О задаче open shop с пропорциональными длительностями операций

Илья Черных

Институт математики им. С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы
для задач составления расписаний”
22.11.2025

*Исследование выполнено за счёт гранта
Российского научного фонда №22-71-10015-П*

Постановка задачи open shop $Om||C_{max}$

Входные данные

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Расписание

Для каждой операции O_{ji} назначить интервал выполнения $[s_{ji}, c_{ji}]$, $c_{ji} = sji + p_{ji}$.

Ограничения

- Операции одной машины или операции одной работы не должны выполняться одновременно.
- Операции могут выполняться в произвольном порядке.

Постановка задачи open shop $Om||C_{\max}$

Входные данные

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Расписание

Для каждой операции O_{ji} назначить интервал выполнения $[s_{ji}, c_{ji}]$, $c_{ji} = sji + p_{ji}$.

Ограничения

- Операции одной машины или операции одной работы не должны выполняться одновременно.
- Операции могут выполняться в произвольном порядке.

Целевая функция (makespan, $C_{\max}$)

Цель: минимизировать длину расписания $C_{\max} = \max\limits_{j,i} c_{ji}$.

Сложность

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$ [Gonzalez, Sahni 1976] (5 известных алгоритмов);
- $O3||C_{\max}$ $\mathbb{NP}$-трудна (сильная $\mathbb{NP}$-трудность — открытый вопрос) [Gonzalez, Sahni 1976];
- $Om||C_{\max}$: PTAS [Sevastyanov, Woeginger 2001]
- $O||C_{\max}$ $\mathbb{NP}$-трудна в сильном смысле, есть порог неприближаемости $\frac{5}{4}$ [Williamson *et al* 1997].

Частный случай

Соразменые длительности операций (proportionate)

Ограничение на длительности операций: $p_{ji} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Традиционное обозначение: *prpt* (*e.g.*, $Om|prpt|C_{\max}$).

Частный случай

Соразменые длительности операций (proportionate)

Ограничение на длительности операций: $p_{ji} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Традиционное обозначение: *prpt* (*e.g.*, $Om|prpt|C_{\max}$).
Более точное обозначение [Sevastyanov, 2019]: *j-prpt* и *m-prpt*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

j-prpt

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_m & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

m-prpt

Частный случай

Соразменые длительности операций (proportionate)

Ограничение на длительности операций: $p_{ji} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Традиционное обозначение: *prpt* (*e.g.*, $Om|prpt|C_{\max}$).
Более точное обозначение [Sevastyanov, 2019]: *j-prpt* и *m-prpt*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

j-prpt

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_m & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

m-prpt

- $O3|j\text{-}prpt|C_{\max}$ $\mathbb{NP}$-трудна [Lui, Bulfin 1987];
- для $O3|j\text{-}prpt|C_{\max}$ существует псевдополиномиальный алгоритм [Sevastyanov 2019].

Обобщение частного случая

Ограничение на длительности операций: строки (и столбцы) матрицы P пропорциональны (proportional$\neq$proportionate).

Обобщение частного случая

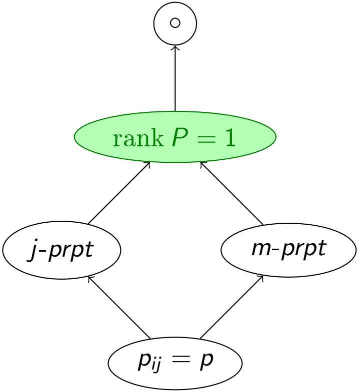
Ограничение на длительности операций: строки (и столбцы) матрицы P пропорциональны (proportional$\neq$proportionate).

Предлагаемое название: задача с *пропорциональными длительностями операций*.
Предлагаемое обозначение: $\operatorname{rank} P = 1$.

Обобщение частного случая

Ограничение на длительности операций: строки (и столбцы) матрицы P пропорциональны (proportional$\neq$proportionate).

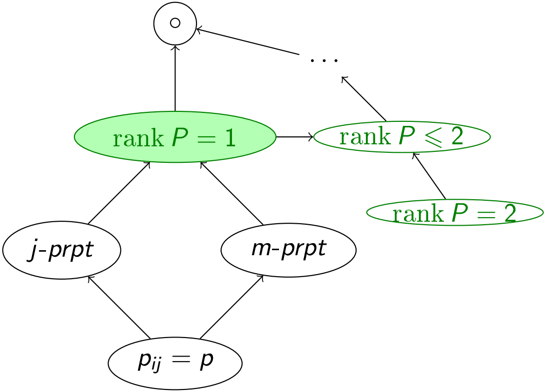
Предлагаемое название: задача с *пропорциональными длительностями операций*.
Предлагаемое обозначение: $\mathrm{rank}\, P = 1$.



Обобщение частного случая

Ограничение на длительности операций: строки (и столбцы) матрицы P пропорциональны (proportional$\neq$proportionate).

Предлагаемое название: задача с *пропорциональными длительностями операций*.
Предлагаемое обозначение: $\mathrm{rank}\, P = 1$.



Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	ℓ_2

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	ℓ_2
Σ	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\ldots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{nm}	ℓ_2
Σ	d_1	d_2	$\ldots$	d_n	

Нижняя оценка длины расписания

$$C^*_{\max} \geqslant \bar{C} \doteq \max_{i,j}\{\ell_i, d_j\} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}.$$

Стандартная нижняя оценка

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & J_1 & J_2 & \dots & J_n & \Sigma \\
\hline
M_1 & p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} & \ell_1 \\
\vdots & & & & \vdots & \\
M_m & p_{1m} & p_{2m} & \dots & p_{nm} & \ell_2 \\
\hline
\Sigma & d_1 & d_2 & \dots & d_n &
\end{array}
$$

Нижняя оценка длины расписания

$$C^*_{\max} \geqslant \bar{C} \doteq \max_{i,j}\{\ell_i, d_j\} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}.$$

Определение

Допустимое расписание S нормально, если $C_{\max}(S) = \bar{C}$. Примеры задачи, для которых существует нормальное расписание, также будем называть нормальными.

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	ℓ_2
Σ	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Нижняя оценка длины расписания

$$C^*_{\max} \geqslant \bar{C} \doteq \max_{i,j}\{\ell_i, d_j\} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}.$$

Определение

Допустимое расписание S нормально, если $C_{\max}(S) = \bar{C}$. Примеры задачи, для которых существует нормальное расписание, также будем называть нормальными.

В дальнейшем без ограничения общности

$$\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \dots \geqslant \ell_m$$

Цель исследование: нормальность в зависимости от коэффициентов пропорциональности

Рассмотрим $O3|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \alpha\beta p_3 & \cdots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

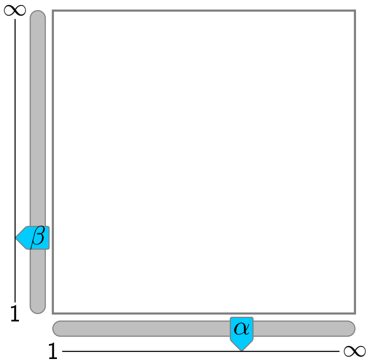
$$\alpha, \beta \geqslant 1.$$

Цель исследование: нормальность в зависимости от коэффициентов пропорциональности

Рассмотрим $O3|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \alpha\beta p_3 & \cdots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\alpha, \beta \geqslant 1.$$

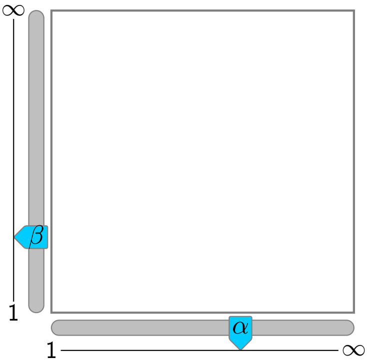


Цель исследование: нормальность в зависимости от коэффициентов пропорциональности

Рассмотрим $O3|\mathrm{rank}\,P = 1|C_{\max}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \alpha\beta p_3 & \cdots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\alpha, \beta \geqslant 1.$$



Для каких α, β

- гарантирована нормальность примера?
- частный случай полиномиально разрешим?

Почему не $O2|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$?

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$.
- Для любого примера задачи $O2||C_{\max}$ нормальность гарантирована.

Почему не $O2|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$?

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$.
- Для любого примера задачи $O2||C_{\max}$ нормальность гарантирована.

Как можно усложнить задачу $O2||C_{\max}$

- $O2|r_j|C_{\max}$
- $O2|prec|C_{\max}$

Почему не $O2|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$?

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$.
- Для любого примера задачи $O2||C_{\max}$ нормальность гарантирована.

Как можно усложнить задачу $O2||C_{\max}$

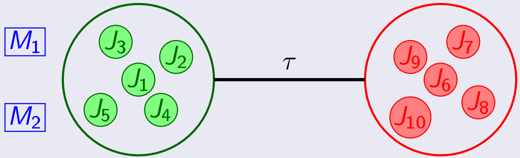
- $O2|r_j|C_{\max}$
- $O2|prec|C_{\max}$
- Часть работ удалённые:
  1. Множество работ разделяется на две группы: локальные and удалённые.
  2. Переключение между группами занимает τ единиц времени для каждой машины.
  3. Машины изначально расположены локально, по окончанию выполнения всех работ должны вернуться домой.

Почему не $O2|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$?

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$.
- Для любого примера задачи $O2||C_{\max}$ нормальность гарантирована.

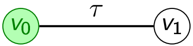
Как можно усложнить задачу $O2||C_{\max}$

- $O2|r_j|C_{\max}$
- $O2|prec|C_{\max}$
- Часть работ удалённые:
  1. Множество работ разделяется на две группы: локальные and удалённые.
  2. Переключение между группами занимает τ единиц времени для каждой машины.
  3. Машины изначально расположены локально, по окончанию выполнения всех работ должны вернуться домой.



Вспомним $RO2||R_{\max}$

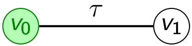
$$RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = K_2|R_{\max}.$$



Длительности операций: $P = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \dots & \alpha p_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$,
без ограничения общности $\alpha \geqslant 1$.

Вспомним $RO2||R_{\max}$

$RO2|\mathrm{rank}\ P = 1,\ G = K_2|R_{\max}.$

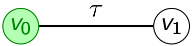


Длительности операций: $P = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \dots & \alpha p_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$,

без ограничения общности $\alpha \geqslant 1$.

Вспомним $RO2||R_{\max}$

$$RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2|R_{\max}.$$



Длительности операций: $P = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \dots & \alpha p_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$,

без ограничения общности $\alpha \geqslant 1$.

Те же вопросы:

1. Для каких α гарантируется нормальность?
2. Для каких α задача полиномиально разрешима?

