Содержание

1 Задачи **2**

1. Вводный семинар . . . 2
2. Замена переменных . . . 3
3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка . . . 4
   - 3.1. Уравнения с двумя независимыми переменными . . . 4
4. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка . . . 5
   - 4.1. Удаление младших производных (экспоненциальная замена) . . . 5
   - 4.2. Уравнения с тремя независимыми переменными и постоянными коэффициентами . . . 6
5. Уравнения гиперболического типа 1 . . . 7
6. Уравнения гиперболического типа 2 . . . 7
7. Контрольная работа 1 . . . 8
8. Уравнение поперечных колебаний струны . . . 8
9. Уравнение продольных колебаний стержня . . . 9
10. Уравнение теплообмена . . . 10
11. Формулы Даламбера и Пуассона . . . 11
12. Формулы Даламбера и Пуассона . . . 12
13. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа . . . 13
14. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Неоднородные уравнения. . . . 14
15. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Декомпозиция. . . . 15
16. Метод Фурье для уравнений параболического типа. . . . 15
17. Метод Фурье для уравнений параболического типа — 2. . . . 16
18. Метод Фурье для уравнений параболического типа. Задача теплообмена в шаре. . . . 17
19. Метод Фурье для уравнений параболического типа. Задача теплообмена в прямоугольной пластинке. . . . 18
20. Контрольная работа 2 . . . 18
21. Метод Фурье для эллиптических уравнений . . . 18
22. Метод Фурье для эллиптических уравнений внутри круга, вне круга, в кольце. . . . 19

Раздел 1

Задачи

1. Вводный семинар

1.1. Найдите частные производные функции $u(x, y) = x^y$.

Пусть $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда дифференциальный оператор $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*. В частности, если $u = u(x, y)$, то $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1.2. Найдите Δu, если а) $u = \sin x \operatorname{ch} y$; б) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Дифференцирование сложной функции. Пусть $u(x, y) = f(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y).$$

Или в сокращенной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Заметим, что число переменных функции f не обязано совпадать с числом переменных функции u. Аналогично можно записать формулы для частных производных функций $u(x, y) = f(\xi(x, y))$, $u(x) = f(\xi(x), \eta(x))$ и т.д.

1.3. Найдите частные производные по x и по y функций а) $u = f(x + y, x^2 + y^2)$; б) $u = f(x - y, xy)$.

1.4. Найдите частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$ по x, y и z.

1.5. Проверьте, что функция $u = f(x^2 + y^2)$, где $f(\xi)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.6. Проверьте, что функция $u = \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$, где $f(\xi)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.

1.7. Найдите решение $u(x, y)$ уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$, удовлетворяющее условию $u(0, y) = y^2$.

1.8. Решите уравнения а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad z = z(x, y)$; б) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z)$.

1.9. Проверьте, что функция $u = f(x - at) + g(x + at)$, где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Для самостоятельного решения

1.10. Найдите частные производные функции $u = f(xy)g(yz)$, где f и g — произвольные дифференцируемые функции.

1.11. Найдите решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ такое, что $u(x, x) = 0$.

1.12. Найдите частные производные второго порядка функций
а) $u = f(x + y, x^2 + y^2)$; б) $u = f(xy, \dfrac{x}{y})$.

2. Замена переменных

2.1. Решите уравнение $z_y - z_x = 0$, перейдя к новым независимым переменным $u = x + y$, $v = x - y$.

2.2. Введя новые независимые переменные u и v, решите дифференциальное уравнение: $xz_x + yz_y = z$, если $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$.

2.3. Решите уравнение с частными производными, введя новые независимые переменные u и v: $yz_x - xz_y = 0$, если $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

2.4. В уравнении $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ сделайте замену $t = x$, $s = y - x$, $p = z - x$.

2.5. Введя новые независимые переменные, преобразуйте выражение $B = (z_x)^2 + (z_y)^2$, если $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2.6. Решите дифференциальное уравнение, введя новые переменные u, v и w, где $w = w(u, v)$: $xz_x + (y + 1)z_y = 0$, если $x = u + v$, $y = \dfrac{v}{u}$, $z = \dfrac{w}{u}$.

2.7. Докажите, что любое уравнение $z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, путем замены $z = ue^{\alpha x + \beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, можно привести к виду $u_{xy} + qu = 0$, $q \in \mathbb{R}$.

Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно задаёт поверхность, на которой лежит точка $M_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$. Тогда $F_x(M_\circ)(x_\circ - x) + F_y(M_\circ)(y_\circ - y) + F_z(M_\circ)(z_\circ - z) = 0$ — уравнение касательной плоскости в точке $M_\circ$, а $\dfrac{x_\circ - x}{F_x(M_\circ)} = \dfrac{y_\circ - y}{F_y(M_\circ)} = \dfrac{z_\circ - z}{F_z(M_\circ)}$ — уравнение нормали к поверхности в точке $M_\circ$.

2.8. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M(3, 4, 12)$.

Для самостоятельного решения

2.9. Введя новые независимые переменные u и v, преобразуйте дифференциальное уравнение: $yz_x - xz_y = ye^{x^2+y^2}$, если $u = x^2 + y^2$, $v = y$.
Ответ: $z_v = \pm\dfrac{v}{\sqrt{u-v^2}}e^u$.

2.10. Решите уравнение с частными производными, введя новые независимые переменные u и v: $az_x + bz_y = 0$, если $u = ax + by$, $v = bx - ay$.
Ответ: $z_u = 0$, $z = f(bx - ay)$, где $f(v)$ — произвольная дифференцируемая функция.

2.11. Введя новые независимые переменные, преобразуйте выражение: $B = z_{xx} + z_{yy}$, если $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Ответ: $B = z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\varphi\varphi}$.

3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

3.1. Уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{1.1}$$

Всякая взаимнооднозначная замена переменных $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ приводит к новому уравнению, которое эквивалентно (1.1). Как же выбрать ξ и η так, чтобы в этих переменных уравнение имело наиболее простую форму? Для того, чтобы после замены часть коэффициентов обратилась в ноль, необходимо найти характеристики уравнения (1.1) (характеристики — это такая координатная сетка на плоскости (x,y), в которой уравнение (1.1) приобретает канонический вид). Характеристиками уравнения (1.1) являются первые интегралы уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{1.2}$$

В зависимости от знака дискриминанта $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ различают три случая:

1) Гиперболический ($\Delta > 0$). Уравнение (1.2) распадается на два ОДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$ (не ограничивая общности считаем, что $a_{11} \neq 0$, в противном случае рассмотривают уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{22}}$). Из этих уравнений находим интегралы $f_1(x,y) = C_1$, $f_2(x,y) = C_2$. Замена переменных $\xi = f_1(x,y)$, $\eta = f_2(x,y)$ преобразует уравнение (1.1) к виду $u_{\xi\eta} = -\frac{\bar{F}}{a_{12}}$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

2) Параболический ($\Delta = 0$). Уравнение (1.2) эквивалентно уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, интегрируя которое находим $f(x,y) = C$. Замена переменных $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$ (где g — произвольная функция, линейно независимая с f) преобразует уравнение (1.1) к виду $u_{\eta\eta} = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

3) Эллиптический ($\Delta < 0$). Уравнение (1.2) распадается на уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm i\sqrt{|\Delta|}}{a_{11}}$, решая которые находим интегралы $f(x,y) \pm ig(x,y) = C_1 \pm iC_2$. После замены $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$ уравнение (1.1) примет вид $\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} = -\bar{F}$, $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} > 0$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

Заметим, что одно и то же уравнение может иметь разный тип в разных частях плоскости.

Также отметим, что замена переменных $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ взаимнооднозначна, если ее якобиан $\frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$ непрерывен и отличен от нуля для всех (x,y).

3.1. Преобразуйте к каноническому виду уравнения
а) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x - 9u_y - 9u = 0$;
б) $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$;
в) $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x+y) = 0$;
г) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$;
д) $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$.
Ответ:
а) $\xi = x+y$, $\eta = x$, $u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta - 9u = 0$ (параболическое всюду);
б) $\xi = y-x$, $\eta = 2y-x$, $u_{\xi\eta} + 3u_\xi - u_\eta + 2u = 0$ (гиперболическое всюду);
в) $\xi = y-2x$, $\eta = 3x$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta - u + \xi + \eta = 0$ (эллиптическое всюду);
г) $\xi = y$, $\eta = \operatorname{arctg} x$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ (эллиптическое всюду);
д) $\xi = \operatorname{arctg} y - x$, $\eta = \operatorname{arctg} y + x$, $u_{\xi\eta} = 0$ (гиперболическое всюду).

