

Параллельные эвристические алгоритмы
«иди с победителями» для одной задачи
составления производственного расписания

Борисовский П.А.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 22-71-10015-П, <https://rscf.ru/project/22-71-10015-П/>.

Постановка задачи

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ – продукты;

$U = \{1, 2, \dots, m\}$ – устройства;

$I = \{1, 2, \dots, l\}$ – операции;

D_s - спрос на продукт s ;

Для каждой операции i задано:

u_i – требуемое устройство,

s_i – производимый продукт,

r_i – производительность (тонн/час),

s_{ij} – время переналадки.

Построить расписание выпуска продукции в нужном объёме, минимизируя C_{\max} – момент завершения последней операции.

Модель ЧЦЛП

Бинарные переменные

x_{ik} такие, что $x_{ik} = 1$, если операция i на устройстве u_i занимает k -е по счету место.

Вещественные неотрицательные переменные:

δ_i – длительность операции i .

α_{uk} – длительность переналадки на устройстве u после k -й по счету операции.

Модель ЧЦЛП

$$\min C_{\max}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ik} \leq 1, \quad k \in K;$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} \leq 1, \quad i \in I;$$

$$\sum_{i: s_i = s} r_i \delta_i \geq D_s, \quad s \in S;$$

$$\sum_{i \in I_u} x_{i,k-1} \geq \sum_{i \in I_u} x_{i,k}, \quad u \in U, k \in K, k > 1;$$

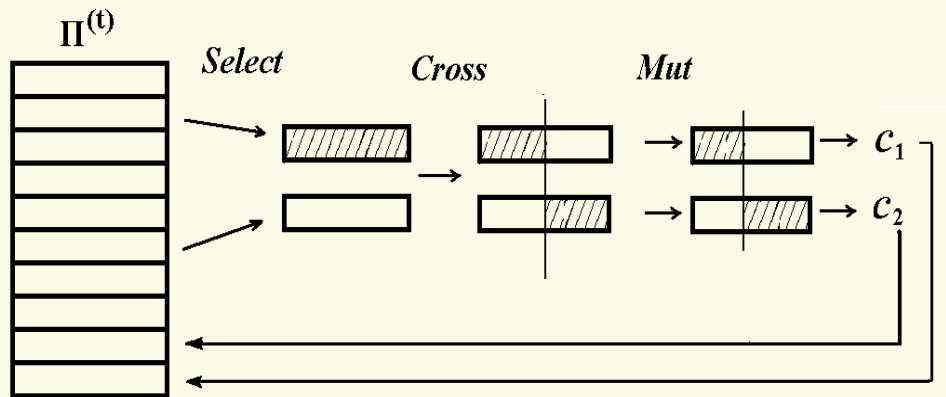
$$\alpha_{uk} \geq \sum_{j \in I_u} s_{ji} x_{j,k-1} - M(1 - x_{ik}), \quad u \in U, i \in I_u, k \in K, k > 1;$$

$$\sum_{i \in I_u} \delta_i + \sum_{k \in K} \alpha_{uk} \leq C_{\max}, \quad u \in U;$$

$$\delta_i \geq T_i^{\min} \sum_{k \in K} x_{ik}, \quad i \in I;$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \delta_i, \alpha_{uk} \geq 0, \quad i \in I, u \in U, s \in S, k \in K.$$

Генетический алгоритм



1. Случайным образом построить начальную популяцию.
2. Пока не выполнен критерий остановки, выполнять:
 - 2.1. Выбрать из популяции две родительские особи p_1 и p_2 .
 - 2.2. Применив оператор скрещивания, построить двух потомков c_1 и c_2 .
 - 2.3. Применить к c_1 и c_2 оператор мутации.
 - 2.4. Удалить две худшие особи и поместить на их место c_1 и c_2 .

Представление решений

$\Pi = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ - перестановка операций;

(L_1, L_2, \dots, L_m) - максимальное количество операций, размещаемых на соответствующем устройстве.

Пример:

Операции 1,2,3,4 выполняются на устройстве 1,
операции 5,6,7,8,9 выполняются на устройстве 2.

Кодировка

$$\Pi = (4, 7, 5, 2, 3, 9, 1, 8, 6)$$

$$L = (2, 3)$$

соответствует назначению:

Устройство 1: 4,2

Устройство 2: 7,5,9

Борисовский П. А. Генетический алгоритм для одной задачи составления производственного расписания с переналадками // Труды XIV Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т. 4. Иркутск, ИСЭМ СО РАН. 2008. С. 166-173.