Результат

Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

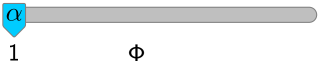
Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

Нормальность



Результат

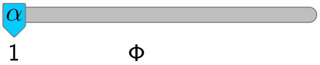
Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

Нормальность



Результат

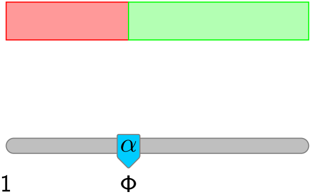
Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

Нормальность



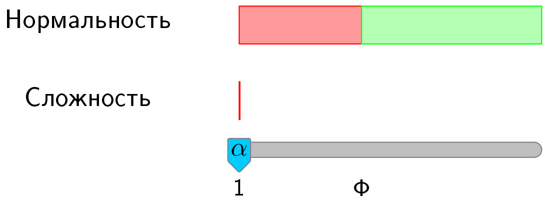
Результат

Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.



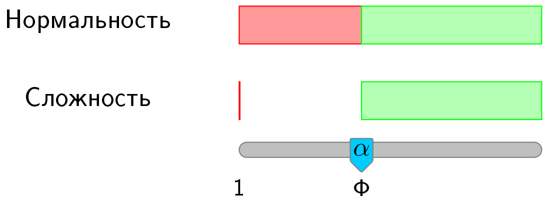
Результат

Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.



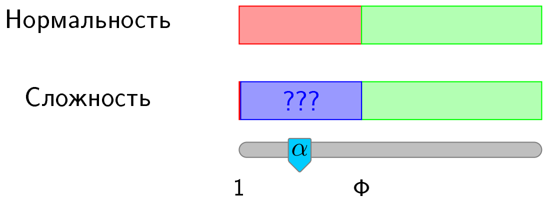
Результат

Теорема [Агзямова, Ч.]

Для любого примера $RO2|\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2|R_{\max}$ длина оптимального расписания $R^*_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$, где

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+2\alpha-1}, & \alpha \in [1, \Phi), \\ 1, \alpha \geqslant \Phi. \end{cases}$$

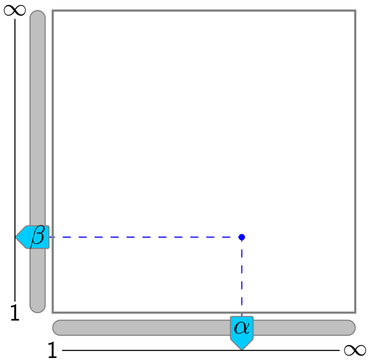
Для любого примера расписание длины $R_{\max} \leqslant F(\alpha)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.



Рассмотрим $O3|\mathrm{rank}\,P = 1|C_{\max}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \alpha\beta p_3 & \cdots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\alpha, \beta \geqslant 1.$$



Задача: описать множества

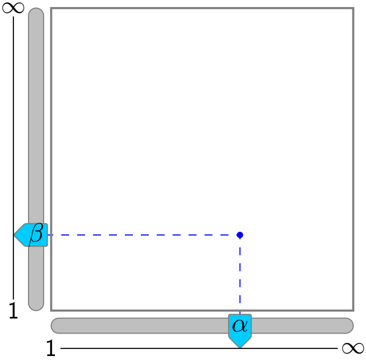
$\mathcal{N} = \{(\alpha, \beta) | \text{класс } \mathcal{I}(\alpha, \beta) \text{ — нормальный}\}$

$\mathcal{P} = \{(\alpha, \beta) | \mathcal{I}(\alpha, \beta) \text{ — полином. разр.}\}$

Рассмотрим $O3|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \alpha\beta p_3 & \cdots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\alpha, \beta \geqslant 1.$$



Обозначим класс примеров $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$.
Задача: описать множества

$$\mathcal{N} = \{(\alpha, \beta) | \text{класс } \mathcal{I}(\alpha, \beta) \text{ — нормальный}\}$$

$$\mathcal{P} = \{(\alpha, \beta) | \mathcal{I}(\alpha, \beta) \text{ — полином. разр.}\}$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2 \beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{1}}\beta_{\mathbf{1}}p_{\mathbf{1}} & \cdots & \alpha_{\mathbf{1}}\beta_{\mathbf{1}}p_n \\ \beta_{\mathbf{1}}p_{\mathbf{1}} & \cdots & \beta_{\mathbf{1}}p_n \\ p_{\mathbf{1}} & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{2}}\beta_{\mathbf{2}}p_{\mathbf{1}} & \cdots & \alpha_{\mathbf{2}}\beta_{\mathbf{2}}p_n \\ \beta_{\mathbf{2}}p_{\mathbf{1}} & \cdots & \beta_{\mathbf{2}}p_n \\ p_{\mathbf{1}} & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1\beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \times \alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1\beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \times \alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1\beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \times \alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \underset{\le}{\overset{=}{\rightrightarrows}} \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1\beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \times \alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\leq} \\ \xrightarrow{\leq} \end{array} P_1'$$

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1 \beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\times \alpha_2 \beta_2 / \alpha_1 \beta_1$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2 \beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2 \beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

$$S_1'$$

О структуре множества $\mathcal{N}$.

