

О локализации оптимумов в двухмашинной задаче open shop с маршрутизацией

Илья Черных

Институт математики им С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы
для задач составления расписаний”
01.03.2025

*Исследование выполнено за счёт гранта
Российского научного фонда №22-71-10015*

Часть первая, основная.

О локализации оптимумов для $RO2||R_{\max}$.

Open shop и стандартная нижняя оценка

Постановка задачи $Om||C_{\max}$

Для данного множества машин $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$ и множества работ $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ составить расписание выполнения каждой машиной операций каждой работы так, чтобы интервалы выполнения операций одной машины/одной работы не пересекались. Длительности операций p_{ji} даны. Цель — минимизировать длину расписания $C_{\max}$.

Постановка задачи $Om||C_{\max}$

Для данного множества машин $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$ и множества работ $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ составить расписание выполнения каждой машиной операций каждой работы так, чтобы интервалы выполнения операций одной машины/одной работы не пересекались. Длительности операций p_{ji} даны. Цель — минимизировать длину расписания $C_{\max}$.

Обозначения

- $\ell_i = \sum_{j=1}^n p_{ji}$ — нагрузка машины M_i .
- $d_j = \sum_{i=1}^m p_{ji}$ — длина работы J_j .
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$, $d_{\max} = \max d_j$

Open shop и стандартная нижняя оценка

Постановка задачи $Om||C_{\max}$

Для данного множества машин $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$ и множества работ $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ составить расписание выполнения каждой машиной операций каждой работы так, чтобы интервалы выполнения операций одной машины/одной работы не пересекались. Длительности операций p_{ji} даны. Цель — минимизировать длину расписания $C_{\max}$.

Обозначения

- $\ell_i = \sum_{j=1}^n p_{ji}$ — нагрузка машины M_i .
- $d_j = \sum_{i=1}^m p_{ji}$ — длина работы J_j .
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$, $d_{\max} = \max d_j$

Стандартная нижняя оценка

$$C_{\max} \geq \bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Пример с тремя машинами

$$J_1 = (1, 1, 1), J_2 = (2, 0, 0),$$

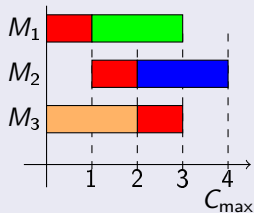
$$J_3 = (0, 2, 0), J_4 = (0, 0, 2).$$

Немного о точности $\bar{C}$?

Пример с тремя машинами

$$J_1 = (1, 1, 1), J_2 = (2, 0, 0),$$

$$J_3 = (0, 2, 0), J_4 = (0, 0, 2).$$

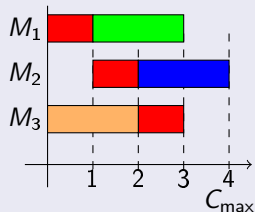


Немного о точности $\bar{C}$?

Пример с тремя машинами

$$J_1 = (1, 1, 1), J_2 = (2, 0, 0),$$

$$J_3 = (0, 2, 0), J_4 = (0, 0, 2).$$



- Оценка $C_{\max}^* \leq \frac{4}{3} \bar{C}$ является точной для $O3||C_{\max}$.
- Доказательство получено с помощью компьютерного метода, специально изобретенного для этого исследования. [Sevastyanov, Ch. 1998]
- Задача нахождения точной оценки такого вида называется **задачей локализации оптимумов**.

Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

Длина оптимального расписания для задачи $O2||C_{\max}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

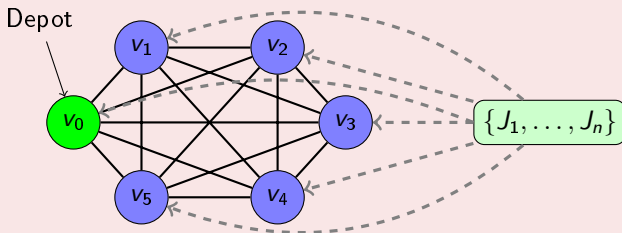
Длина оптимального расписания для задачи $O2||C_{\max}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Известные алгоритмы в хронологическом порядке

- T. Gonzalez, S. Sahni 1976
- M. Pinedo, L. Schrage 1982
- D. de Werra 1989
- A. Soper 2013
- A. Khramova, Ch 2021

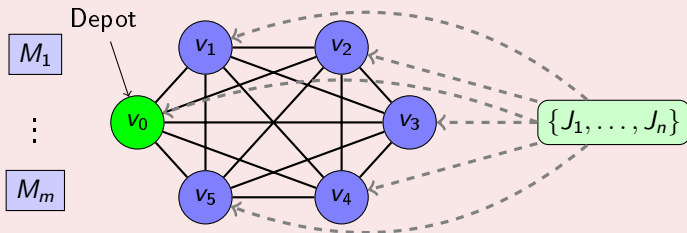
Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



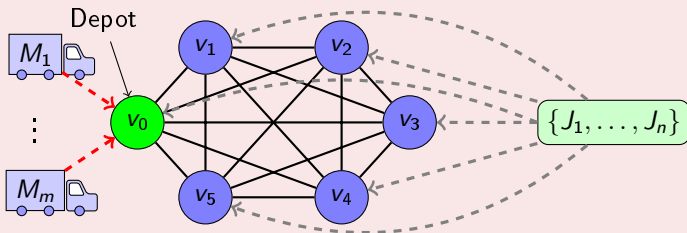
Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



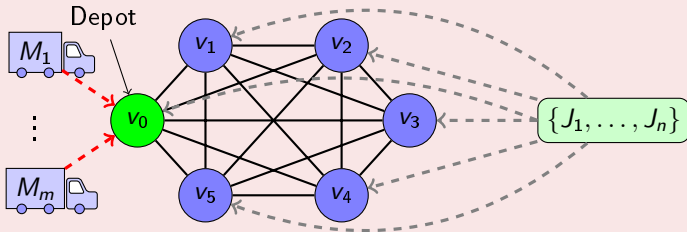
Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

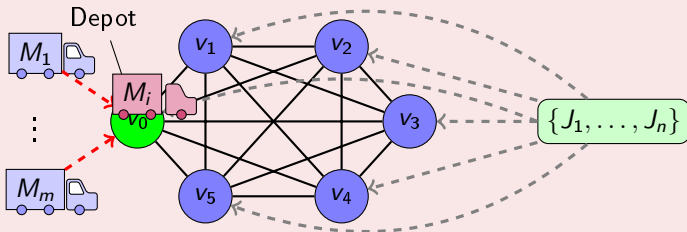
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

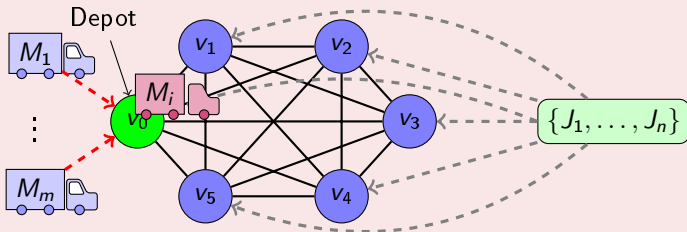
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

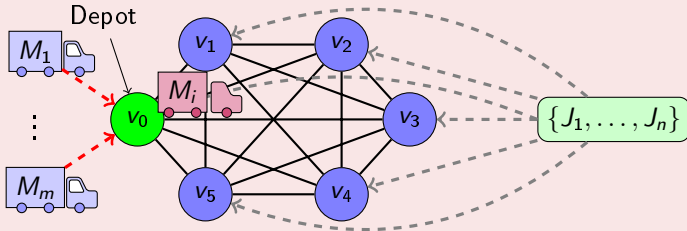
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

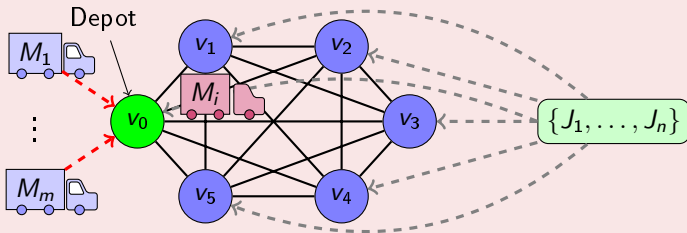
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

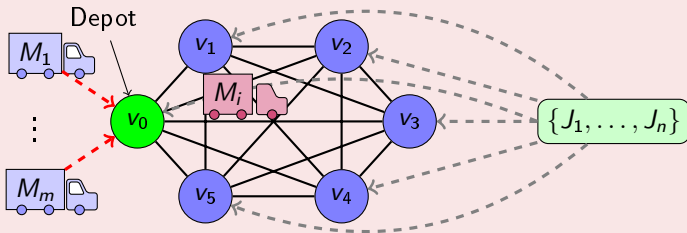
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

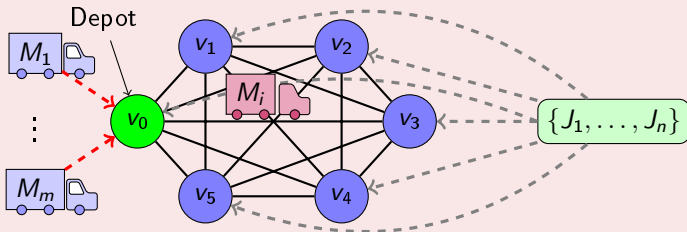
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

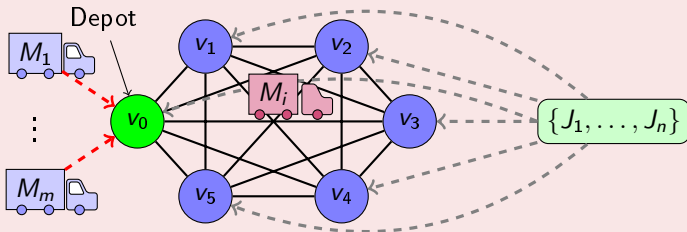
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

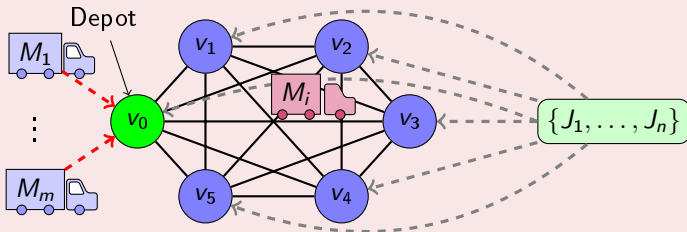
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

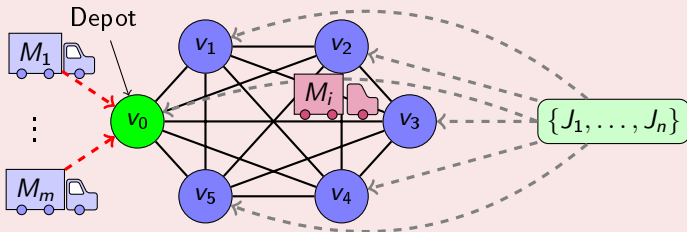
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

