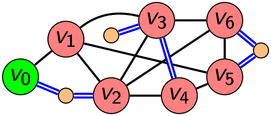
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v \in V}\Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\Big)\right\}$$



Задача комивояжера

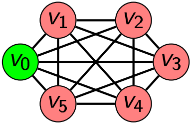
T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.



Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

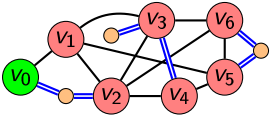
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



Задача комивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.

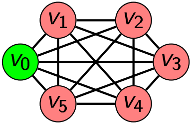


Задача деревенского почтальона

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

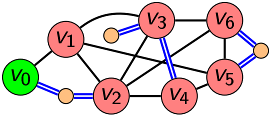
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



Задача комивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.



Задача деревенского почтальона

T^*_{RPP} — длина кратчайшего обхода в RPP.

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество тоннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество тоннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

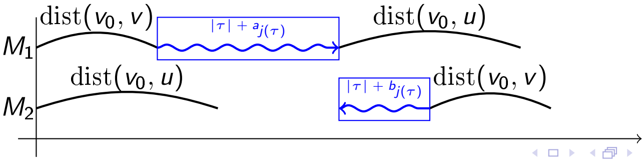
$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right), \\ \max_{\tau \in \mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$

Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество тоннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$
$$\max_{\tau \in \mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$

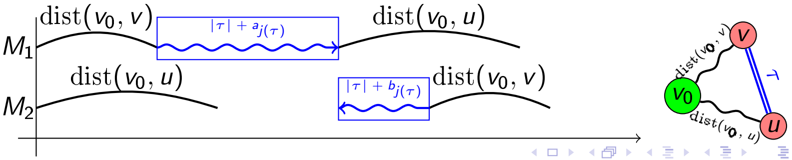


Стандартная нижняя оценка для задачи с тоннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество тоннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{ \ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V} \left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right), \max_{\tau \in \mathcal{T}} \left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right) \Big\}.$$

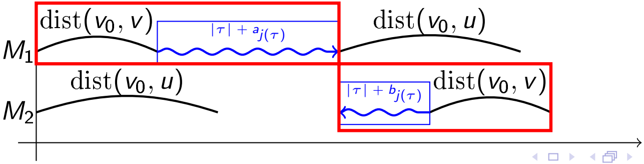


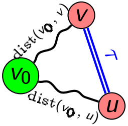
Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество тоннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$

$$\max_{\tau \in \mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$





Приближённый алгоритм для $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$

Теорема 1

Для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ существует 2-приближённый алгоритм.

Приближённый алгоритм для $\overline{\overline{R}}O2||R_{max}$

Теорема 1

Для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{max}$ существует 2-приближённый алгоритм.

Идея алгоритма

1. Найти $\frac{3}{2}$-приближённое решение для задачи деревенского почтальона. Занумеровать работы в соответствии с этим решением.
2. Машина M_1 выполняет работы в порядке этой нумерации, а M_2 в обратном порядке.
3. В случае конфликта рассмотреть два возможных способа его разрешения, выбрать лучший.

Алгоритм A в деталях

1. Пусть σ — приближённое решение задачи RPP алгоритмом Фредериксона. Обозначим через D некоторый порядок работ, согласованный с σ, а через D^{-1} — противоположный порядок.
2. Строим расписание S, в котором машина M_1 выполняет работы без простоев в порядке D, а машина M_2 — в порядке D^{-1}. Если S является допустимым — выводим его и останавливаем алгоритм. Иначе переходим на следующий шаг.
3. Назовём конфликтной работу, выполнение которой в S нарушает допустимость. С учётом выбора порядков D и D^{-1} такая работа единственная, обозначим её через J_c.
4. Построим два допустимых расписания:
   - S_1: машина M_1 выполняет операции в точности как в S, машина M_2 выполняет в порядке D^{-1}, но простаивает перед началом операции работы J_c до окончания обработки её машиной M_1. Далее продолжает без простоев.
   - S_1: машина M_2 выполняет операции в точности как в S, машина M_1 выполняет в порядке D, но простаивает перед началом операции работы J_c до окончания обработки её машиной M_2. Далее продолжает без простоев.
5. Выводим лучшее из двух расписаний S_1 и S_2.