Лемма

Пусть $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{N}$ и $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$. Тогда $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{N}$

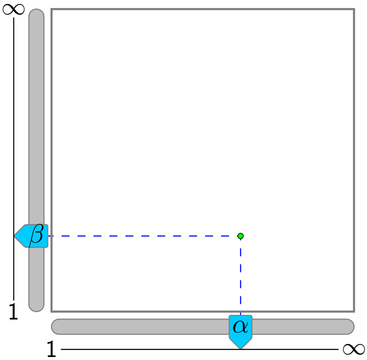
$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 p_1 & \cdots & \alpha_1\beta_1 p_n \\ \beta_1 p_1 & \cdots & \beta_1 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\times \alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \beta_2 p_1 & \cdots & \beta_2 p_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\leq} \\ \xrightarrow{\leq} \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_2 p_1 & \cdots & \alpha_2\beta_2 p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1} p_n \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_1 & \cdots & \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1} p_n \end{pmatrix} = P_1'$$

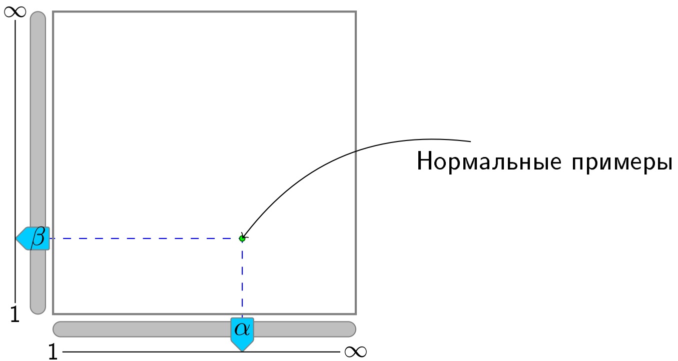
$$S_2 \leftsquigarrow S_1'$$

Структура множества $\mathcal{N}$

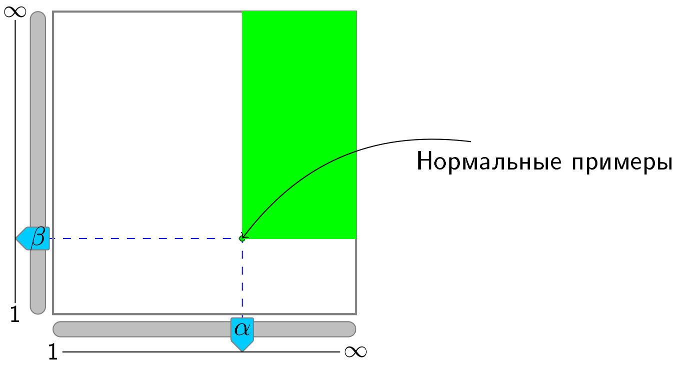


Нормальные примеры

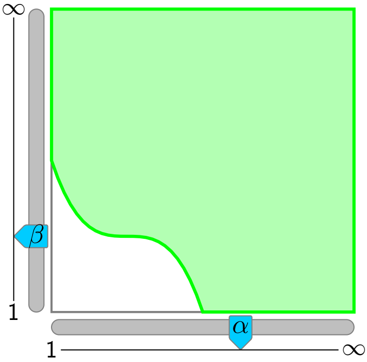
Структура множества $\mathcal{N}$



Структура множества $\mathcal{N}$



Структура множества $\mathcal{N}$



Нормальные примеры

Достаточное условие нормальности

for $O3|\mathrm{rank}\ P = 1|C_{\max}$

$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$

$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие нормальности

for $O3|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$

$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$

$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3, \text{ or}$$

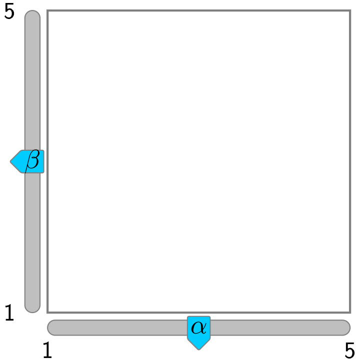
$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$

$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$
$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3$, or

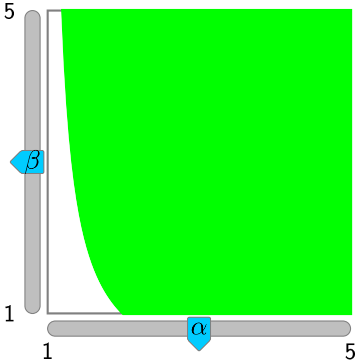
$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$



$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$
$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3, \text{ or}$$
$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$

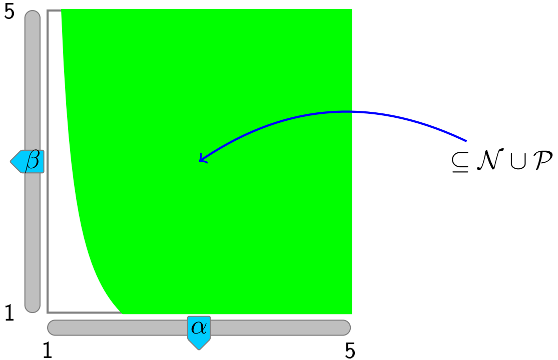


$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$
$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3$, or

$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$



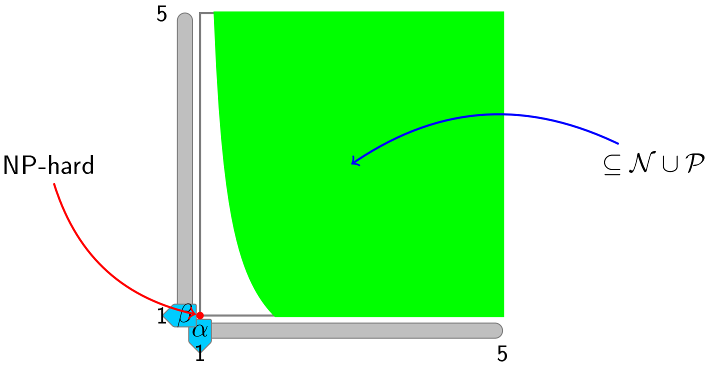
$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$