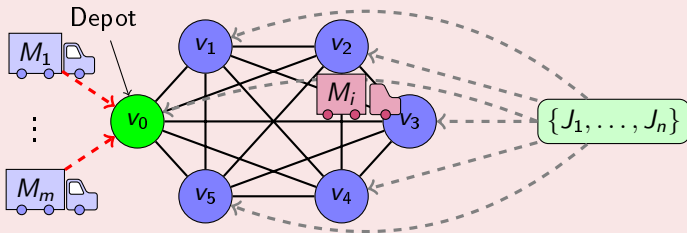
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

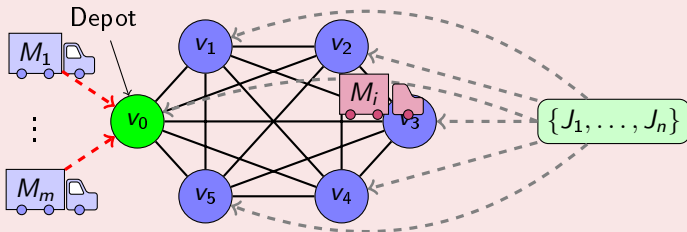
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

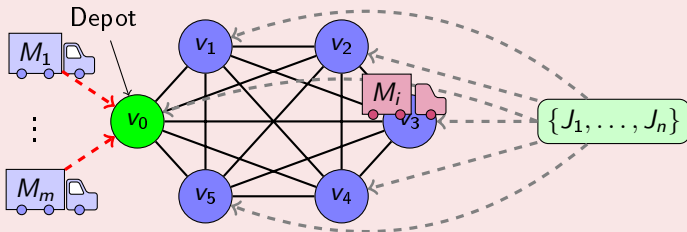
Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Неформальное напоминание о постановке задачи open shop с маршрутизацией

Комбинация open shop и метрической задачи коммивояжера



- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $\text{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v ;
- $\mathcal{J}(v)$ — работы из узла v ;
- $R_i(S) = \max_v \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} (c_{ji}(S) + \text{dist}(v_0, v))$;
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \rightarrow \min_S$ — длина расписания.

Стандартная нижняя оценка для задачи open shop с маршрутизацией

- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка машины,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из узла v ,
- T^* — длина кратчайшего обхода G (оптимум TSP)

Стандартная нижняя оценка для задачи open shop с маршрутизацией

- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка машины,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из узла v ,
- T^* — длина кратчайшего обхода G (оптимум TSP)

Стандартная нижняя оценка

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_v \left(d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

Стандартная нижняя оценка для задачи open shop с маршрутизацией

- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка машины,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из узла v ,
- T^* — длина кратчайшего обхода G (оптимум TSP)

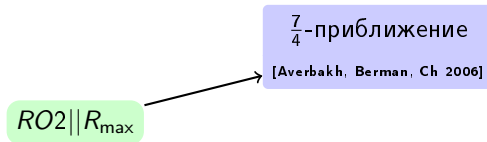
Стандартная нижняя оценка

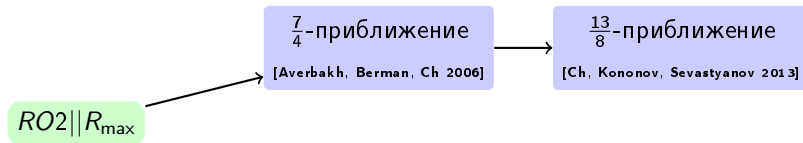
$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_v \left(d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

Задача локализации оптимумов

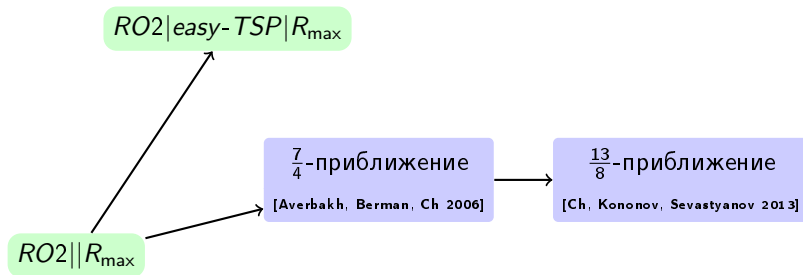
$$\rho^* = \sup \frac{R_{\max}^*}{\bar{R}}$$

$RO2||R_{\max}$

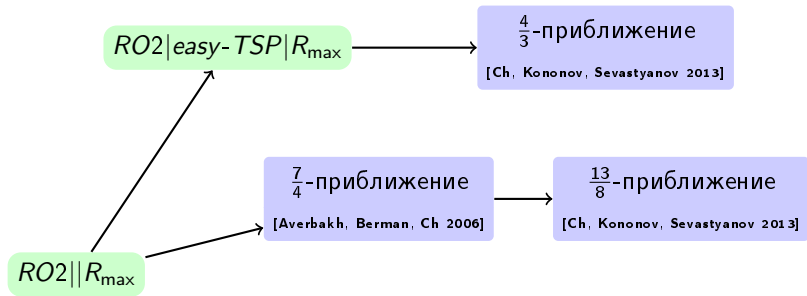




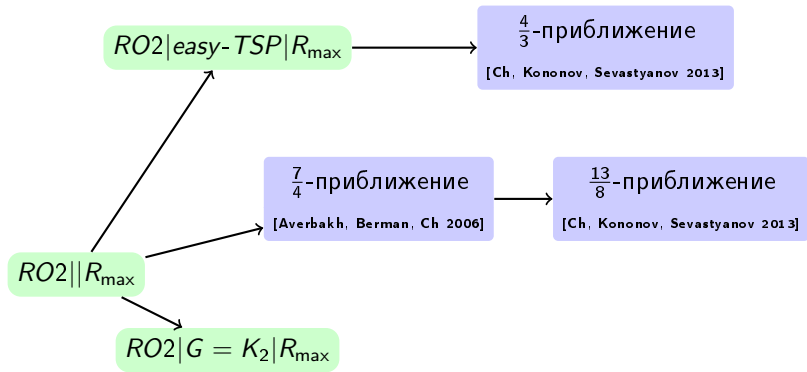
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



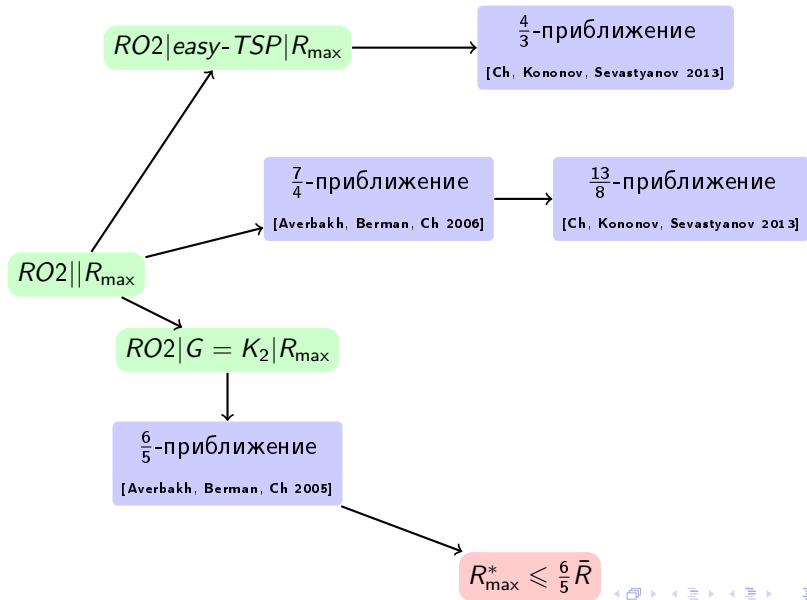
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



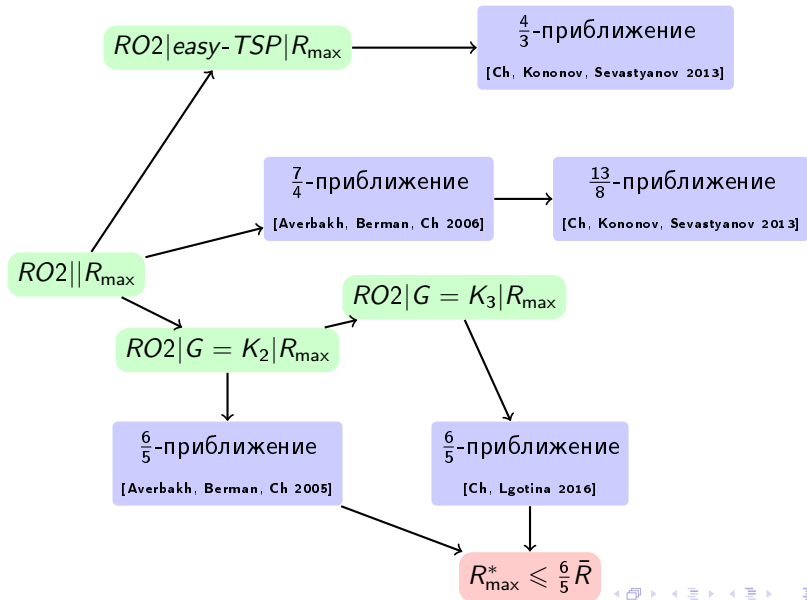
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



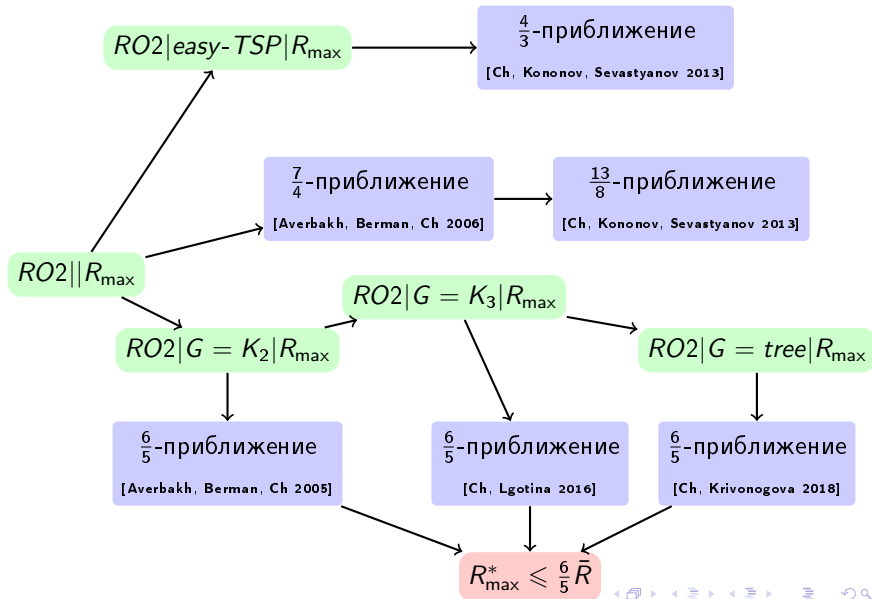
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