Вычисление целевой функции

После фиксации бинарных переменных требуется решить задачу ЛП

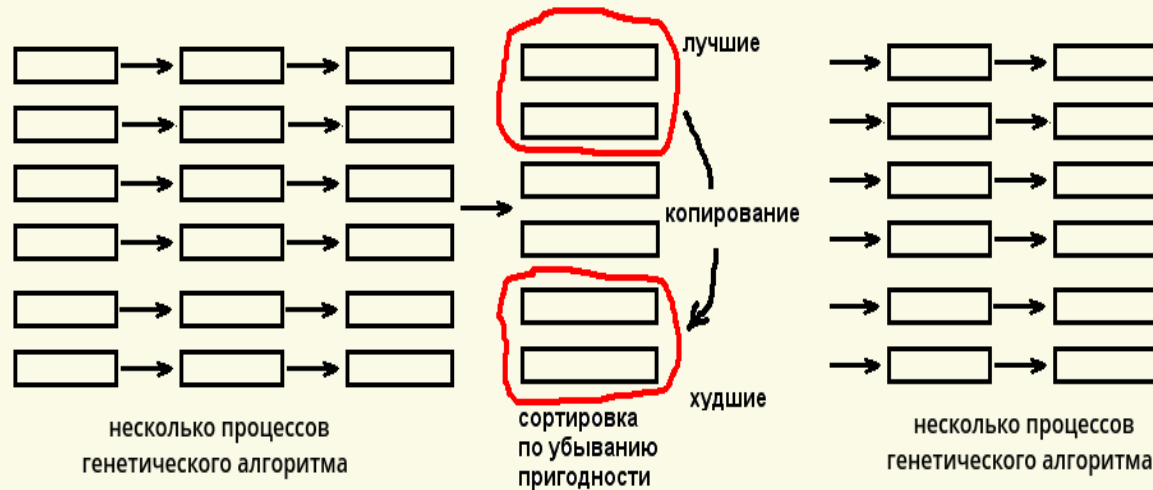
$$\text{Min } C_{\max}; \quad (1)$$

$$\sum_{i:s_i=s} r_i \delta_i \geq D_s, \quad s \in S; \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I_u} \delta_i \leq C_{\max} - \sum_{k \in K_u} \alpha_{un}, \quad u \in U; \quad (3)$$

$$\delta_i \geq 0, \quad i \in I. \quad (4)$$

Гибридный алгоритм «иди с победителями» с ГА



Aldous, D., Vazirani, U.: "Go with the winners" Algorithms. Proceedings of 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 1994, pp. 492–501.

Борисовский П.А. Параллельный эвристический алгоритм решения одной задачи составления производственного расписания большой размерности // Динамика систем, механизмов и машин. 2025 (В печати).

Результаты эксперимента

Тестовые задачи сгенерированы случайно. В таблице указано количество продуктов, устройств и операций.

Вычисления проводились на 32-ядерном процессоре AMD EPYC 7502.

Размерность, $ S \times U \times I $	Лимит времени	Gurobi	Независимые 30 запусков ГА			30 запусков ГА + ИСП		
			среднее	лучшее	худшее	среднее	лучшее	худшее
$300 \times 50 \times 1500$	10 мин	792	783	776	792	775	766	784
$500 \times 70 \times 3000$	15 мин	1139	955	945	964	943	930	952
$1000 \times 100 \times 5000$	20 мин	4028	1431	1411	1445	1396	1383	1413
$2000 \times 200 \times 10000$	30 мин	3827	1714	1669	1743	1682	1646	1720

Таблица 1. Решения, найденные в пределах заданного времени вычислений.