Свойство алгоритма

Лемма

Пусть S_A — расписание, построенное алгоритмом A. Тогда

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau. \end{cases}$$

Свойство алгоритма

Лемма

Пусть S_A — расписание, построенное алгоритмом A. Тогда

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \dfrac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \dfrac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau. \end{cases}$$

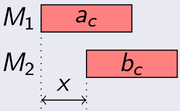
Доказательство

Случай 1: конфликта не было. Тогда машины работают без простоев и $R_{\max} = \ell_{\max} + w(\sigma) \leqslant \ell_{\max} + \frac{3}{2} T^*_{RPP}$.

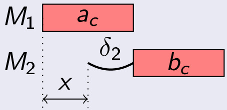
Свойство алгоритма (продолжение)

Доказательство

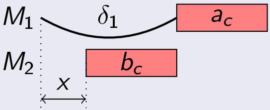
Случай 2. Конфликтная работа в вершине v.



Фрагмент расписания S



Фрагмент расписания S_1



Фрагмент расписания S_2

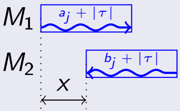
$$R_{\max}(S_1) \leqslant \ell_2 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \delta_2 = \ell_2 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + a_c - x,$$

$$R_{\max}(S_2) \leqslant \ell_1 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \delta_1 = \ell_1 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + b_c + x,$$

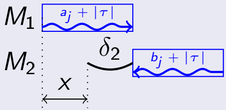
$$\min\{R_{\max}(S_1), R_{\max}(S_2)\} \leqslant \frac{1}{2}(R_{\max}(S_1) + R_{\max}(S_2)) \leqslant \ell_{\max} + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \frac{d_c}{2}.$$

Доказательство

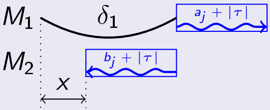
Случай 3. Конфликтная работа в тоннеле τ.



Фрагмент расписания S



Фрагмент расписания S_1



Фрагмент расписания S_2

$$R_{\max}(S_1) \leqslant \ell_2 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \delta_2 = \ell_2 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + a_c + |\tau| - x,$$

$$R_{\max}(S_2) \leqslant \ell_1 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \delta_1 = \ell_1 + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + b_c + |\tau| + x,$$

$$\min\{R_{\max}(S_1), R_{\max}(S_2)\} \leqslant \ell_{\max} + \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \frac{d_c}{2} + |\tau|.$$

Доказательство 2-приближённости

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$
$$\max_{\tau\in\mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau)\right)\Big\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,}\\ \dfrac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v,\\ \dfrac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau.\end{cases}$$

Доказательство 2-приближённости

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$
$$\max_{\tau\in\mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau)\right)\Big\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,}\\ \dfrac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v,\\ \dfrac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau. \end{cases}$$

Случай 1. $R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max}$.

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} \leqslant \frac{3}{2}(T^*_{RPP} + \ell_{\max}) \leqslant \frac{3}{2}\overline{\overline{R}} \leqslant 2\overline{\overline{R}}.$$

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$
$$\max_{\tau\in\mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,}\\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v,\\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau.\end{cases}$$

Случай 2. $R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2.$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + 2\ell_{\max} \leqslant 2\overline{\overline{R}}.$$

Доказательство 2-приближённости

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$

$$\max_{\tau\in\mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \dfrac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \dfrac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в тоннеле } \tau. \end{cases}$$

Случай 3. $R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2 + |\tau|$.

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} + \frac{1}{2}T^*_{RPP} \leqslant 2\overline{\overline{R}}.$$

Попытка улучшить оценку точности

- Случай 1: 3/2.
- Случай 2: 2.
- Случай 3: 2.

Попытка улучшить оценку точности

- Случай 1: 3/2.
- Случай 2: 2.
- Случай 3: 2.

Случай 2:
Случай 2.1. $d_c \leqslant T^*_{RPP} + \ell_{\max}$.