$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3, \text{ or}$$

$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$



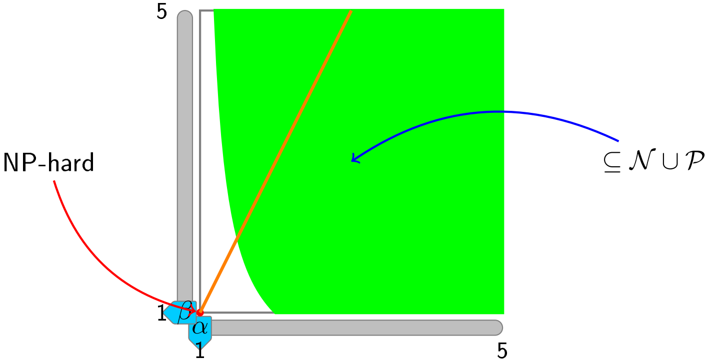
$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$

$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3$, or

$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$

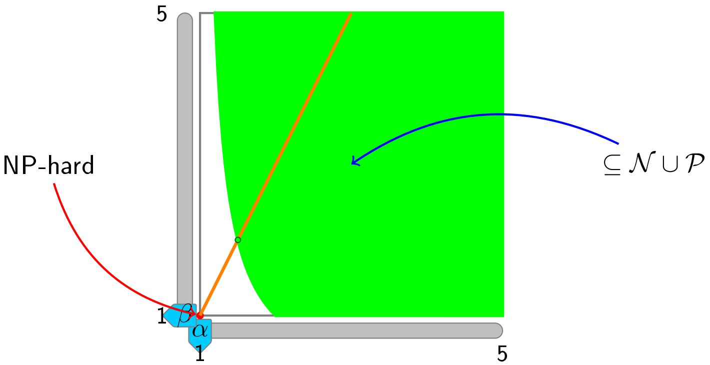


$$\ell_1 = \alpha \ell_2 = \alpha \cdot \beta \ell_3,$$
$$\ell_2 = \beta \ell_3.$$

Достаточное условие

$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3$, or

$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$



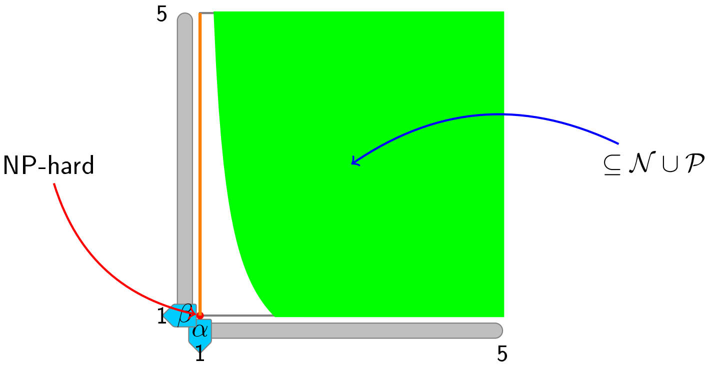
$$\ell_1 = \alpha\ell_2 = \alpha \cdot \beta\ell_3,$$

$$\ell_2 = \beta\ell_3.$$

Достаточное условие

$\ell_1 \geqslant \ell_2 + \ell_3$, or

$$\alpha\beta \geqslant \beta + 1.$$



Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

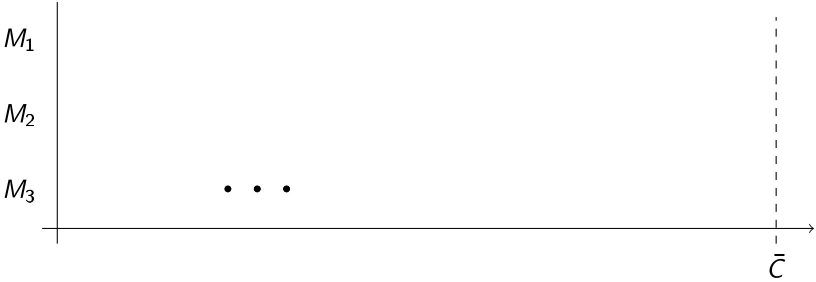
Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$.

Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta \ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.

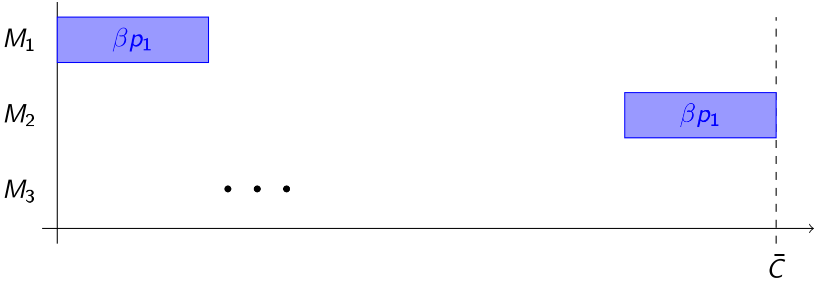


Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$.

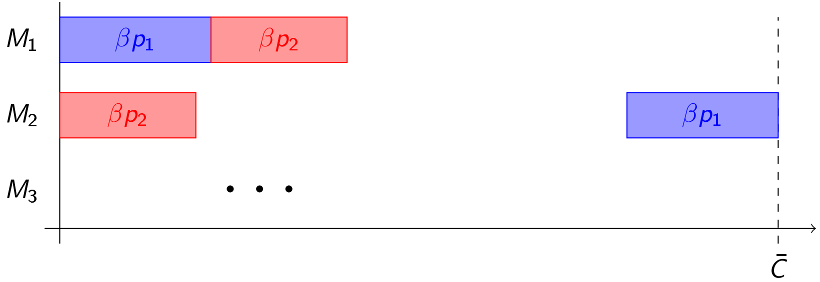


Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.