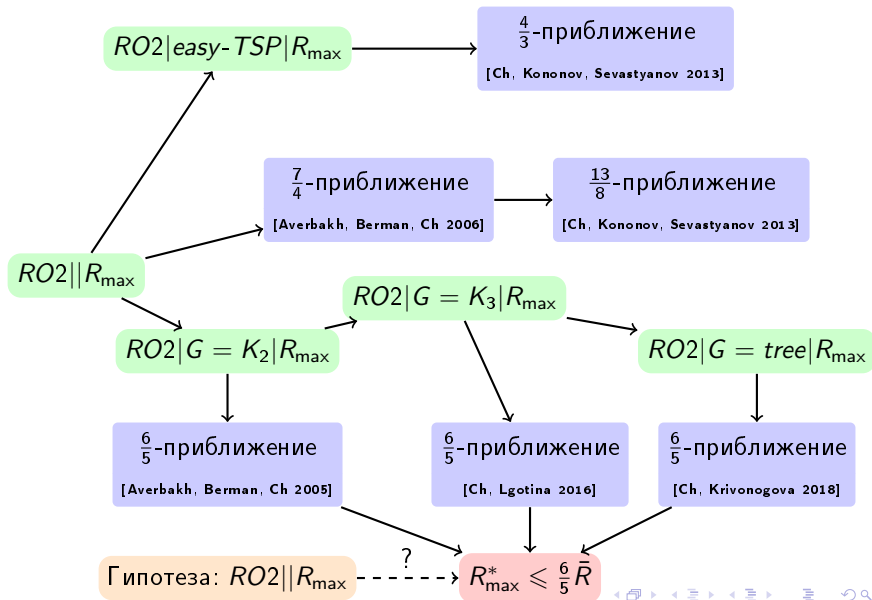
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



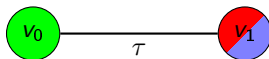
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



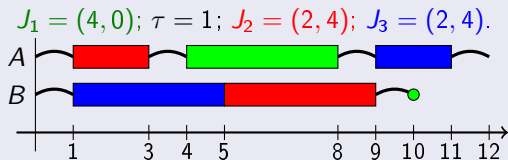
Приближенные алгоритмы для $RO2||R_{\max}$



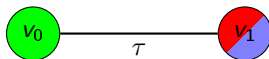
Точность оценки для $RO2|G = K_2|R_{\max}$



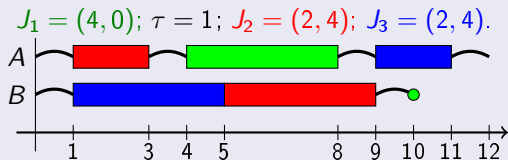
[I. Averbakh, O. Berman, IC 2005]



Точность оценки для $RO2|G = K_2|R_{\max}$



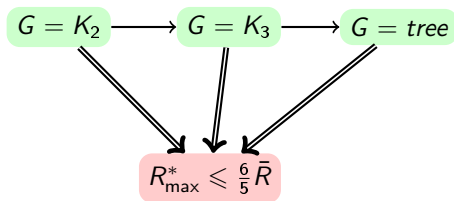
[I. Averbakh, O. Berman, IC 2005]

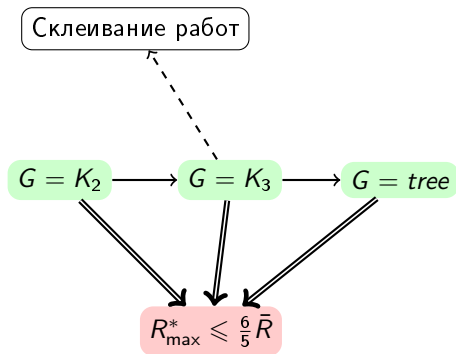


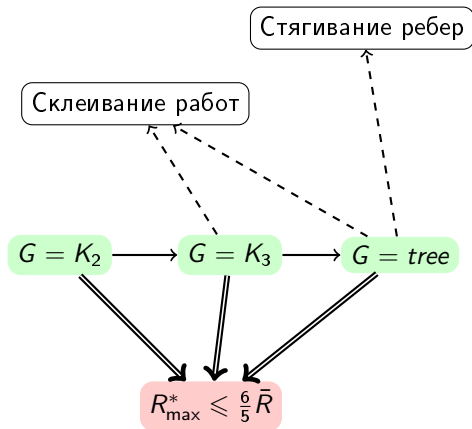
$$\frac{6}{5} \leq \rho^* \leq \frac{4}{3}.$$

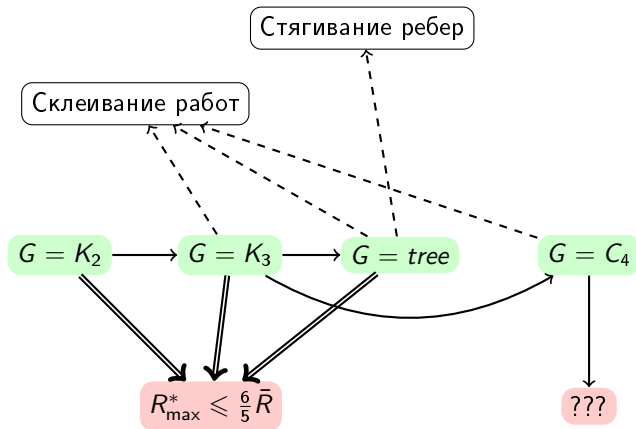
Методика: упрощение примеров для $RO2||R_{\max}$

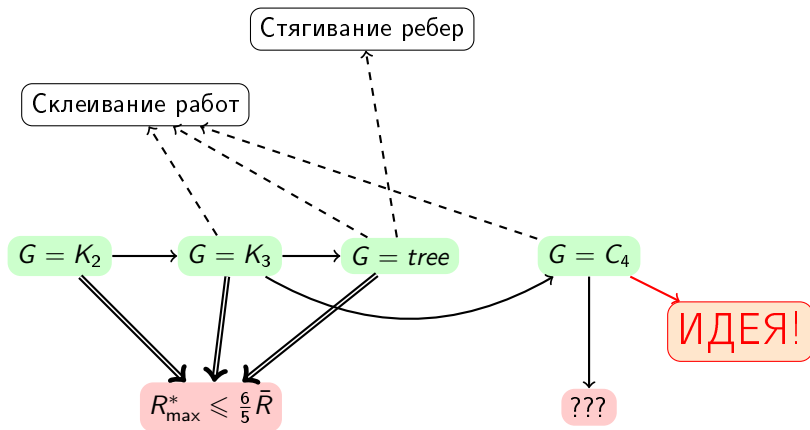
Метод	Эффект	Результат
Склеивание работ	Сокращение числа работ	Не более одной работы в вершине, за исключением перегруженной, в которой не более трех работ.
Стягивание висячих ребер	Упрощение структуры графа	Не более одного перегруженного ребра.
Стягивание висячих циклов	Упрощение структуры графа	Не более одного перегруженного цикла.

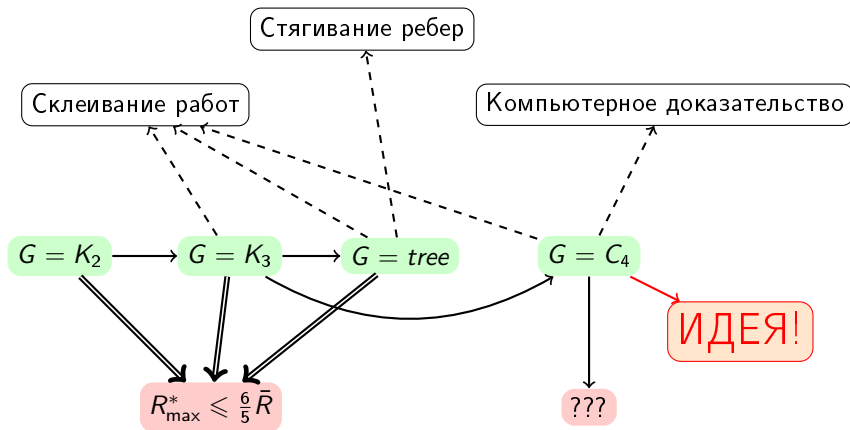


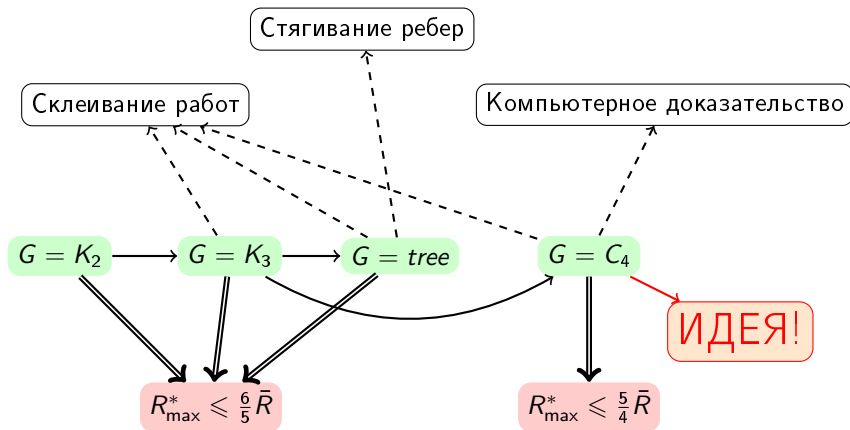




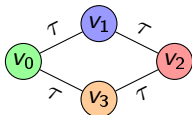




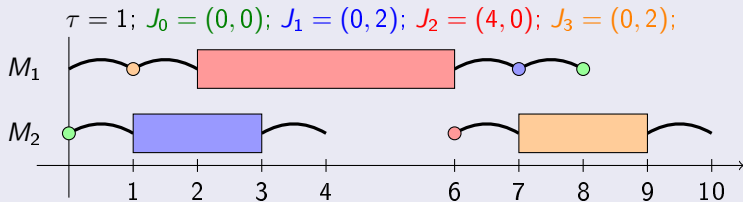




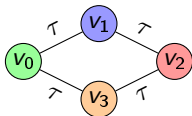
Новая нижняя оценка ρ^* .



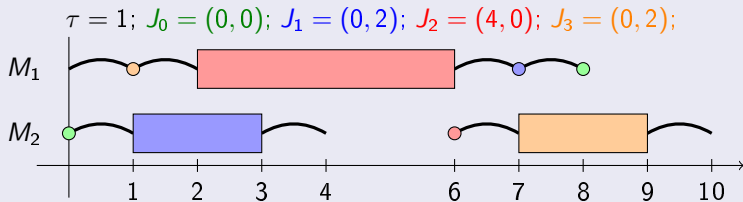
[A. Chechushkov, Ch 2023]



Новая нижняя оценка ρ^* .



[A. Chechushkov, Ch 2023]



$$\frac{5}{4} \leq \rho^* \leq \frac{4}{3}.$$

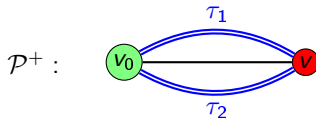
Новая гипотеза: $R_{\max}^* \leq \frac{5}{4} \bar{R}$.

Постановка задачи

- Работы не только в вершинах, но и на некоторых ребрах (туннелях). Каждый туннель содержит ровно одну работу.
- Работа в туннеле выполняется параллельно с передвижением. После выполнения работы машина оказывается в другом конце туннеля.
- Передвижение без выполнения работы возможно, как и раньше. Выполнение работы одной машиной не мешает передвижению другой.
- Пересечение интервалов выполнения туннельных работ запрещено.