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{T^*_{RPP} + \ell_{\max}}{2} = 2T^*_{RPP} + \frac{3}{2}\ell_{\max}$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + 2\ell_{\max}$$

Случай 2.2. $d_c > T^*_{RPP} + \ell_{\max} \geqslant T^*_{RPP} + \frac{1}{2} d_c$, следовательно $\frac{1}{2} d_c \geqslant T^*_{RPP}$:

$$R_{\max}(S_A) \leqslant (T^*_{RPP} + \ell_{\max}) + \frac{1}{2} T^*_{RPP} + \frac{d_c}{2} \leqslant d_c + \frac{3}{4} d_c \leqslant \frac{7}{4}\overline{\overline{R}}.$$

Попытка улучшить оценку точности

- Случай 1: $3/2$.
- Случай 2: $7/4$.
- Случай 3: 2.

Случай 2:

Случай 2.1. $d_c \leqslant T^*_{RPP} + \ell_{\max}$.

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{T^*_{RPP} + \ell_{\max}}{2} = 2\,T^*_{RPP} + \frac{3}{2}\ell_{\max}$$

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + 2\ell_{\max}$$

Случай 2.2. $d_c > T^*_{RPP} + \ell_{\max} \geqslant T^*_{RPP} + \frac{1}{2}d_c$, следовательно $\frac{1}{2}d_c \geqslant T^*_{RPP}$:

$$R_{\max}(S_A) \leqslant (T^*_{RPP} + \ell_{\max}) + \frac{1}{2} T^*_{RPP} + \frac{d_c}{2} \leqslant d_c + \frac{3}{4} d_c \leqslant \frac{7}{4} \overline{\overline{R}}.$$

Lifehack: нахождение оценки точности алгоритма

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c\}$$

Lifehack: нахождение оценки точности алгоритма

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c\}$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_c$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Lifehack: нахождение оценки точности алгоритма

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c\right\}$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_c$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1$
$c_1 \leqslant 2L$

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c\right\}$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_c$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1$
$c_1 \leqslant 2L$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 2L, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, \rho \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c\right\}$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_c$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1$
$c_1 \leqslant 2L$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 2L, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, \rho \geqslant 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение

$$L = \frac{1}{2},\ T = \frac{1}{2},\ c_1 = 1,\ \rho = \frac{7}{4}.$$

Lifehack: нахождение оценки точности алгоритма

$$\text{Случай 3: } R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_c/2 + |\tau|$$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, d_c + 2|\tau|\}$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_c$
$t_1 = |\tau|$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1$
$c_1 \leqslant 2L$
$2t_1 \leqslant T$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 2L, \\ 2t_1 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, \rho \geqslant 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение

$$L = 0,\ T = 1,\ c_1 = 0, t_1 = 1/2, \rho = 2.$$

Новый приближённый алгоритм для $RO2||R_{\max}$

Теорема 2

Для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ существует 23/12-приближённый алгоритм.

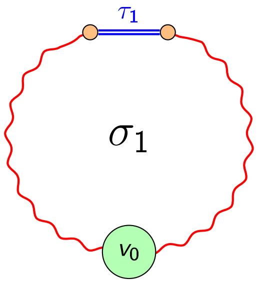
Доказательство

Шаг 1: Построим расписание S_A алгоритмом из Теоремы 1. Предполагаем, что конфликтная работа J_{c_1} находится в тоннеле τ_1

$$R_{\max}(S_A) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \frac{d_{c_1}}{2} + |\tau_1|$$

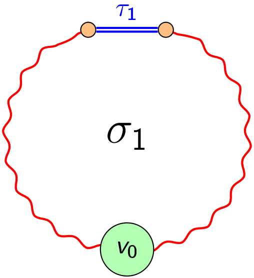
(случай 3, иначе оценка не хуже $\frac{7}{4}$).

Алгоритм в Теореме 1 опирался на приближенное решение σ_1 задачи *RPP*, построенное алгоритмом Фредериксона:

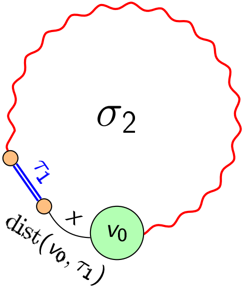


Идея построения второго расписания

Алгоритм в Теореме 1 опирался на приближенное решение σ_1 задачи *RPP*, построенное алгоритмом Фредериксона:



Хочется построить обход σ_2, который содержит "ребро", соответствующее расстоянию от v_0 до τ_1:



Построение обхода σ_2

Алгоритм Фредериксона

1. Рассмотрим вспомогательный полный граф G' на компонентах связности в графе $G(N)$.
2. Найти в G' остовное дерево T' минимального веса. Построить граф $G'' = T' \cup N$.
3. Пусть O — множество вершин нечётной степени в G''. Построим на них паросочетание минимального веса M.
4. Искомый маршрут — эйлеров обход графа $G'' \cup M$.

