

Эффективные алгоритмы для некоторых вариантов трехмашинной задачи open shop

Илья Черных

Институт математики им. С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы
для задач составления расписаний”
18.04.2026

*Исследование выполнено за счёт гранта
Российского научного фонда №22-71-10015-П*

Входные данные

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Расписание

Для каждой операции O_{ji} назначить интервал выполнения $[s_{ji}, c_{ji}]$,
 $c_{ji} = s_{ji} + p_{ji}$.

Ограничения

- Операции одной машины или операции одной работы не должны выполняться одновременно.
- Операции могут выполняться в произвольном порядке.

Входные данные

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Расписание

Для каждой операции O_{ji} назначить интервал выполнения $[s_{ji}, c_{ji}]$,
 $c_{ji} = s_{ji} + p_{ji}$.

Ограничения

- Операции одной машины или операции одной работы не должны выполняться одновременно.
- Операции могут выполняться в произвольном порядке.

Целевая функция (makespan, C_{\max})

Цель: минимизировать **длину расписания** $C_{\max} = \max_{j,i} c_{ji}$.

- $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$ [Gonzalez, Sahní 1976] (5 известных алгоритмов);
- $O3||C_{\max}$ NP-трудна (сильная NP-трудность — открытый вопрос) [Gonzalez, Sahní 1976];
- $Om||C_{\max}$: PTAS [Sevastyanov, Woeginger 2001]
- $O||C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле, есть порог неприближаемости $\frac{5}{4}$ [Williamson *et al* 1997].

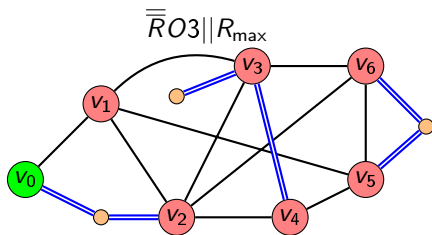
Два рассматриваемых варианта

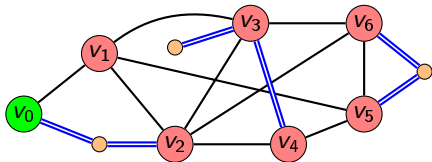
$$O3 | \text{rank } P = 1 | C_{\max}$$

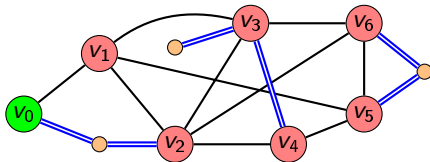
$$P = \begin{pmatrix} \alpha\beta p_1 & \alpha\beta p_2 & \dots & \alpha\beta p_n \\ \beta p_1 & \beta p_2 & \dots & \beta p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Частный случай: $\beta = 1$:

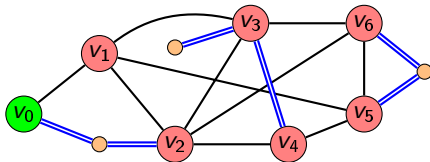
$$P = \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha p_2 & \dots & \alpha p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$



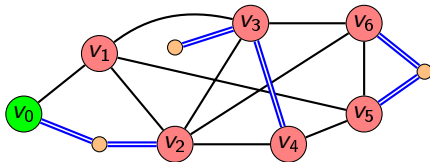




- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
 - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
 - Содержат по одной работе (длительности операций!).
 - Любое количество машин могут перемещаться по тоннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном тоннеле.
 - Машина выполняет операцию в тоннеле в процессе перемещения.



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **тоннели**:
 - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
 - Содержат по одной работе (длительности операций!).
 - Любое количество машин могут перемещаться по тоннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном тоннеле.
 - Машина выполняет операцию в тоннеле в процессе перемещения.
- Требуется выполнить все работы и вернуться на базу ASAP.

Обозначения $\overline{R}Om || R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T_{RPP}^* — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
 - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ ,
 - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ ,
 - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$.