Теорема [Ch 2021]

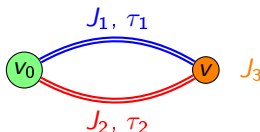
Любой пример задачи $RO2||R_{\max}$ может быть сведен с сохранением стандартной нижней оценки с примеру задачи с маршрутизацией и туннелями $\overline{RO2}|G = \mathcal{P}^+|R_{\max}$ со двумя вершинами и двумя параллельными туннелями, одной работой в базе и не более тремя работами в вершине v .



$$R_{\max}^* \leq \frac{5}{4} \overline{R}?$$

Теорема

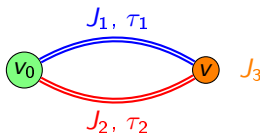
Для любого примера задачи $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+|R_{\max}$ длина оптимального расписания не превышает $\frac{4}{3}\overline{\overline{R}}$, и эта оценка точна.



Локализация оптимумов для $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+|R_{\max}$

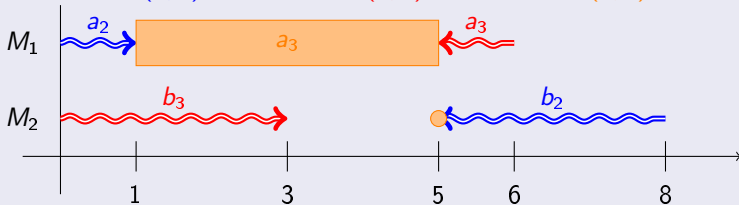
Теорема

Для любого примера задачи $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+|R_{\max}$ длина оптимального расписания не превышает $\frac{4}{3}\overline{\overline{R}}$, и эта оценка точна.



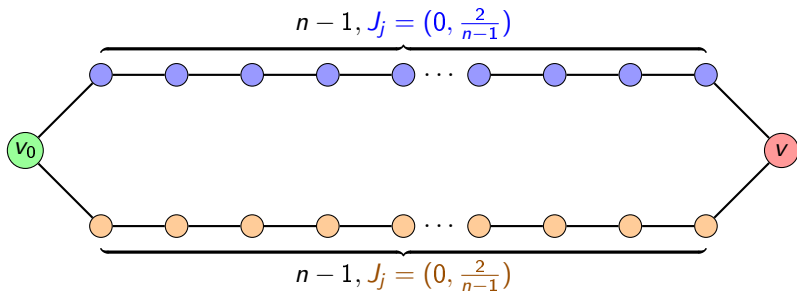
Пример

$$J_1 = (0, 2), \tau_1 = 1, J_2 = (0, 2), \tau_2 = 1, J_3 = (4, 0).$$

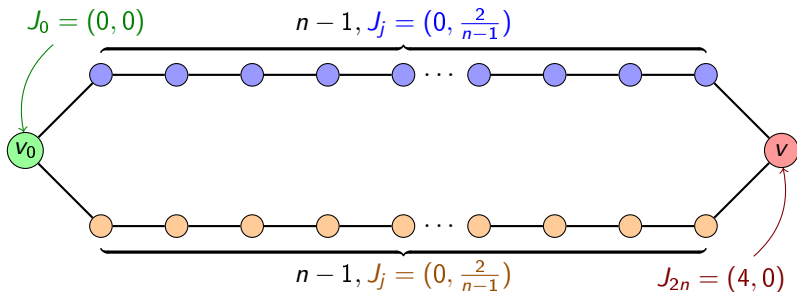


Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$

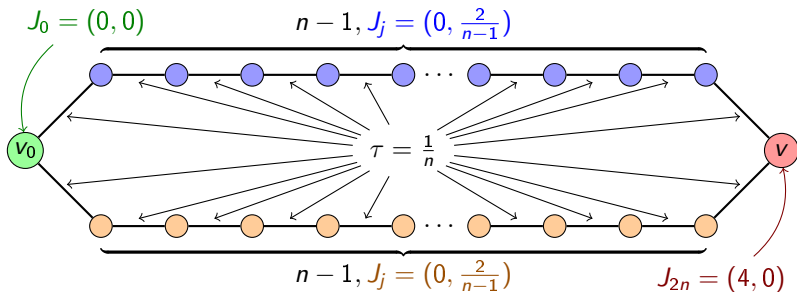
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



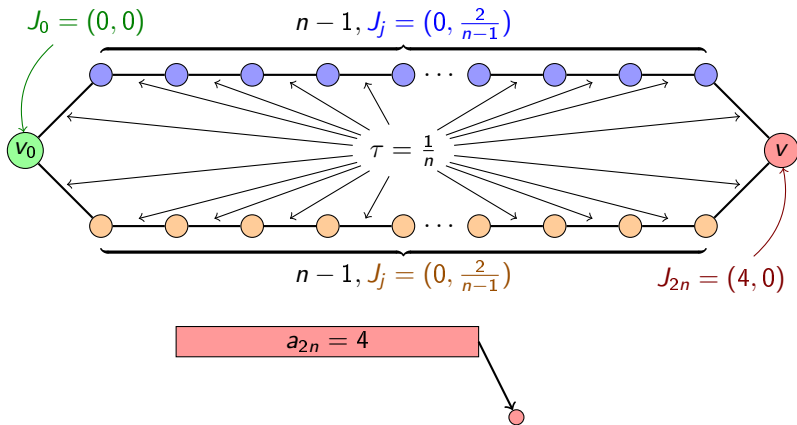
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



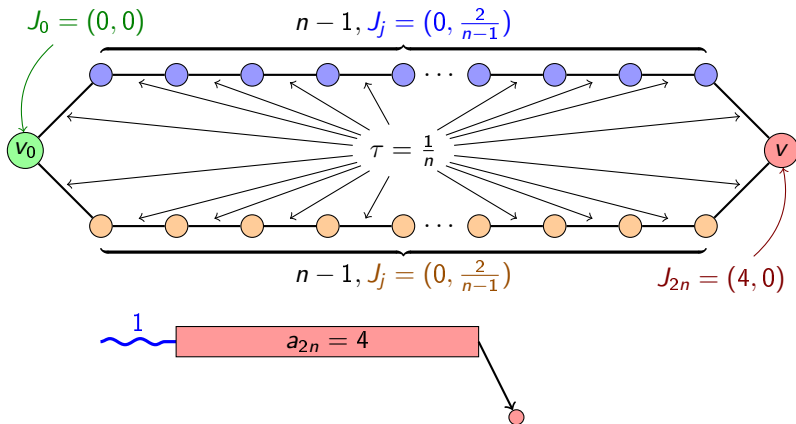
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



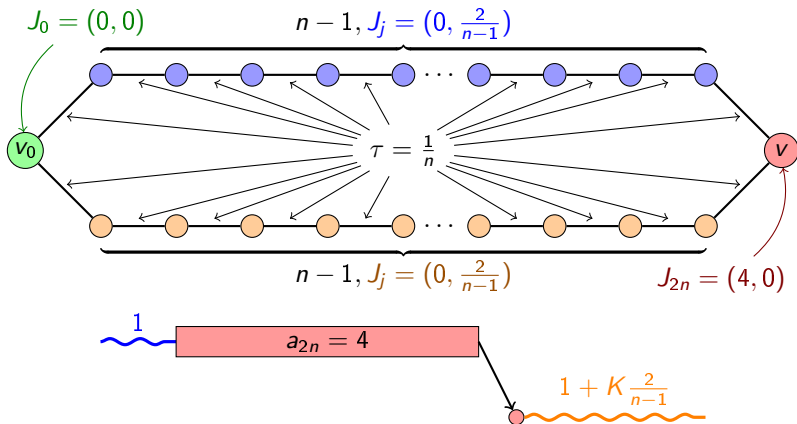
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



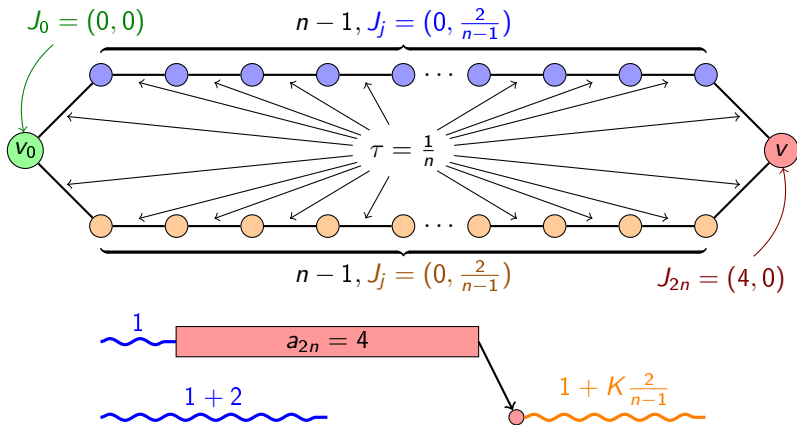
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



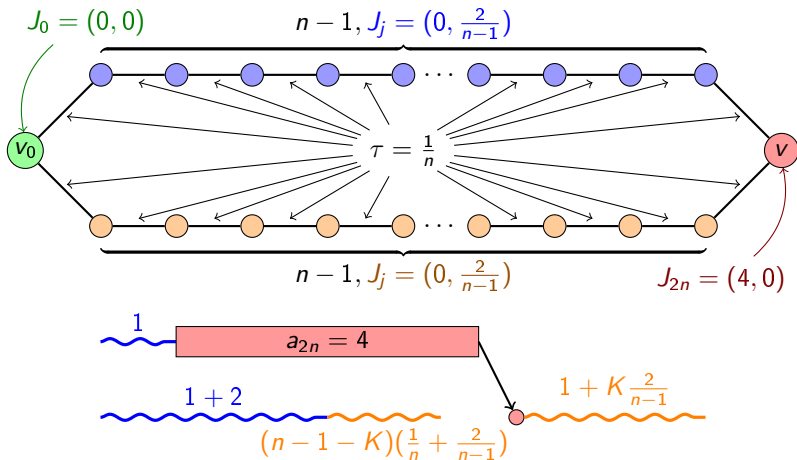
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



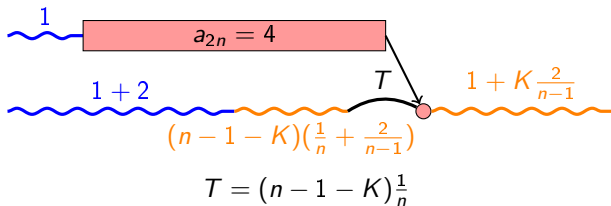
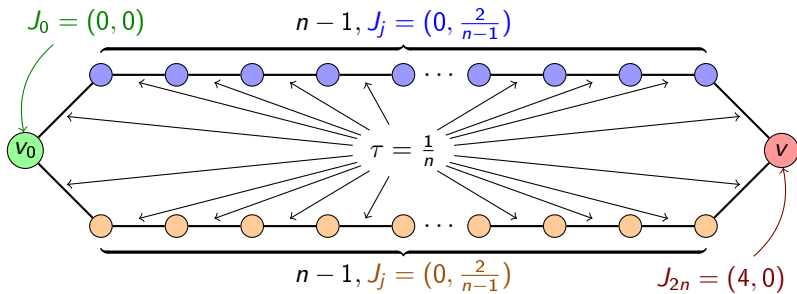
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