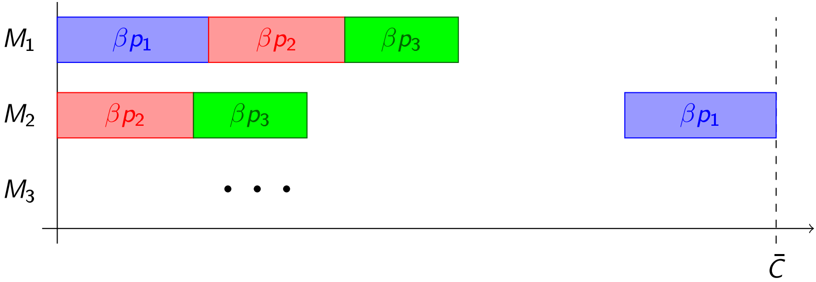


Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.

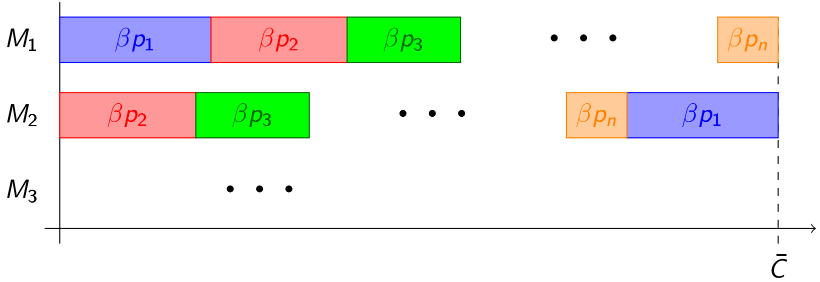


Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

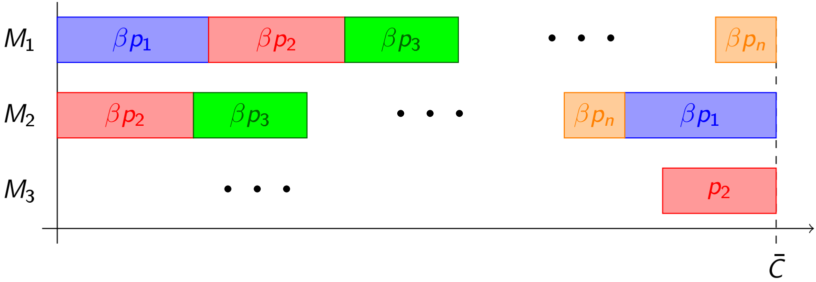
Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.



$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

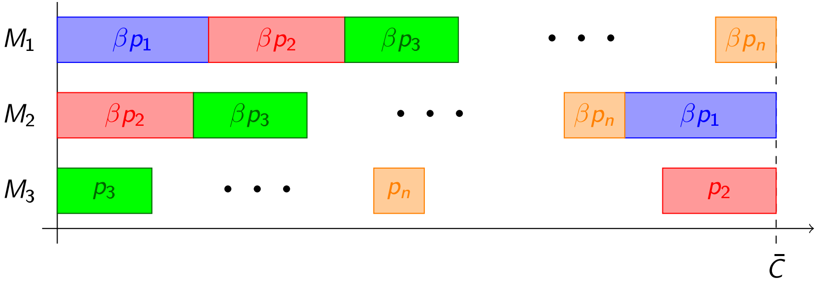
Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.



$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.

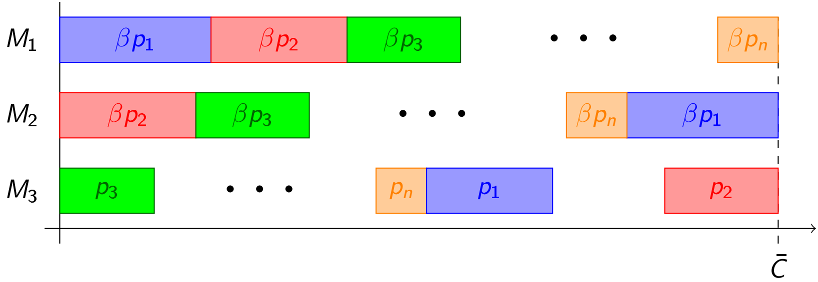


Частный случай $\alpha = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

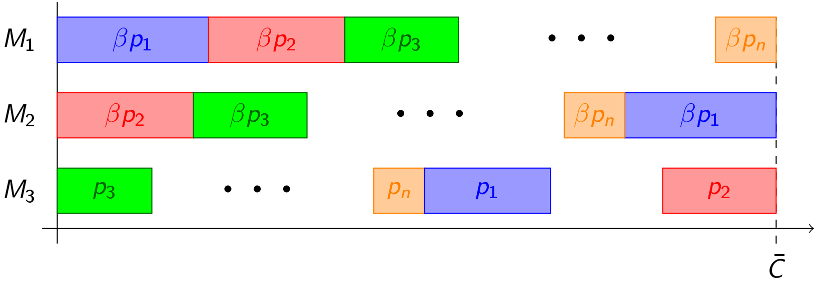
Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.



$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta \ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.