Обозначения $\overline{\overline{R}}_{Om} || R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T_{RPP}^* — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
 - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ ,
 - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ ,
 - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \right. \\ \left. \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

Алгоритм Авербаха-Бермана и его приложение для задачи с маршрутизацией

- Алгоритм строит перестановочное расписание для задачи $Fm||C_{\max}$.
 - 1 Выбираем произвольную перестановку работ π .
 - 2 Строим два перестановочных расписания: в прямом порядке π и обратном π^{-1} .
 - 3 Выбираем лучшее из двух.
- Длина полученного расписания не превосходит $\frac{ml_{\max} + \bar{C}}{2}$, где $\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$.

Алгоритм Авербаха-Бермана и его приложение для задачи с маршрутизацией

- Алгоритм строит перестановочное расписание для задачи $Fm||C_{\max}$.
 - 1 Выбираем произвольную перестановку работ π .
 - 2 Строим два перестановочных расписания: в прямом порядке π и обратном π^{-1} .
 - 3 Выбираем лучшее из двух.
- Длина полученного расписания не превосходит $\frac{ml_{\max} + \bar{C}}{2}$, где $\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$.

Для задачи с маршрутизацией:

- 1 Строим некоторый обход транспортной сети σ . Выбираем перестановку работ π , согласованную с σ .
- 2 Строим расписание Авербаха-Бермана для задачи без маршрутизации относительно перестановки π .
- 3 “Раздвигаем” расписание, вставляя между работами расстояния между соответствующими вершинами.
- 4 Длина полученного расписания: $\frac{ml_{\max} + \bar{C}}{2} + |\sigma|$.

Алгоритм Авербаха-Бермана и его приложение для задачи с маршрутизацией

- Алгоритм строит перестановочное расписание для задачи $Fm||C_{\max}$.
 - 1 Выбираем произвольную перестановку работ π .
 - 2 Строим два перестановочных расписания: в прямом порядке π и обратном π^{-1} .
 - 3 Выбираем лучшее из двух.
- Длина полученного расписания не превосходит $\frac{ml_{\max} + \bar{C}}{2}$, где $\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$.

Для задачи с маршрутизацией:

- 1 Строим некоторый обход транспортной сети σ . Выбираем перестановку работ π , согласованную с σ .
- 2 Строим расписание Авербаха-Бермана для задачи без маршрутизации относительно перестановки π .
- 3 “Раздвигаем” расписание, вставляя между работами расстояния между соответствующими вершинами.
- 4 Длина полученного расписания: $\frac{ml_{\max} + \bar{C}}{2} + |\sigma|$.

Пример: для задачи $ROm||R_{\max}$: $\frac{m+1}{2}$ -приближенное расписание.