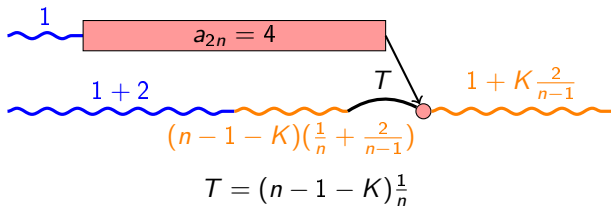
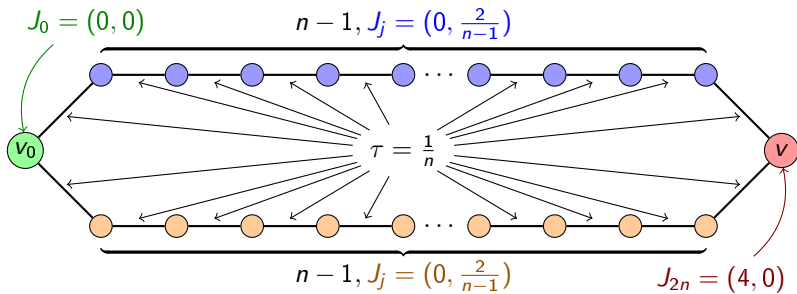
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



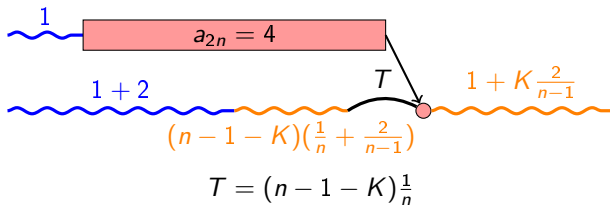
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$



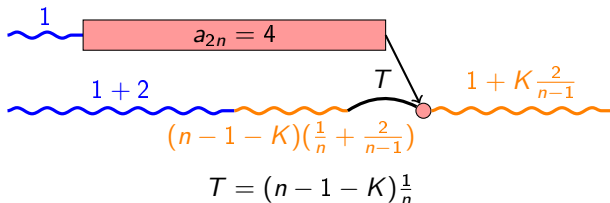
Основной результат: локализация оптимумов для $RO2||R_{\max}$ (не получилось)



Оценка длины расписания



Оценка длины расписания

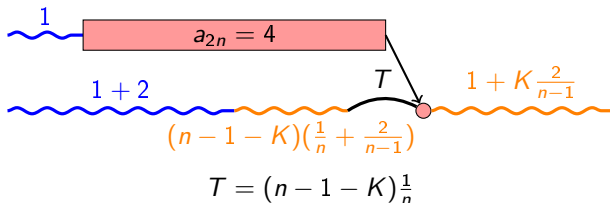


1 $R_{\max} \geq 6 + K \frac{2}{n-1} = R_1.$

2 Оценим время работы второй машины:

$$\begin{aligned} R_{\max} &\geq 3 + (n-1-K) \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} \right) + (n-1-K) \frac{1}{n} + 1 + K \frac{2}{n-1} \\ &= 4 + \frac{2(n-1-K+K)}{n-1} + 2 \frac{n-1-K}{n} = 6 + 2 \frac{n-1-K}{n} = R_2 \end{aligned}$$

Оценка длины расписания



1 $R_{\max} \geq 6 + K \frac{2}{n-1} = R_1.$

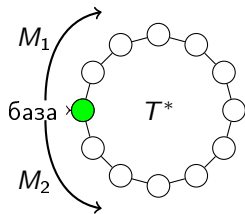
2 Оценим время работы второй машины:

$$\begin{aligned} R_{\max} &\geq 3 + (n-1-K) \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} \right) + (n-1-K) \frac{1}{n} + 1 + K \frac{2}{n-1} \\ &= 4 + \frac{2(n-1-K+K)}{n-1} + 2 \frac{n-1-K}{n} = 6 + 2 \frac{n-1-K}{n} = R_2 \end{aligned}$$

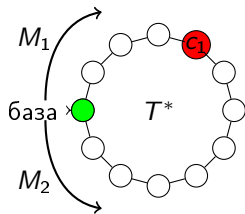
$$\frac{n-1}{n} R_1 + R_2 \geq 6 \frac{n-1}{n} + 6 + 2 \frac{n-1}{n} > 14 \frac{n-1}{n} \dots$$

Попробуем по-другому...

Попробуем по-другому...

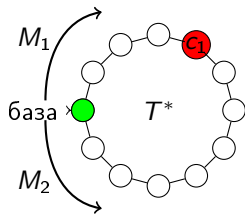


Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$

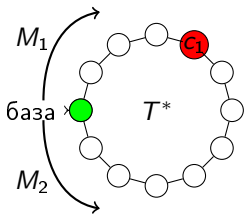
Попробуем по-другому...



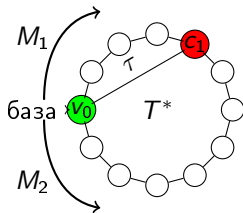
$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$

$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

Попробуем по-другому...

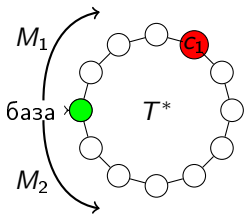


$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$

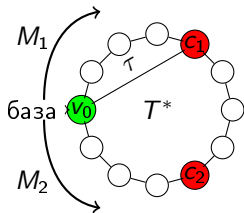


$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

Попробуем по-другому...



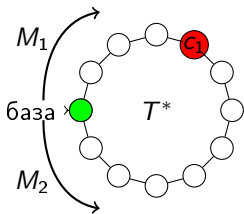
$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



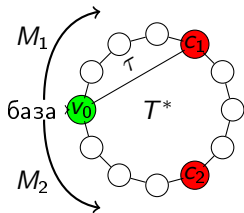
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$

$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$

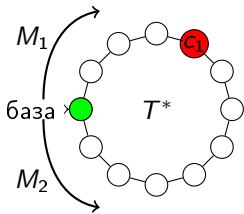


$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$

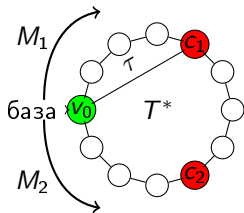
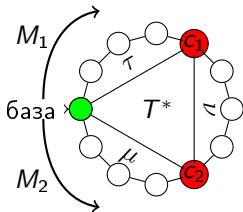
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$

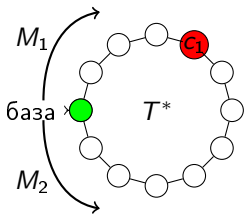


$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$

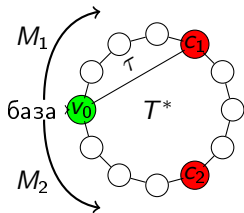
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

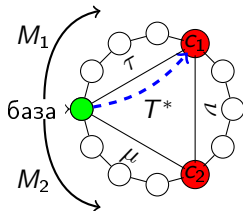
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



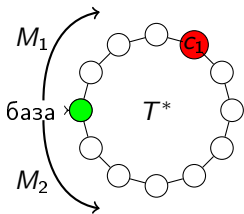
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



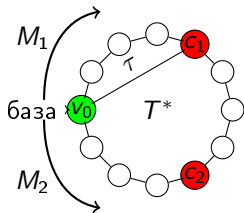
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

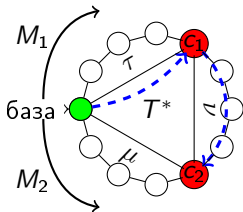
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



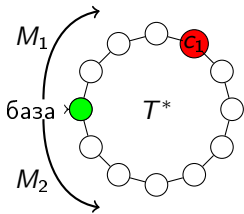
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



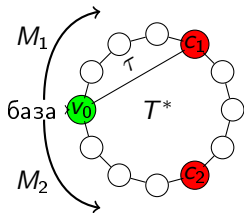
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

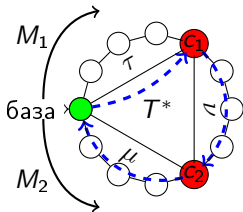
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



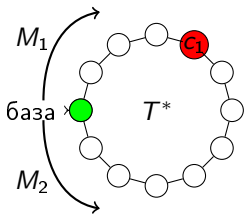
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



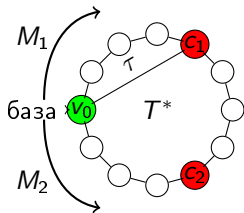
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

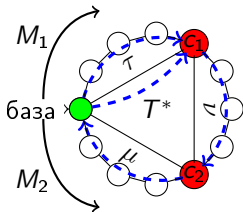
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



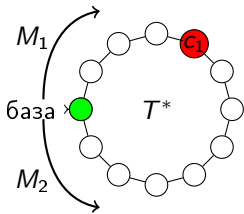
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



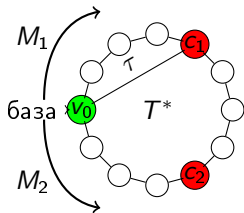
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

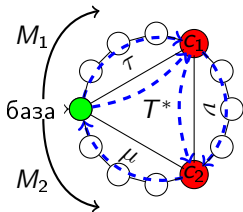
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



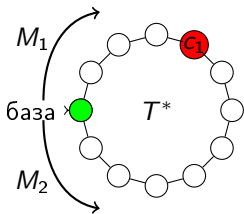
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



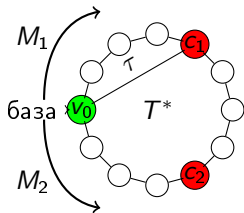
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

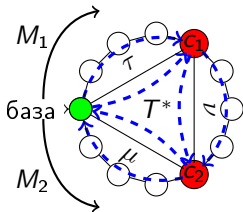
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



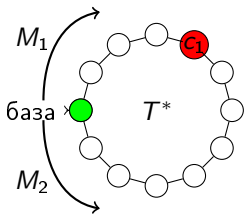
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$



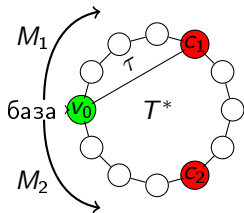
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

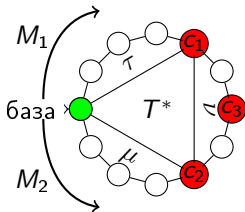
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$

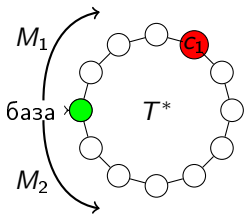


$$R_3 \leq \ell_{\max} + T^* + \tau + \mu + \nu + \frac{1}{2}d_{c3}$$

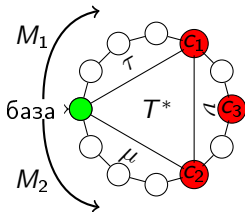
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

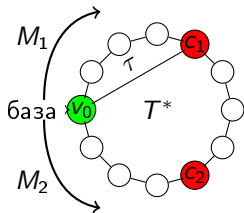
Попробуем по-другому...