Построение обхода σ_2

Модификация алгоритм Фредериксона

1. Рассмотрим вспомогательный полный граф G' на компонентах связности в графе $G(N)$.
2. Найти в G' остовное дерево T' минимального веса. Построить граф $G'' = T' \cup N \cup \{x\}$.
3. Пусть O — множество вершин нечётной степени в G''. Построим на них паросочетание минимального веса M.
4. Искомый маршрут — эйлеров обход графа $G'' \cup M$.

Построение обхода σ_2

Модификация алгоритм Фредериксона

1. Рассмотрим вспомогательный полный граф G' на компонентах связности в графе $G(N)$.
2. Найти в G' остовное дерево T' минимального веса. Построить граф $G'' = T' \cup N \cup \{x\}$.
3. Пусть O — множество вершин нечётной степени в G''. Построим на них паросочетание минимального веса M.
4. Искомый маршрут — эйлеров обход графа $G'' \cup M$.

Утверждение

$$w(\sigma_2) \leqslant \frac{3}{2} w^* + w(x).$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

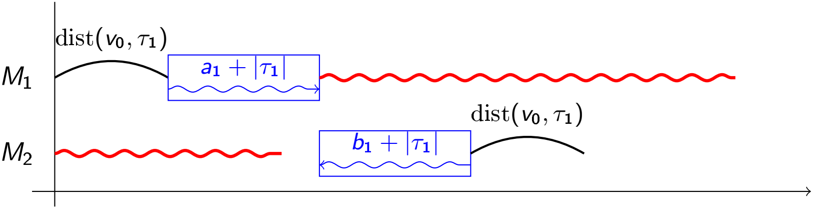
Шаг 2: Построить расписание S_B аналогично алгоритму A из Теоремы 1, только используя обход σ_2 вместо σ_1.

Лемма

Пусть S_B — расписание, построенное на Шаге 2. Тогда

$$R_{\max}(S_B) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \\ + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было} \\ & \text{или конфликт в } \tau_1, \\ d_{c_2}/2, & \text{если } J_{c_2} \text{ находится в вершине } v, \\ d_{c_2}/2 + |\tau_2|, & \text{если } J_{c_2} \text{ находится в тоннеле } \tau_2 \neq \tau_1. \end{cases}$$

Пояснение: конфликт опять в τ_1



$$C(M_1) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \ell_{\max}$$

$$C(M_2) = 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + d_{c_1} + 2|\tau_1| \leqslant \overline{\overline{R}}.$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

Случай 1: $$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1).$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$c_1 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

Случай 1: $R_{\max}(S_B) = \dfrac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1).$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$c_1 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 2L, \\ 2x + t_1 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2} T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2} T + L + x & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, t_1, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$\text{Случай 1: } R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1).$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$c_1 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

$$\rho^* = \frac{7}{4}$$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\ c_1 & \leqslant 2L, \\ 2x + t_1 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2} T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2} T + L + x & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, t_1, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2}.$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0,\tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2}.$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\ c2 & \leqslant 1, \\ c_1 + c_2 & \leqslant 2L, \\ 2x + t_1 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, c_2, t_1, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$\text{Случай 2: } R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2}.$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$

$$\rho^* = \frac{7}{4}$$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\ c2 & \leqslant 1, \\ c_1 + c_2 & \leqslant 2L, \\ 2x + t_1 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, c_2, t_1, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

Случай 3: $R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|.$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$t_2 = |\tau_2|$
$x = \mathrm{dist}(v_0,\tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2 + 2t_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$
$x + t_1 + t_2 \leqslant T$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

Случай 3: $$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|.$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$t_2 = |\tau_2|$
$x = \mathrm{dist}(v_0,\tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2 + 2t_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$
$x + t_1 + t_2 \leqslant T$

ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1,\\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1,\\ c2 + 2t_1 & \leqslant 1,\\ c_1 + c_2 & \leqslant 2L,\\ 2x + t_1 & \leqslant T,\\ x + t_1 + t_2 & \leqslant T,\\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho,\\ \frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} + t_2 & \geqslant \rho,\\ T, L, c_1, c_2, t_1, t_2, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

Случай 3: $$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|.$$

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$c_1 = d_{c_1}$
$c_2 = d_{c_2}$
$t_1 = |\tau_1|$
$t_2 = |\tau_2|$
$x = \mathrm{dist}(v_0,\tau_1)$
$LB = \overline{\overline{R}}$

Нижние оценки и дополнительные неравенства

$LB \geqslant T + L$
$LB \geqslant c_1 + 2t_1 + 2x$
$LB \geqslant c_2 + 2t_2$
$c_1 + c_2 \leqslant 2L$
$2x + t_1 \leqslant T$
$x + t_1 + t_2 \leqslant T$

$$\rho^* = 2$$

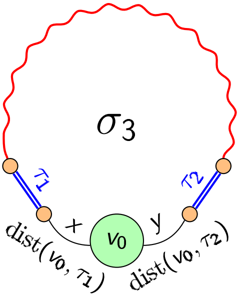
ЗЛП

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1,\\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1,\\ c2 + 2t_1 & \leqslant 1,\\ c_1 + c_2 & \leqslant 2L,\\ 2x + t_1 & \leqslant T,\\ x + t_1 + t_2 & \leqslant T,\\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho,\\ \frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} + t_2 & \geqslant \rho,\\ T, L, c_1, c_2, t_1, t_2, x, \rho & \geqslant 0 \end{cases}$$

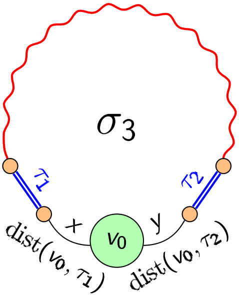
Идея построения третьего расписания

Хочется построить обход σ_3, который содержит “ребра”, соответствующие расстояниям от v_0 до τ_1 и от v_0 до τ_2:



Идея построения третьего расписания

Хочется построить обход σ_3, который содержит “ребра”, соответствующие расстояниям от v_0 до τ_1 и от v_0 до τ_2:



Утверждение

$$w(\sigma_3) \leqslant \frac{3}{2}w^* + w(x) + w(y).$$

Шаг 3: Построить расписание S_C аналогично алгоритму A из Теоремы 1, только используя обход σ_3 вместо σ_1.

Лемма

Пусть S_C — расписание, построенное на Шаге 2. Тогда

$$R_{\max}(S_C) \leqslant \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + \\ + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было} \\ & \text{или конфликт в } \tau_1 \text{ или в } \tau_2, \\ d_{c_3}/2, & \text{если } J_{c_3} \text{ находится в вершине } v, \\ d_{c_3}/2 + |\tau_3|, & \text{если } J_{c_3} \text{ находится в тоннеле } \tau_3. \end{cases}$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 1: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2).$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP} + \ell_{\max}, d_{c_1} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + 2|\tau_1|, d_{c_2} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + 2|\tau_2|\}.$$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 1: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2).$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP} + \ell_{\max}, d_{c_1} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + 2|\tau_1|, d_{c_2} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + 2|\tau_2|\}.$$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

При решении соответствующей ЗЛП получаем $\rho^* = \frac{15}{8}$.

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 2: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + \frac{d_{c_3}}{2}.$

$$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP}+\ell_{\max}, d_{c_1}+2\mathrm{dist}(v_0,\tau_1)+2|\tau_1|, d_{c_2}+2\mathrm{dist}(v_0,\tau_2)+2|\tau_2|\}.$$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0, tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} + d_{c_3} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 2: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2} T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + \frac{d_{c_3}}{2}.$

$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP} + \ell_{\max}, d_{c_1} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_1) + 2|\tau_1|, d_{c_2} + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau_2) + 2|\tau_2|\}.$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0, tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0, \tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} + d_{c_3} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

При решении соответствующей ЗЛП получаем $\rho^* = \frac{15}{8}$.