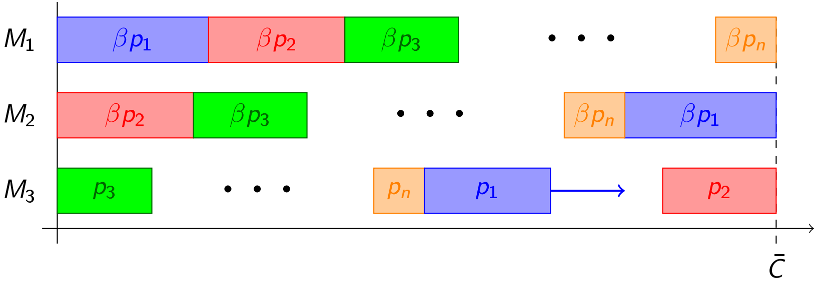


Всё хорошо, если $\ell - p_2 \leqslant \beta(\ell - p_1)$.

$$P = \begin{pmatrix} \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \beta p_3 & \cdots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.

Случай 1. $\bar{C} = \ell_{\max} = \beta\ell = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j$.



Всё хорошо, если $\ell - p_2 \leqslant \beta(\ell - p_1)$.

Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\mathsf{max}} = \beta\ell$.

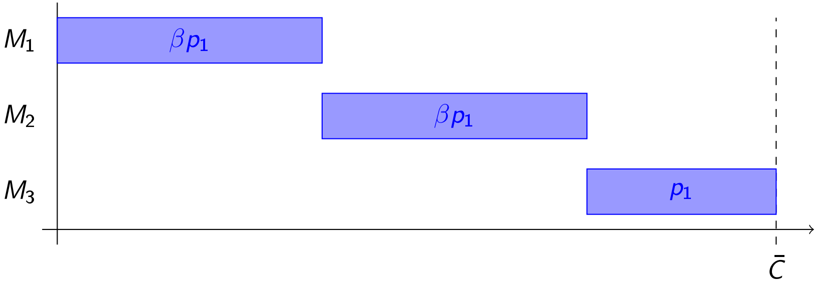
Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell.$

Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell.$

Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

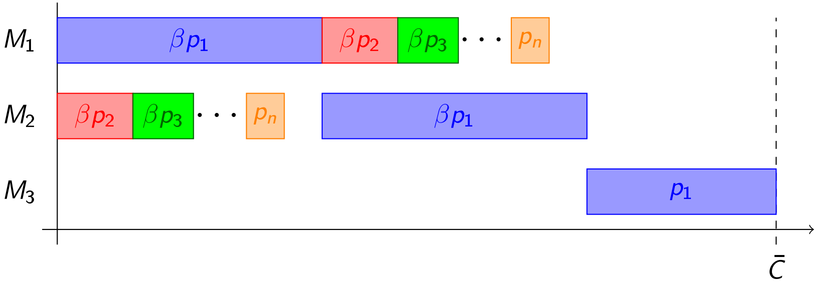
Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.



Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

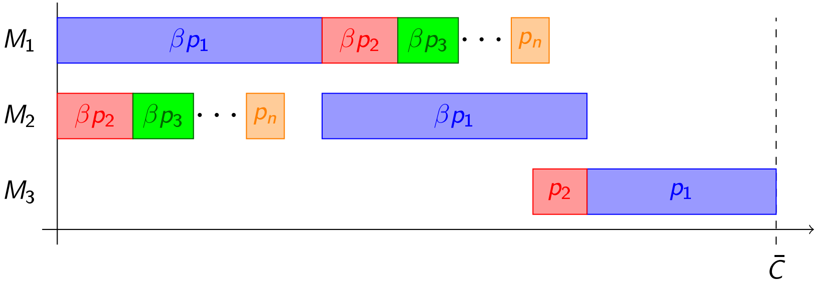
Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.



Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

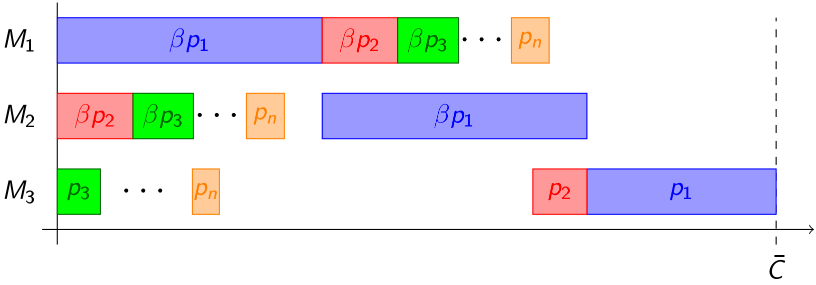
Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.



Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

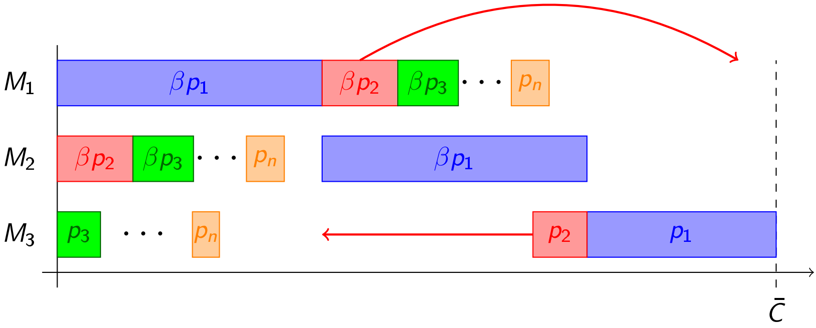
Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.



Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

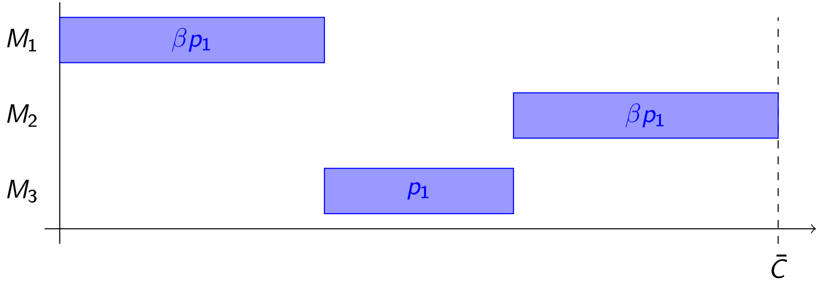
Случай 2.1 $2\beta p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.



Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

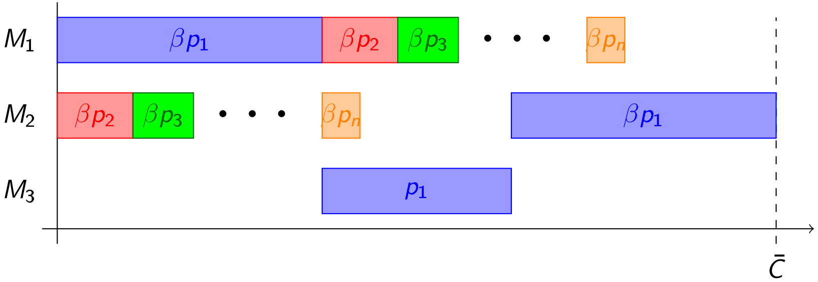
Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

Случай 2.2 $2\beta p_1 < \ell_{\max} = \beta\ell$.



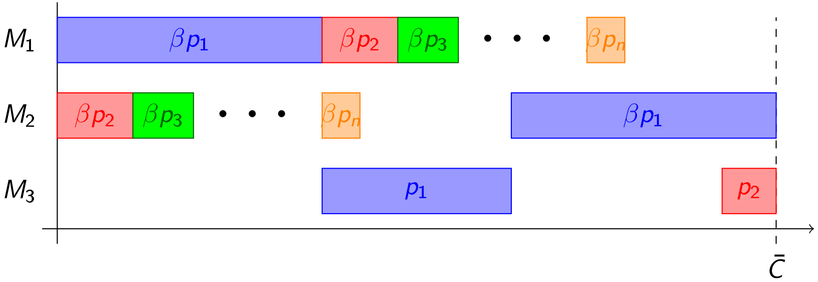
Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

Случай 2.2 $2\beta p_1 < \ell_{\max} = \beta\ell$.



Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

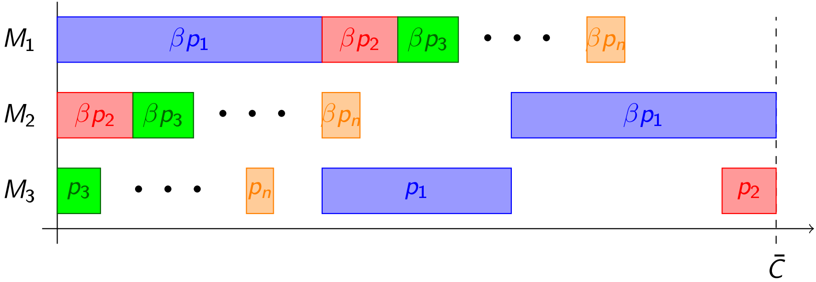
Случай 2.2 $2\beta p_1 < \ell_{\max} = \beta\ell$.



Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

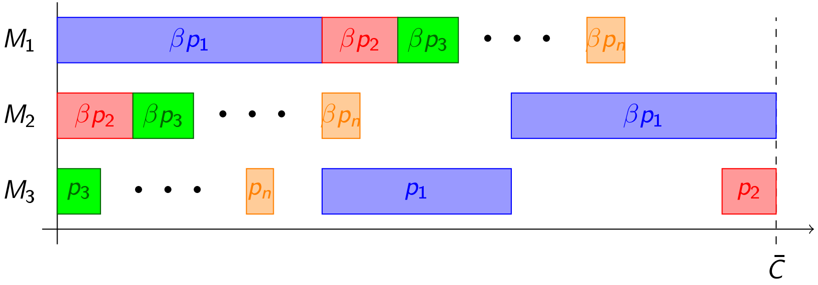
Случай 2.2 $2\beta p_1 < \ell_{\max} = \beta\ell$.



Частный случай $\alpha = 1$. Продолжение.

Случай 2. $\bar{C} = d_1 = (2\beta + 1)p_1 \geqslant \ell_{\max} = \beta\ell$.

Случай 2.2 $2\beta p_1 < \ell_{\max} = \beta\ell$.



Расписание допустимо, если $\ell - p_1 - p_2 \leqslant \beta p_1$.

Казалось бы, причём тут Φ…

Хотим: $\ell - p_1 - p_2 \leqslant \beta p_1$.

Имеем: $\bar{C} = (2\beta + 1)p_1 \leqslant \beta\ell$.

$$\ell \leqslant \frac{2\beta+1}{\beta} p_1 = \left(2 + \frac{1}{\beta}\right) p_1,$$

$$\ell - p_1 \leqslant \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) p_1.$$

Достаточно, чтобы $1 + \dfrac{1}{\beta} \leqslant \beta$.

Минимальное положительное решение неравенства: $\beta = \Phi$.

Спасибо за внимание!

Спасибо!

Спасибо!

Вопросы?