$$R_1 \leq \ell_{\max} + T^* + \frac{1}{2}d_{c1}$$



$$R_3 \leq \ell_{\max} + T^* + \tau + \mu + \nu + \frac{1}{2}d_{c3}$$

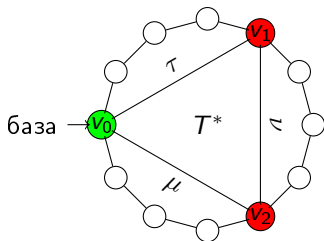


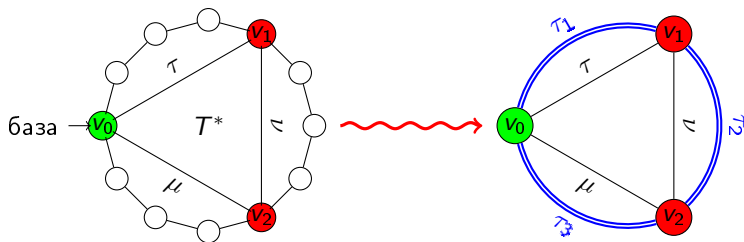
$$R_2 \leq \ell_{\max} + T^* + 2\tau + \frac{1}{2}d_{c2}$$

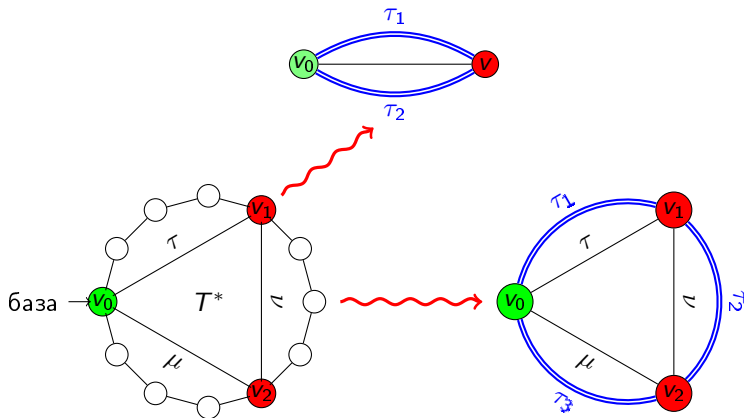
$$R_1 \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

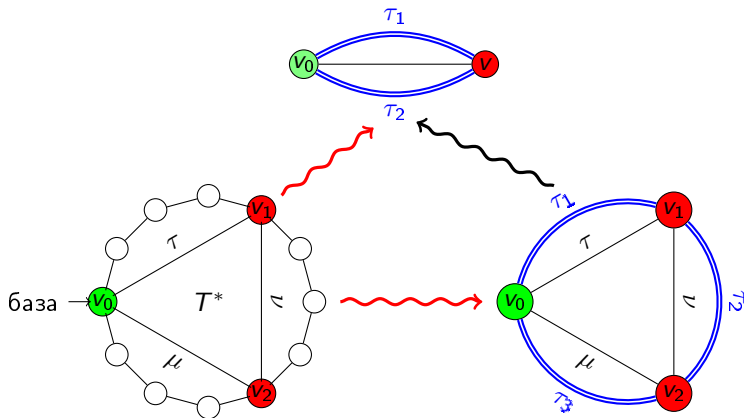
$$\min\{R_1, R_2\} \leq \frac{3}{2}\bar{R}$$

$$\min\{R_1, R_2, R_3\} \leq \frac{7}{5}\bar{R}...$$

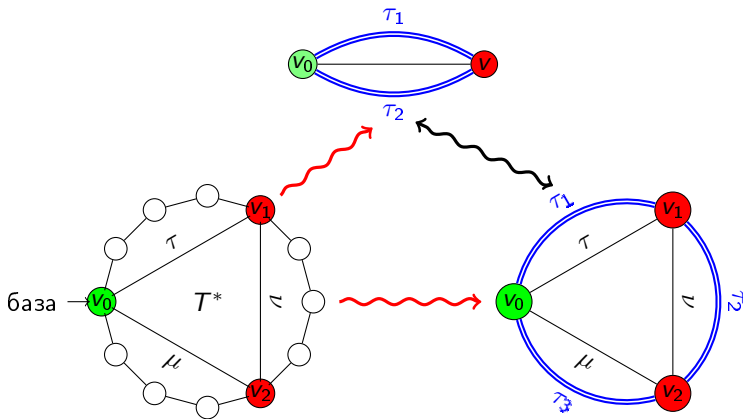






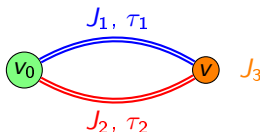


Новая идея (тоже не получилось)



Теорема

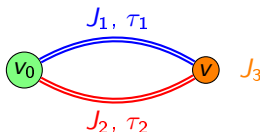
Для любого примера задачи $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-prpt}|R_{\max}$ длина оптимального расписания не превышает $\frac{4}{3}\overline{\overline{R}}$, и эта оценка точна.



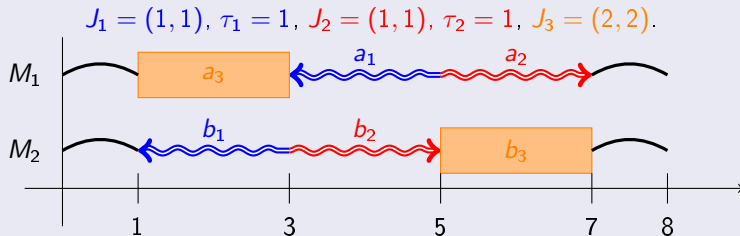
Локализация оптимумов для $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-}prpt|R_{\max}$

Теорема

Для любого примера задачи $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-}prpt|R_{\max}$ длина оптимального расписания не превышает $\frac{4}{3}\overline{\overline{R}}$, и эта оценка точна.



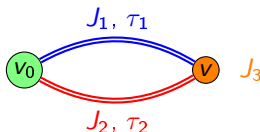
Пример



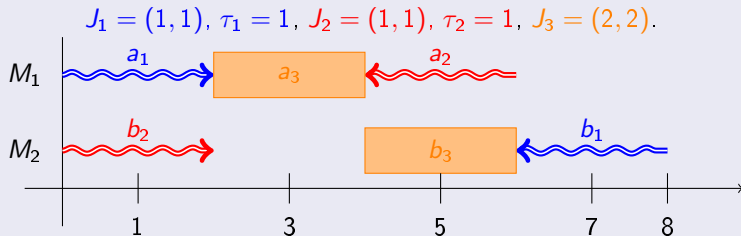
Локализация оптимумов для $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-}prpt|R_{\max}$

Теорема

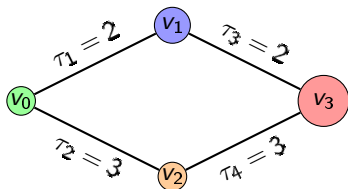
Для любого примера задачи $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-}prpt|R_{\max}$ длина оптимального расписания не превышает $\frac{4}{3}\overline{\overline{R}}$, и эта оценка точна.



Пример

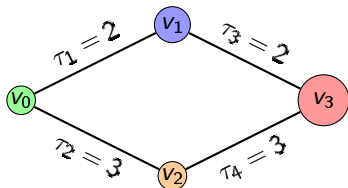


Новый пример для задачи $RO2|j\text{-}prpt, G = C_4|R_{\max}$

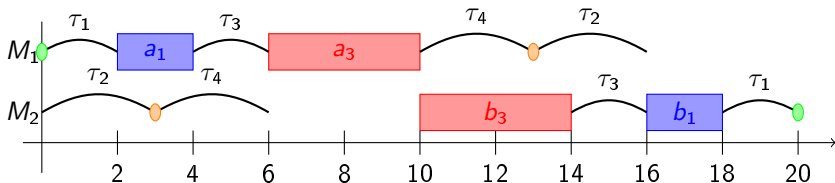


$$J_0 = (0, 0), J_1 = (2, 2), J_2 = (0, 0), J_3 = (4, 4)$$

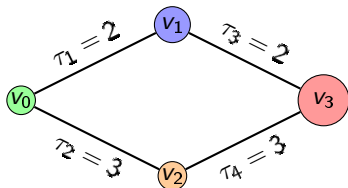
Новый пример для задачи $RO2|j\text{-}prpt, G = C_4|R_{\max}$



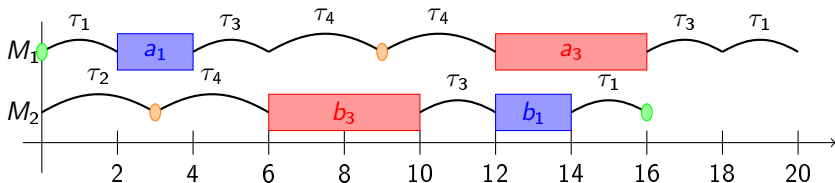
$$J_0 = (0, 0), J_1 = (2, 2), J_2 = (0, 0), J_3 = (4, 4)$$



Новый пример для задачи $RO2|j\text{-}prpt, G = C_4|R_{\max}$



$$J_0 = (0, 0), J_1 = (2, 2), J_2 = (0, 0), J_3 = (4, 4)$$



Что мы знаем про локализацию оптимумов для $RO2||R_{\max}$

Структура графа	Длительности	
	соразмерные	произвольные
$G = K_2$	$[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$	$[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$
$G = K_3$	$[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$	$[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$
$G = tree$	$[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$	$[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$
$G = C_4$	$[\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$	$[\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$
G произвольный	$[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]?$	$[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]?$

Задача open shop с маршрутизацией и индивидуальными временами перемещения машин

Особенности постановки

- Для каждой машины M_i есть своя функция dist_i , определяющая время перемещения между вершинами.
- Различаем постановки с однородными ($RO2|Qtt|R_{\max}$) и независимыми ($RO2|Rtt|R_{\max}$) временами перемещения.

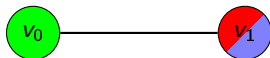
Дополнительные обозначения

- Вместо $\text{dist}(v, u)$: $\text{dist}_1(v, u)$ и $\text{dist}_2(v, u)$.
- Вместо T^* : T_1^* и T_2^* .

Стандартная нижняя оценка

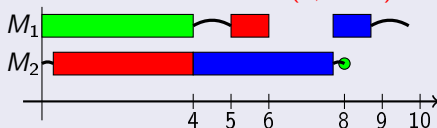
$$\bar{R} = \max \left\{ \max_i (\ell_i + T_1^*), \max_v (d_{\max}(v) + \text{dist}_1(v_0, v) + \text{dist}_2(v_0, v)) \right\}$$

Точность нижней оценки для $RO2|Qtt|R_{\max}$ и $RO2|Rtt|R_{\max}$



[Ch, Lgotina 2019]

$J_1 = (4, 0)$; $\text{dist}_1 = 1$; $\text{dist}_2 = \varepsilon$; $J_2 = (1, 4 - \varepsilon)$; $J_3 = (1, 4 - \varepsilon)$.