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 3: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \mathrm{dist}(v_0,\tau_2) + \frac{d_{c_3}}{2} + |\tau_3|.$

$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP} + \ell_{\max}, d_{c_1} + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + 2|\tau_1|, d_{c_2} + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau_2) + 2|\tau_2|\}.$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0,\tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$\min\{\mathrm{dist}(v_0,\tau_1), \mathrm{dist}(v_0,\tau_2)\} + |\tau_1| + |\tau_2| + |\tau_3| \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} + d_{c_3} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

Продолжение доказательства Теоремы 2

$$R_{\max}(S_A) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + d_{c_1}/2 + |\tau_1|,$$

$$R_{\max}(S_B) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \frac{d_{c_2}}{2} + |\tau_2|,$$

Случай 3: $R_{\max}(S_C) = \frac{3}{2}T^*_{RPP} + \ell_{\max} + \mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + \mathrm{dist}(v_0,\tau_2) + \frac{d_{c_3}}{2} + |\tau_3|.$

$\overline{\overline{R}} \geqslant \max\{T^*_{RPP} + \ell_{\max}, d_{c_1} + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + 2|\tau_1|, d_{c_2} + 2\mathrm{dist}(v_0,\tau_2) + 2|\tau_2|\}.$

При этом

$$\mathrm{dist}(v_0,\tau_1) + |\tau_1| + |\tau_2| + \mathrm{dist}(v_0,\tau_2) \leqslant T^*_{RPP},$$

$$\min\{\mathrm{dist}(v_0,\tau_1), \mathrm{dist}(v_0,\tau_2)\} + |\tau_1| + |\tau_2| + |\tau_3| \leqslant T^*_{RPP},$$

$$d_{c_1} + d_{c_2} + d_{c_3} \leqslant 2\ell_{\max}.$$

При решении соответствующей ЗЛП получаем $\rho^* = \frac{23}{12}$.

ЗЛП для последнего случая

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$t_{1,2,3} = |\tau_{1,2,3}|$
$c_{1,2,3} = d_{c_{1,2,3}}$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$y = \mathrm{dist}(v_0, \tau_2)$

$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases}
T + L & \leqslant 1, \\
c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\
c_2 + 2t_2 + 2y & \leqslant 1, \\
c_1 + c_2 + c_3 & \leqslant 2L, \\
x + y + t_1 + t_2 & \leqslant T, \\
x \leqslant y, & \\
x + t_1 + t_2 + t_3 & \leqslant T, \\
\frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\
\frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} + t_2 & \geqslant \rho, \\
\frac{3}{2}T + L + x + y + \frac{c_3}{2} + t_3 & \geqslant \rho, \\
T, L, c_1, c_2, c_3, t_1, t_2, t_3, x, y & \geqslant 0.
\end{cases}$$

ЗЛП для последнего случая

Обозначения

$T = T^*_{RPP}$
$L = \ell_{\max}$
$t_{1,2,3} = |\tau_{1,2,3}|$
$c_{1,2,3} = d_{c_{1,2,3}}$
$x = \mathrm{dist}(v_0, \tau_1)$
$y = \mathrm{dist}(v_0, \tau_2)$