Результаты эксперимента

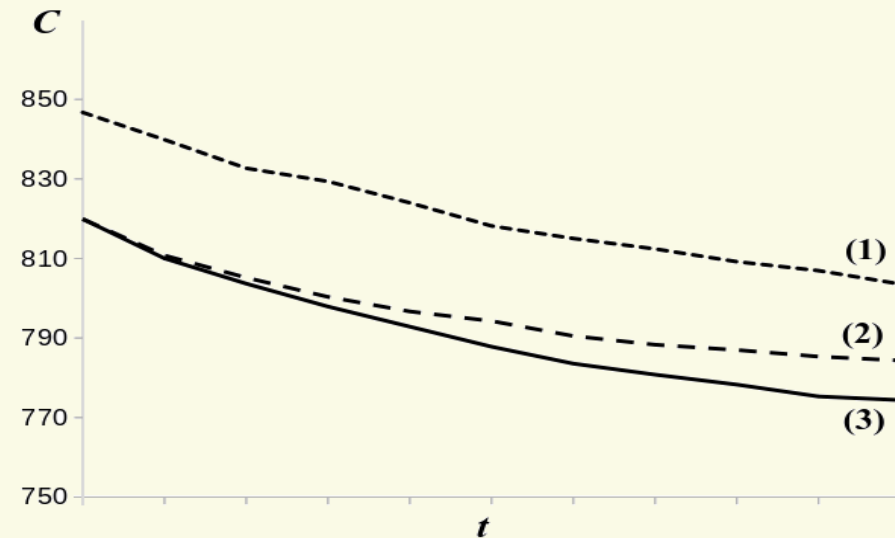


График изменения значения целевой функции лучшего решения

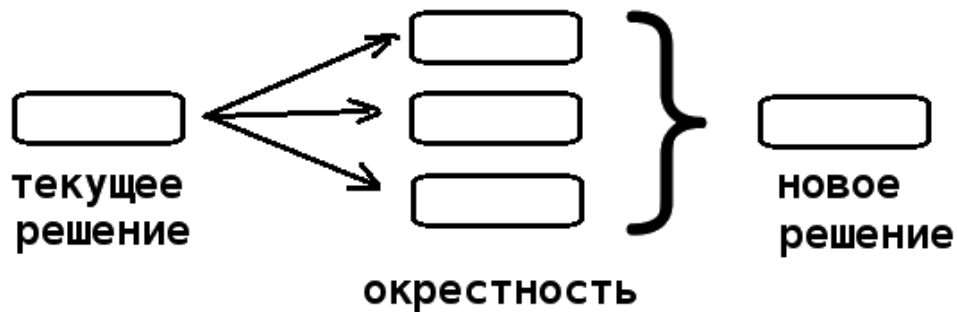
(1) один процесс ГА,

(2) 30 независимых процессов ГА,

(3) 30 процессов ГА с применением схемы «иди с победителями».