Алгоритм Кононова для $RO2|Rtt|R_{\max}$

- 1 Для каждой машины найти приближенный обход с помощью алгоритма Кристофидеса-Сердюкова:

$$T_1 \leq \frac{3}{2} T_1^*, \quad T_2 \leq \frac{3}{2} T_2^*$$

- 2 Каждая машина выполняет операции в порядке, определённом своим обходом.
- 3 В случае возникновения конфликта приоритет отдается той машине, которая закончит свою операцию раньше, если пойдет первой.

Свойство: машина M_i заканчивает работу в момент времени

$$R_i \leq \frac{3}{2} T_i^* + 2\ell_i \leq 2\bar{R}.$$

Алгоритм Кононова для $RO2|Rtt|R_{\max}$

- 1 Для каждой машины найти приближенный обход с помощью алгоритма Кристофидеса-Сердюкова:

$$T_1 \leq \frac{3}{2} T_1^*, \quad T_2 \leq \frac{3}{2} T_2^*$$

- 2 Каждая машина выполняет операции в порядке, определённом своим обходом.
- 3 В случае возникновения конфликта приоритет отдается той машине, которая закончит свою операцию раньше, если пойдет первой.

Свойство: машина M_i заканчивает работу в момент времени

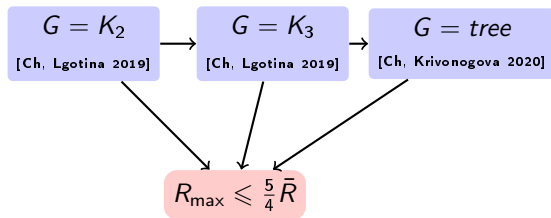
$$R_i \leq \frac{3}{2} T_i^* + 2\ell_i \leq 2\bar{R}.$$

Теорема

Для любого примера задачи $RO2|Rtt|R_{\max}$ можно за полиномиальное время построить расписание длины не больше $2\bar{R}$.

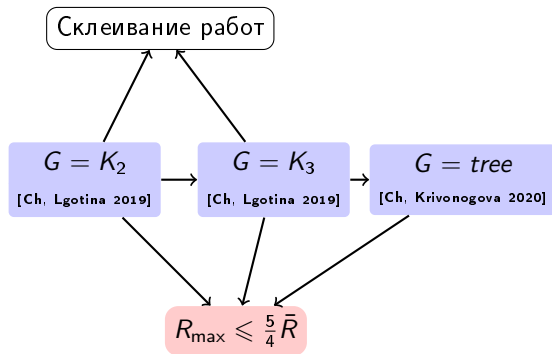
История исследования “простых примеров”

$RO2|R_{tt}|R_{\max}$



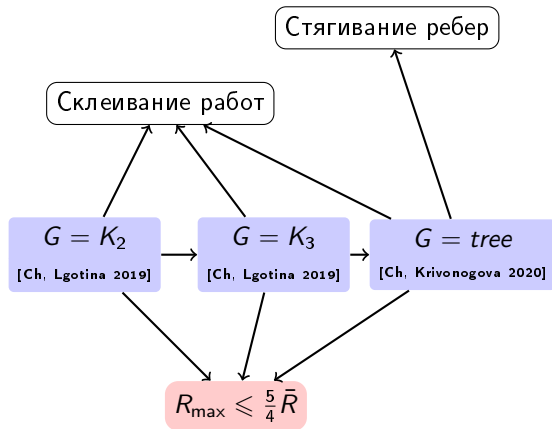
История исследования “простых примеров”

$RO2|R_{tt}|R_{\max}$



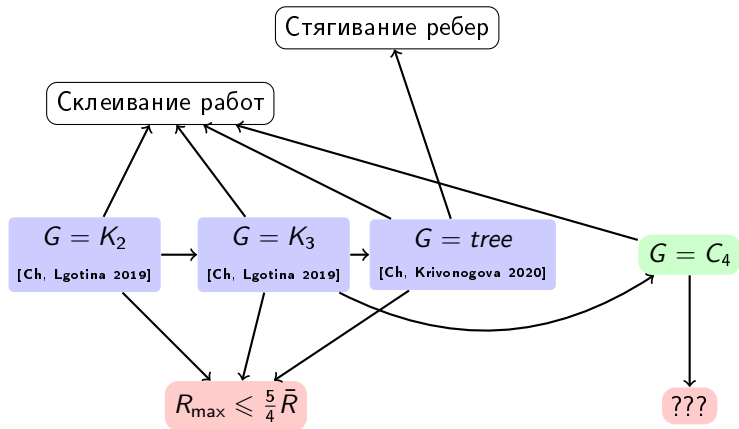
История исследования “простых примеров”

$RO2|R_{tt}|R_{\max}$



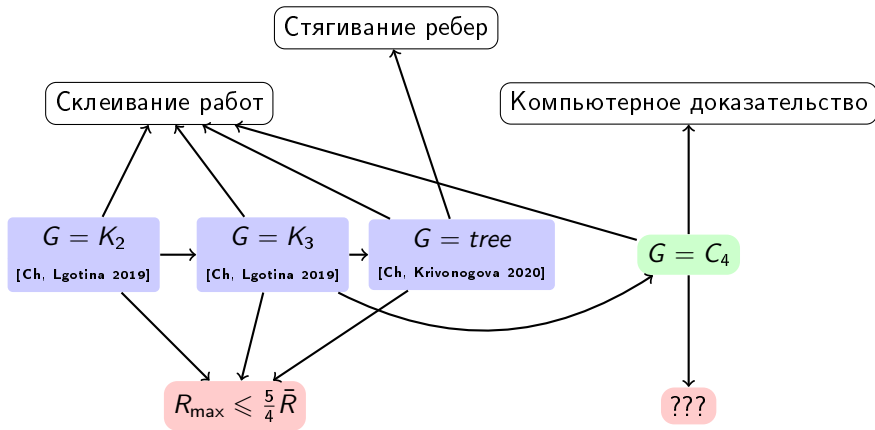
История исследования “простых примеров”

$RO2|R_{tt}|R_{\max}$

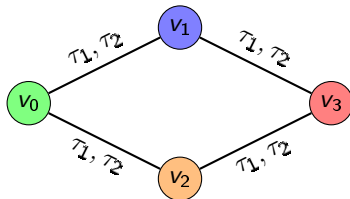


История исследования “простых примеров”

$RO2|R_{tt}|R_{\max}$

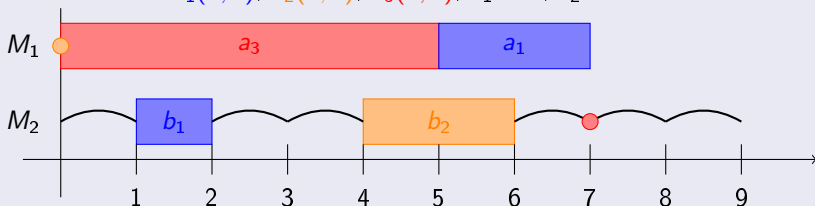


Новый пример для $RO2|R_{tt}, G = C_4|R_{\max}$



Пример

$$J_1(2, 1); J_2(0, 2); J_3(5, 0); \tau_1 = 0, \tau_2 = 1.$$



Лемма

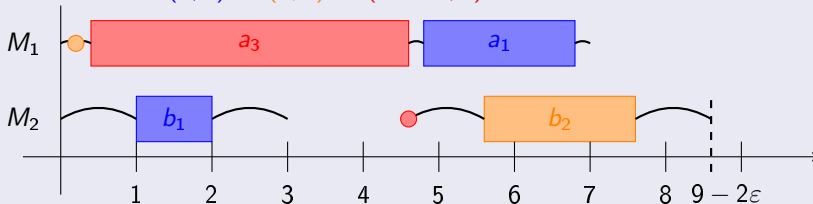
Для любого примера $RO2|Rtt, G = C_4|R_{\max}$ без перегруженных вершин длина оптимального расписания не превышает $\frac{9}{7}\bar{R}$, и эта оценка точна. Допустимое расписание длины не больше $\frac{9}{7}\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

Лемма

Для любого примера $RO2|Rtt, G = C_4|R_{\max}$ без перегруженных вершин длина оптимального расписания не превышает $\frac{9}{7}\bar{R}$, и эта оценка точна. Допустимое расписание длины не больше $\frac{9}{7}\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

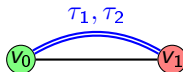
Примечание: для $RO2|Qtt, G = C_4|R_{\max}$ оценка также точна.

$$J_1(2, 1); J_2(0, 2); J_3(5 - 4\epsilon, 0); \tau_1 = \epsilon, \tau_2 = 1.$$

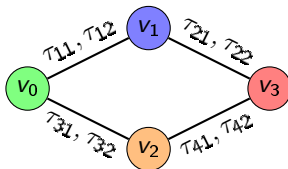


А если есть перегруженная вершина?

- 1 Если перегружена база, то $R_{\max}^* = \bar{R}$ [Ch 2021]
- 2 Если перегружена одна из вершин v_1, v_2 , то задача сводится к следующей структуре:



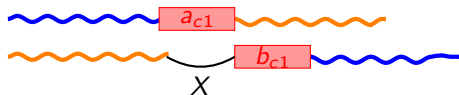
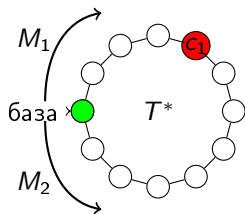
- 3 Самый сложный случай — когда перегружена вершина v_3 .



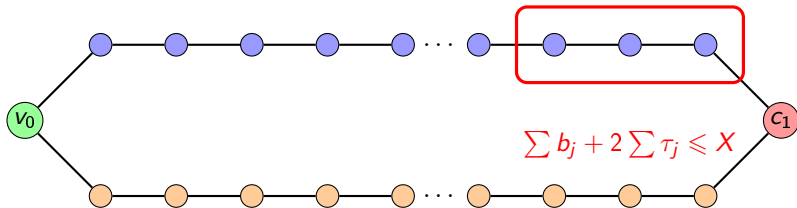
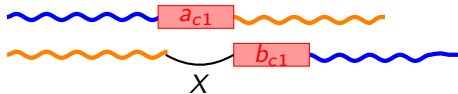
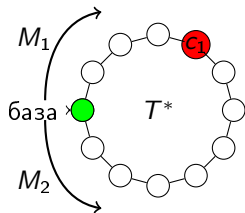
$$\text{dist}_i(v_0, v_3) = \min\{\tau_{1i} + \tau_{2i}, \tau_{3i} + \tau_{4i}\}$$

- 1 Для задачи $RO2||R_{\max}$ верхняя граница интервала локализации оптимумов лежит между $\frac{5}{4}$ и $\frac{4}{3}$
- 2 Актуальная гипотеза: $[\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$
- 3 Методика сведения к задаче с туннелями вероятно не поможет подтвердить гипотезу.
- 4 Поиск контрпримеров будет продолжаться с помощью компьютера. (*Задача: придумать перспективные простые структуры транспортной сети*)
- 5 Для задач $\bar{RO2}|G = \mathcal{P}^+|R_{\max}$ и $\bar{RO2}|G = \mathcal{P}^+, j\text{-}prpt|R_{\max}$ найден точный интервал локализации оптимумов: $[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]$.
- 6 Найден пример для задачи $RO2|G = C_4, j\text{-}prpt|C_{\max}$, для которого $C_{\max}^* = \frac{5}{4}\bar{C}$.
- 7 Для задачи $RO2|Rtt, G = C_4|R_{\max}$ найден новый рекордный пример с отношением оптимума к стандартной нижней оценке $\frac{9}{7}$
- 8 Вероятно, этот пример является критическим для $G = C_4$, а оценка $\frac{9}{7}$ — точной (*либо верно, либо найдется новая более сильная оценка*).
- 9 Программа работает! Будут новые результаты.