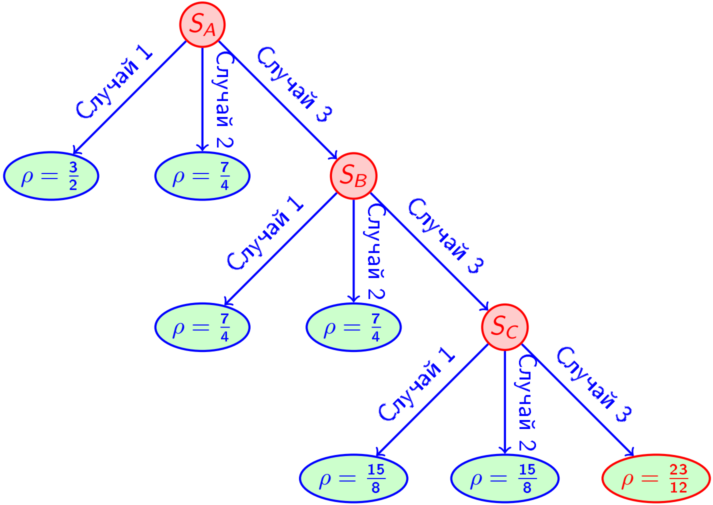
$$\rho \to \max$$

$$\begin{cases} T + L & \leqslant 1, \\ c_1 + 2t_1 + 2x & \leqslant 1, \\ c_2 + 2t_2 + 2y & \leqslant 1, \\ c_1 + c_2 + c_3 & \leqslant 2L, \\ x + y + t_1 + t_2 & \leqslant T, \\ x \leqslant y, & \\ x + t_1 + t_2 + t_3 & \leqslant T, \\ \frac{3}{2}T + L + \frac{c_1}{2} + t_1 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2}T + L + x + \frac{c_2}{2} + t_2 & \geqslant \rho, \\ \frac{3}{2}T + L + x + y + \frac{c_3}{2} + t_3 & \geqslant \rho, \\ T, L, c_1, c_2, c_3, t_1, t_2, t_3, x, y & \geqslant 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение

$$L = c_1 = c_2 = c_3 = 0,\ T = 1, x = \frac{1}{12}, y = \frac{1}{6}, t_1 = \frac{5}{12}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{6}, \rho = \frac{23}{12}.$$

Структура доказательства



Заключительные замечания

1. Теорема 1 повторяет идею [Averbakh, Berman, Ch 2006] построения $\frac{7}{4}$-приближенного алгоритма для $RO2||R_{\max}$.
2. Идея построения "испорченного" приближенного обхода принадлежит А.В. Кононову. На ней основан $\frac{13}{8}$ приближенный алгоритм из [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].

Заключительные замечания

1. Теорема 1 повторяет идею [Averbakh, Berman, Ch 2006] построения $\frac{7}{4}$-приближенного алгоритма для $RO2||R_{\max}$.
2. Идея построения "испорченного" приближенного обхода принадлежит А.В. Кононову. На ней основан $\frac{13}{8}$ приближенный алгоритм из [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].
3. Обоснования оценок с помощью ЗЛП корректны, но трудно воспринимаются. В статье описываются доказательства через цепочки неравенств (как в Теореме 1). Наши ЗЛП гарантируют, что такие доказательства существуют.
4. Существует еще один lifehack, который позволяет автоматизировать построение доказательств в виде цепочек неравенств.

1. Теорема 1 повторяет идею [Averbakh, Berman, Ch 2006] построения $\frac{7}{4}$-приближенного алгоритма для $RO2||R_{\max}$.
2. Идея построения "испорченного" приближенного обхода принадлежит А.В. Кононову. На ней основан $\frac{13}{8}$ приближенный алгоритм из [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].
3. Обоснования оценок с помощью ЗЛП корректны, но трудно воспринимаются. В статье описываются доказательства через цепочки неравенств (как в Теореме 1). Наши ЗЛП гарантируют, что такие доказательства существуют.
4. Существует еще один lifehack, который позволяет автоматизировать построение доказательств в виде цепочек неравенств.
5. В последнем случае доказательства Теоремы 2: если использовать неравенство $\mathrm{dist}(v_0,\tau_1)+\mathrm{dist}(v_0,\tau_2)+|\tau_1|+|\tau_2|+|\tau_3|\leqslant T^*_{RPP}$, окончательная оценка точности получается $15/8$ (вместо $23/12$). К сожалению, мы не можем гарантировать это неравенство. Вместо него используются два других:
   - $\mathrm{dist}(v_0,\tau_1)+\mathrm{dist}(v_0,\tau_2)+|\tau_1|+|\tau_2|\leqslant T^*_{RPP}$,
   - $\min\{\mathrm{dist}(v_0,\tau_1),\mathrm{dist}(v_0,\tau_2)\}+|\tau_1|+|\tau_2|+|\tau_3|\leqslant T^*_{RPP}$.

Открытые вопросы на будущее

1. Улучшить оценку точности алгортима (следующая цель — $\frac{15}{8}$)
2. Исследовать обобщенную постановку задачи с индивидуальными временами перемещения
3. Исследовать частный случай задачи с соразмерными длительностями операций.

Открытые вопросы на будущее

1. Улучшить оценку точности алгортима (следующая цель — $\frac{15}{8}$)
2. Исследовать обобщенную постановку задачи с индивидуальными временами перемещения
3. Исследовать частный случай задачи с соразмерными длительностями операций.

Спасибо за внимание!