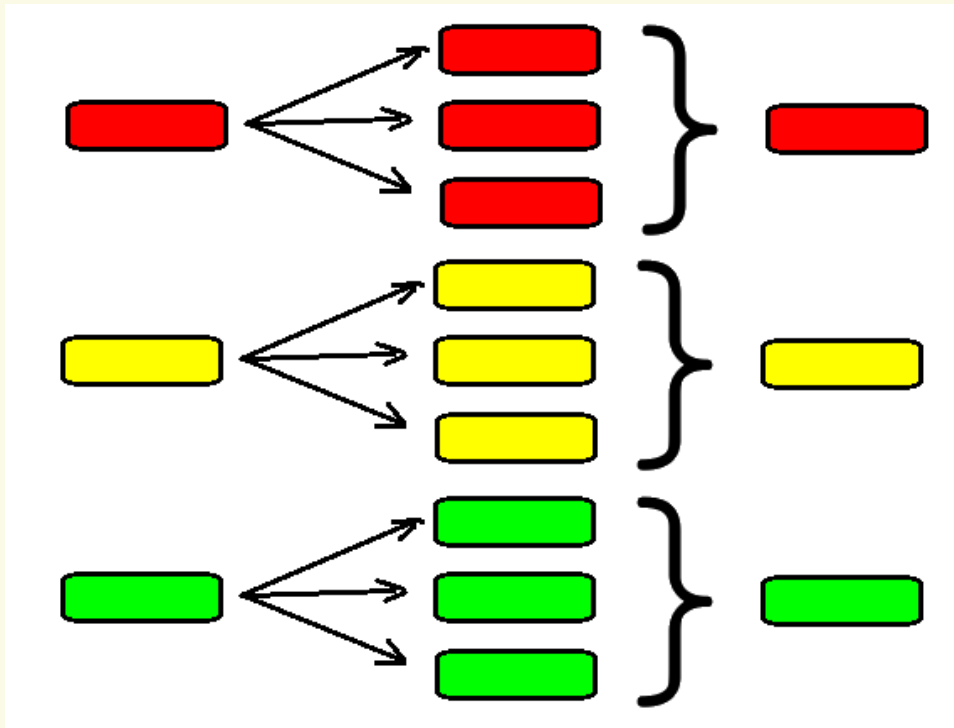
Параллельный алгоритм на GPU

Случайный локальный поиск $(1+\lambda)$ -EA

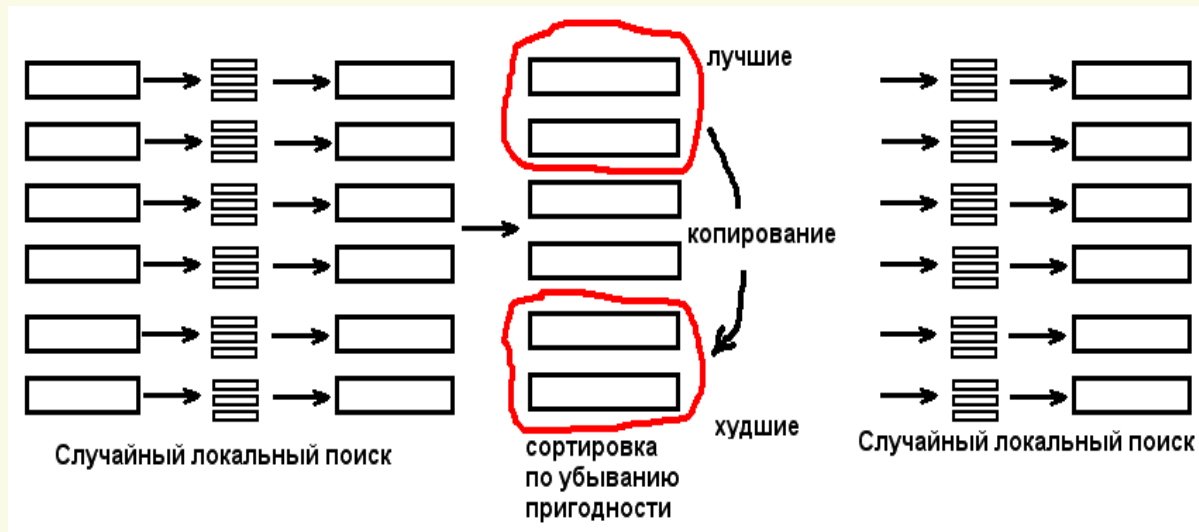


Параллельный алгоритм на GPU

Несколько процессов $(1+\lambda)$ -EA



Алгоритм «иди с победителями» с итеративным локальным поиском на GPU



Борисовский П.А. Параллельный алгоритм «иди с победителями» для некоторых задач составления расписаний // Дискретный анализ и исследование операций. 2023. Т.30. №4. С.5–23.

Borisovsky P.A., Zakharov A.O., Zakharova Y.V. Evolutionary Algorithms for Customer Order Scheduling // Известия Иркутского государственного университета. 2025. Том.53. С.3-17.

Возможный подход к реализации на GPU

Нужно научиться быстро решать много задач ЛП на GPU.

Задача $\{\min cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$

Алгоритм Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

$$x = (1, \dots, 1), \quad z = (1, \dots, 1) \quad u = (0, \dots, 0)$$

For $t = 1$ to **T**:

$$x := (\rho(z - u) - c) / (\rho + \varepsilon)$$

For $k = 1$ to **K**:

For $j = 1$ to m :

If $A_j x > b_j$:

$$x := x - s(A_j x - b_j)A_j / (A_j \cdot A_j)$$

$$z := \max(0, x + u)$$

$$u := u + x - z$$

Настраиваемые параметры: **T** \approx 20..50; **K** \approx 5..10;

$$\rho \approx 1; \quad \varepsilon \approx 10^{-8}; \quad s \approx 0.1.$$

Результаты предварительных расчетов

Задача 1: 5 продуктов, 2 устройства, 30 операций.

Opt = 251

Один запуск ГА: 251 (3 сек.)

Упрощённая постановка: каждый продукт нужно произвести полностью одной операцией (при фиксированных бинарных переменных не нужно решать задачу ЛП).

Opt = 269.8

Один запуск ГА: 269.81 (<1 сек.)

Один запуск ИсП на GPU: 269.81 (<1 сек.)

Результаты предварительных расчетов

Задача 2: 300 продуктов, 50 устройств, 1500 операций.

ИсП с ГА на CPU: 766 (600 сек.)

Один запуск ИсП на GPU (упрощённая постановка): 743 (80 сек.)

Задача 3: 500 продуктов, 70 устройств, 3000 операций.

ИсП с ГА на CPU: 930 (900 сек.)

Один запуск ИсП на GPU (упрощённая постановка): 898 (120 сек.)

Задача 4: 2000 продуктов, 200 устройств, 10000 операций.

ИсП с ГА на CPU: 1646 (1800 сек.)

Один запуск ИсП на GPU (упрощённая постановка): 1500 (200 сек.)

Заключение

- ▶ Использование параллельных вычислений значительно повышает точность решений ГА, применение схемы «иди с победителями» дает еще большее улучшение без дополнительных затрат.
- ▶ Реализован алгоритм «иди с победителями» решения задачи в упрощенной постановке для выполнения на графическом процессоре, который показал преимущество по сравнению с ГА по скорости и качеству решений. Предполагается адаптировать его для задачи в исходной постановке.

Спасибо за внимание!