Иллюстрация для задачи с маршрутизацией

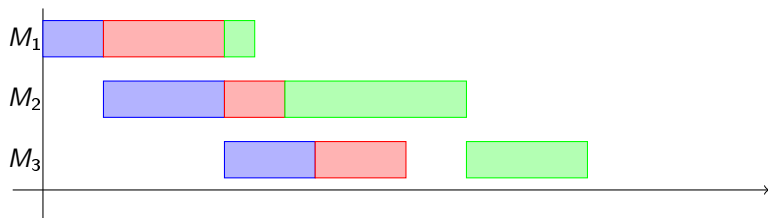


Иллюстрация для задачи с маршрутизацией

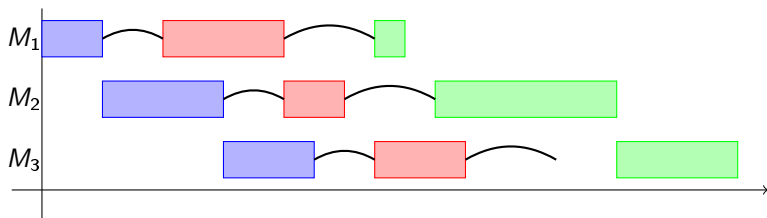


Иллюстрация для задачи с маршрутизацией

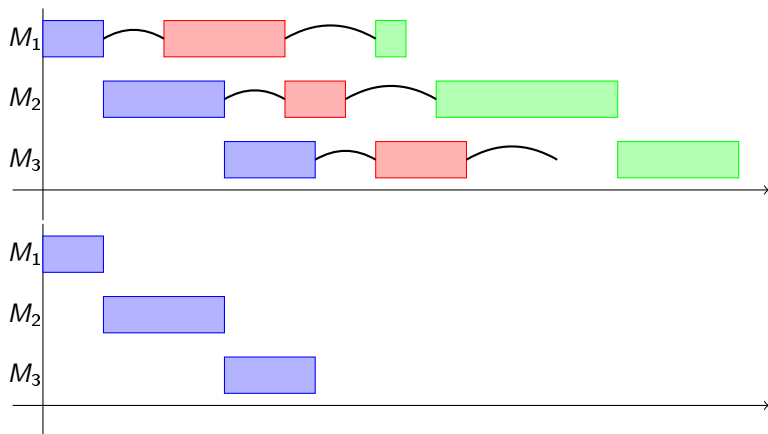
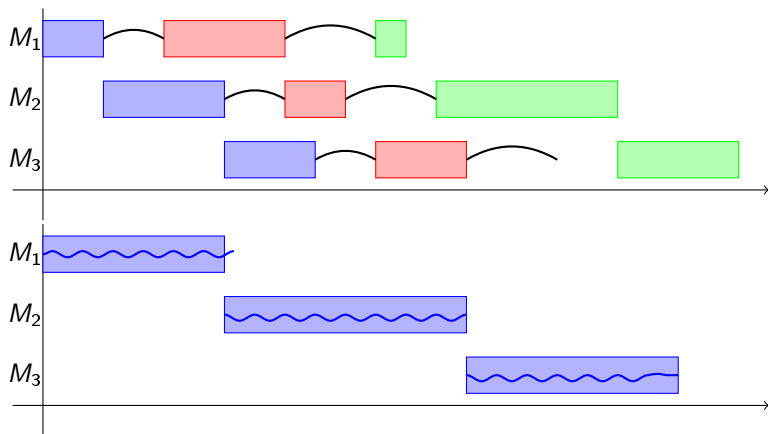


Иллюстрация для задачи с маршрутизацией



Алгоритм A_1

на базе Авербаха-Бермана

- 1 Построить приближенное решение задачи сельского почтальона (RPP) σ для транспортной сети алгоритмом Фредериксона и выбрать согласованную с σ перестановку работ π . $|\sigma| \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^*$.
- 2 Построить расписание Авербаха-Бермана относительно π .
- 3 Применить построенное расписание (порядок операций) к исходной задаче $\overline{RO3} || R_{\max}$.
- 4 Длина полученного расписания:

$$R_{\max}(S_{A_1}) \leq \frac{3l_{\max} + \bar{C}}{2} + |\sigma| + 2 \sum_{t \in T} |t| \leq \frac{3}{2} l_{\max} + \frac{\bar{C}}{2} + \frac{7}{2} T_{RPP}^*.$$

$$R_{\max}(S_{A_1}) \leq \frac{3}{2}l_{\max} + \frac{\bar{C}}{2} + \frac{7}{2}T_{RPP}^*.$$

- 1 Если $\bar{C} = l_{\max}$:

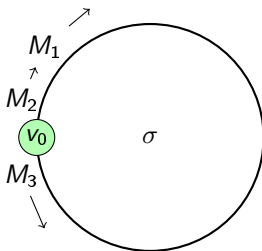
$$R_{\max}(S_{A_1}) \leq 2l_{\max} + 3.5T_{RPP}^* \leq 3.5(l_{\max} + T_{RPP}^*) \leq 3.5\bar{R}.$$

- 2 Если $\bar{C} = d_{\max} \leq 3l_{\max}$:

$$R_{\max}(S_{A_1}) \leq \frac{3}{2}l_{\max} + \frac{d_{\max}}{2} + 3.5T_{RPP}^* \leq \frac{3}{2}l_{\max} + \frac{3}{2}l_{\max} + 3.5T_{RPP}^* \leq 3.5\bar{R}.$$

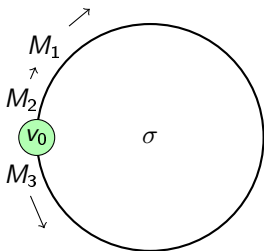
Алгоритм \mathcal{A}_2

Идея: Построить расписание для двух машин алгоритмом \mathcal{A}_1 , а третью машину пустить навстречу:



Алгоритм \mathcal{A}_2

Идея: Построить расписание для двух машин алгоритмом \mathcal{A}_1 , а третью машину пустить навстречу:



Для машин M_1, M_2 :

$$finish_{1,2} \leq l_{\max} + \frac{1}{2} \bar{C} + |\sigma| + \sum_{t \in \mathcal{T}} |t| \leq l_{\max} + \frac{1}{2} \bar{C} + 2.5 T_{RPP}^* \leq 2.5 \bar{R}$$

Для машины M_3 :

$$finish_3 \leq l_{\max} + |\sigma| + IDLE$$

1. Пусть “столкновение” M_3 с каждой из M_1, M_2 произошло в одном и том же туннеле $t' = [u, v]$:

1.1 Если $d'_{\max} \leq l_{\max}$:

$$IDLE \leq d'_{\max} + 2|t'| \leq l_{\max} + 2|t'|,$$

$$finish_3 \leq 2l_{\max} + \frac{3}{2}T_{RPP}^* + 2|t'|.$$

Если $2|t'| \leq l_{\max} + \frac{3}{2}T_{RPP}^*$, то $finish_3 \leq 3\bar{R}$.

Иначе: $|t'| > \frac{1}{2}l_{\max} + \frac{3}{4}T_{RPP}^*$, $dist(u, v) \leq T_{RPP}^* - |t'| \leq \frac{1}{4}T_{RPP}^* - \frac{1}{2}l_{\max}$.

$$\delta = |t'| - dist(u, v) \geq l_{\max} + \frac{1}{2}T_{RPP}^*.$$

$$T^{**} = T_{RPP}^* - \delta \leq \frac{1}{2}T_{RPP}^* - l_{\max}.$$

Применим алгоритм \mathcal{A}_1 к подзадаче без t' :

$$R_{\max} \leq \frac{3}{2}l_{\max} + \frac{1}{2}\bar{C} + \frac{3}{2}T^{**} + 2 \sum_{t \in \mathcal{T} \setminus \{t'\}} |t| \leq \frac{1}{2}\bar{C} + \frac{3}{4}T_{RPP}^* + 2\left(\frac{1}{4}T_{RPP}^* - \frac{1}{2}l_{\max}\right) \leq 2\bar{R}$$

1.2 Если $d'_{\max} > l_{\max}$: заметим, что $d'_{\max} \leq 2l_{\max}$.

$$IDLE \leq 2l_{\max} + 2|t'|,$$

$$finish_3 \leq 3l_{\max} + \frac{3}{2}T_{RPP}^* + 2|t'|.$$

Если $2|t'| \leq \frac{3}{2}T_{RPP}^*$, то $finish_3 \leq 3\bar{R}$.

Иначе: $|t'| > \frac{3}{4}T_{RPP}^*$, $dist(u, v) \leq T_{RPP}^* - |t'| \leq \frac{1}{4}T_{RPP}^*$.

$$\delta = |t'| - dist(u, v) \geq \frac{1}{2}T_{RPP}^*.$$

$$T^{**} = T_{RPP}^* - \delta \leq \frac{1}{2}T_{RPP}^*.$$

Применим алгоритм \mathcal{A}_1 к подзадаче без t' :

$$R_{\max} \leq \frac{3}{2}l_{\max} + \frac{1}{2}\bar{C} + \frac{3}{2}T^{**} + 2 \sum_{t \in \mathcal{T} \setminus \{t'\}} |t| \leq 4.5l_{\max} + \frac{5}{4}T_{RPP}^*.$$

$$R_{\max}(S_{\mathcal{A}_2}) \leq 4.5l_{\max} + \frac{5}{4}T_{RPP}^* + \bar{R}.$$

$$\min\{R_{\max}(S_{\mathcal{A}_2}), R_{\max}(S_{\mathcal{A}_1})\} \leq 10/3\bar{R}.$$

- 1 Машина M_3 прибыла к уже занятому машиной M_1 туннелю, пока ждала, машина M_2 начала работу в туннеле.
- 2 Аналогично рассматриваются случаи:
 - когда M_3 конфликтует только с одной из машин произвольным образом,
 - когда не более одного конфликта в туннеле.
- 3 Оставшийся случай: два конфликта в разных туннелях, разные варианты порядка появления машин.