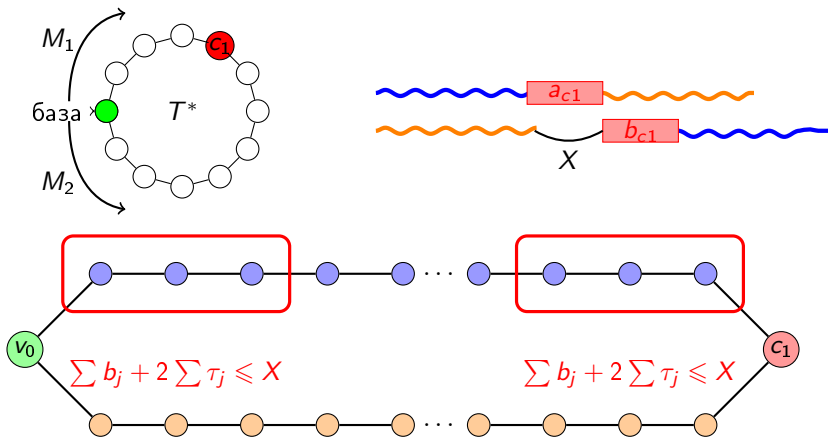
Есть еще идея...



Есть еще идея...



Есть еще идея...



Часть вторая, дополнительная.

О локализации оптимумов для $F4||C_{\max}$.

Постановка

Требуется составить расписание выполнения n работ m машинами за кратчайшее время. При этом операции каждой работы должны выполняться в одной и той же последовательности: сначала на машине M_1 , потом на M_2 и так далее. Одновременное выполнение двух операций на одной машине запрещено.

Замечание: разные машины могут выполнять работы в разном порядке.

Сложность

- 1 Задача $F2||C_{\max}$ разрешима за $O(n \log n)$ [Johnson 1953]
- 2 Задача $F3||C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле.

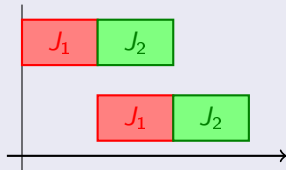
Стандартная нижняя оценка

$$\bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Локализация оптимумов

$$F2 || C_{\max}: C_{\max}^* \leq 3/2 \bar{C}$$

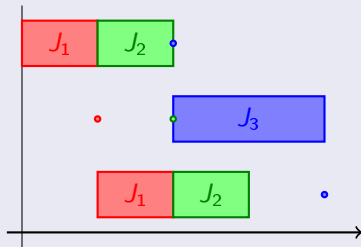
$$J_1 = (1, 1), J_2 = (1, 1)$$



$$F3 || C_{\max}: C_{\max}^* \leq 2 \bar{C}$$

$$J_1 = (1, 1, 0), J_2 = (1, 1, 0),$$

$$J_3 = (0, 2, 0)$$



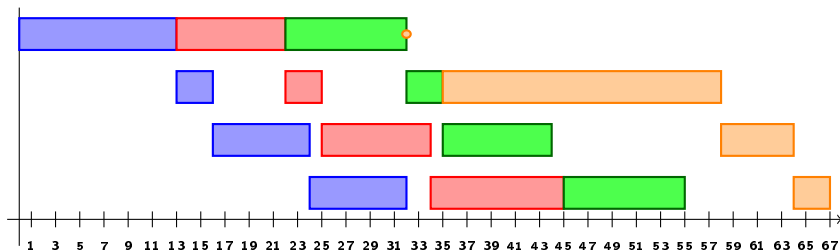
Наилучший известный пример для $F4||C_{\max}$

$F4||C_{\max}$

$$J_1 = (13, 3, 8, 8), J_2 = (9, 3, 9, 11), J_3 = (10, 3, 9, 10), J_4 = (0, 23, 6, 3)$$

$$C_{\max}^* = 67 = \frac{67}{32} \bar{C} = 2.09375 \bar{C}.$$

Точность не подтверждена.



Некоторые особенности задачи

Для множества $\mathcal{I}_4$ всех нетривиальных примеров задачи $F4||C_{\max}$ мы хотим найти

$$\rho^* = \sup_{I \in \mathcal{I}_4} \frac{C_{\max}^*(I)}{\bar{C}(I)}.$$

- 1 Достаточно рассматривать примеры с не более чем 7 работами. Для начала ограничимся случаем $n = 4$.
- 2 Без ограничения общности можно считать, что $\bar{C} = 1$.
- 3 Без ограничения общности можно считать, что нагрузки всех машин равны $\bar{C}$.
- 4 Для задачи $F4||C_{\max}$ всегда существует оптимальное расписание, в котором совпадает порядок выполнения работ на первых двух машинах, и совпадает порядок на последних двух машинах.
- 5 Таким образом, для примера с n работами достаточно перебрать $(n!)^2$ расписаний.
- 6 Для нахождения длины расписания, заданного парой перестановок, достаточно перебрать длины всех полных путей в графе частичного порядка выполнения операций (для $n = 4$ таких путей 20).

- Допустимые решения (примеры задачи): дважды стохастические матрицы 4×4 . (Строки — машины, столбцы — работы.)
- Целевая функция: длина оптимального расписания соответствующего примера.

$$F(A) = \min_{(\pi_1, \pi_2)} \max_{P \in \mathcal{P}(\pi_1, \pi_2)} |P(A)|,$$

где

- π_1, π_2 — перестановки четырех элементов,
- $\mathcal{P}(\pi_1, \pi_2)$ — множество полных путей в графе предшествования, заданного перестановками,
- $|P(A)|$ — длина пути P на соответствующих элементах матрицы A .

$$F(A) \rightarrow \max.$$

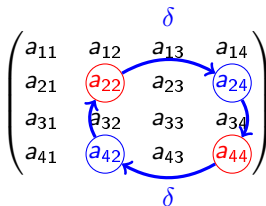
Окрестность 4-cycle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

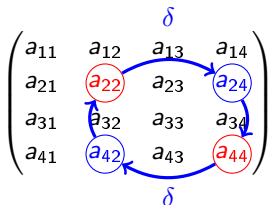
Окрестность 4-cycle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \textcolor{red}{a_{22}} & a_{23} & \textcolor{blue}{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \textcolor{blue}{a_{42}} & a_{43} & \textcolor{red}{a_{44}} \end{pmatrix}$$

Окрестность 4-cycle



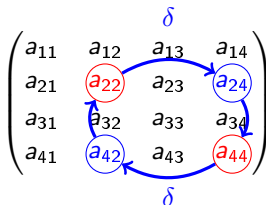
Окрестность 4-cycle



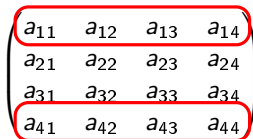
Окрестность 2-swap

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

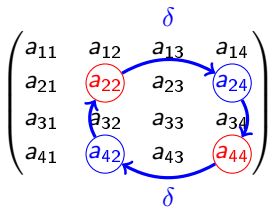
Окрестность 4-cycle



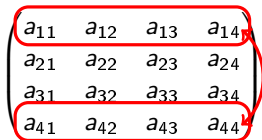
Окрестность 2-swap



Окрестность 4-cycle



Окрестность 2-swap



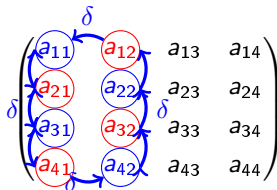
Окрестность 8-cycle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

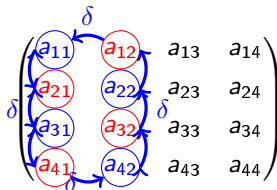
Окрестность 8-cycle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Окрестность 8-cycle



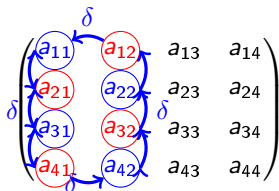
Окрестность 8-cycle



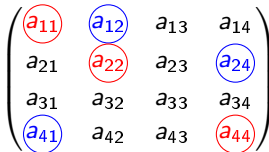
Окрестность 6-cycle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

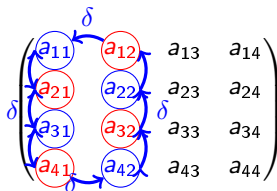
Окрестность 8-cycle



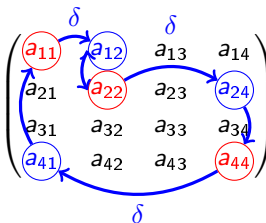
Окрестность 6-cycle



Окрестность 8-cycle



Окрестность 6-cycle



Окрестность `permutation` — перестановка строк.

Окрестность `randon shift` — выпуклая комбинация со случайной дважды-стохастической матрицей.

Окрестность `partial 4-cycle` — “перемещение” по короткому циклу только части минимального элемента.

Окрестность `permutation` — перестановка строк.

Окрестность `randon shift` — выпуклая комбинация со случайной дважды-стохастической матрицей.

Окрестность `partial 4-cycle` — “перемещение” по короткому циклу только части минимального элемента.

Окрестность `double 4-cycle`

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Окрестность `permutation` — перестановка строк.

Окрестность `randon shift` — выпуклая комбинация со случайной дважды-стохастической матрицей.

Окрестность `partial 4-cycle` — “перемещение” по короткому циклу только части минимального элемента.

Окрестность `double 4-cycle`

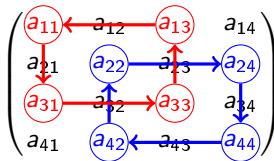
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Окрестность `permutation` — перестановка строк.

Окрестность `random shift` — выпуклая комбинация со случайной дважды-стохастической матрицей.

Окрестность `partial 4-cycle` — “перемещение” по короткому циклу только части минимального элемента.

Окрестность `double 4-cycle`



Генетический алгоритм: нужны идеи

- 1 Генерация случайных дважды-стохастических матриц (случайные выпуклые комбинации случайных матриц подстановок / перестановочных матриц).
- 2 Для каждой особи запускаем локальный поиск в окрестности 4-cycle
- 3 Скрещивание: для случайного $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{parent}_1 &\rightarrow \text{child}_1 = \alpha \text{parent}_1 + (1 - \alpha) \text{parent}_2 \\ \text{parent}_2 &\rightarrow \text{child}_2 = (1 - \alpha) \text{parent}_1 + \alpha \text{parent}_2 \end{aligned}$$

- 4 Для детей тоже запускаем локальный поиск
- 5 Мутация — ???
 - Мутуруем случайный элемент
 - Пока матрица не дважды-стохастическая
 - Нормализуем строки
 - Нормализуем столбцы(сходится, но долго)