Для самостоятельного решения

3.2. Преобразуйте к каноническому виду уравнения
а) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$;
б) $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x+y) = 0$;
в) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$.
Ответ:
а) $\xi = 2x-y$, $\eta = x+y$, $u_{\xi\eta} + u_\xi - 2u_\eta + \xi + \eta = 0$ (гиперболическое всюду);
б) $\xi = y-2x$, $\eta = x$, $6u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 90u_\xi - 24u_\eta + 2\xi + 6\eta = 0$ (эллиптическое всюду);
в) $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2$, $u_{\eta\eta} - \dfrac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}u_\xi + \dfrac{1}{2\eta}u_\eta = 0$ (параболическое всюду, кроме точки $(0,0)$, в которой уравнение вырождается).

4. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

4.1. Преобразуйте к каноническому виду уравнение $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$.
Ответ: $\xi = \operatorname{arctg} y - x$, $\eta = \operatorname{arctg} y + x$, $u_{\xi\eta} = 0$ (гиперболическое всюду).

4.1. Удаление младших производных (экспоненциальная замена)

4.2. Докажите, что любое уравнение вида $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, путем замены $u = ve^{\alpha x + \beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v = v(x,y)$, можно привести к виду $v_{xy} + qv = 0$, $q \in \mathbb{R}$.

4.3. Преобразуйте к каноническому виду и избавьтесь от производных первого порядка в следующих уравнениях:
а) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$;
б) $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$.
Ответ:
а) $\xi = 3x+y$, $\eta = x$, $v_{\eta\eta} - v_\xi = 0$, где $u(\xi,\eta) = e^{-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta} v(\xi,\eta)$;
б) $\xi = x-y$, $\eta = x+y$, $u_{\xi\eta} - u = 0$, где $u(\xi,\eta) = e^{-\frac{1}{2}\xi}$.

4.2. Уравнения с тремя независимыми переменными и постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} + a_{33}u_{zz} + 2a_{12}u_{xy} + 2a_{13}u_{xz} + 2a_{23}u_{yz} + a_1u_x + a_2u_y + a_3u_z + au = 0. \quad (1.3)$$

Для того, чтобы привести уравнение (1.3) к каноническому виду, необходимо:
1. Выделяя полные квадраты методом Лагранжа, преобразовать квадратичную форму

$$F(\lambda) = \lambda^T A\lambda = a_{11}\lambda_1^2 + a_{22}\lambda_2^2 + a_{33}\lambda_3^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + 2a_{13}\lambda_1\lambda_3 + 2a_{23}\lambda_2\lambda_3$$

к виду

$$F(\lambda) = b_{11}(m_{11}\lambda_1+m_{12}\lambda_2+m_{13}\lambda_3)^2+b_{22}(m_{21}\lambda_1+m_{22}\lambda_2+m_{23}\lambda_3)^2+b_{33}(m_{31}\lambda_1+m_{32}\lambda_2+m_{33}\lambda_3)^2,$$

где $b_{11}, b_{22}, b_{33} \in \{-1, 0, 1\}$.
2. Составить из коэффициентов m_{ij} матрицу M и вычислить матрицу $C = (M^{-1})^T$.
3. Замена переменных $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \delta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ приведет уравнение (1.3) к канонической форме

$$b_{11}u_{\xi\xi} + b_{22}u_{\eta\eta} + b_{33}u_{\delta\delta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + b_3u_\delta + bu = 0.$$

Уравнение называется:
1) *Эллиптическим*, если b_{11}, b_{22}, b_{33} — отличны от нуля и одного знака.
2) *Гиперболическим*, если b_{11}, b_{22}, b_{33} — отличны от нуля и разных знаков.
3) *Параболическим*, если один из коэффициентов b_{11}, b_{22}, b_{33} равен нулю, а остальные одного знака.

Обоснуем приведенный алгоритм. Пусть $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$ и $G(\mu) = \mu^T B\mu$, тогда $G(M\lambda) = \lambda^T M^T BM\lambda = F(\lambda)$ и, следовательно, $A = M^T BM$. Рассмотрим дифференциальный оператор квадратичной части уравнения (1.3)

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2a_{13}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + 2a_{23}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} = (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z})A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Если $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \delta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, то $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \delta} \end{bmatrix}$. Значит, $L = (\tfrac{\partial}{\partial \xi}, \tfrac{\partial}{\partial \eta}, \tfrac{\partial}{\partial \delta})CAC^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \delta} \end{bmatrix}$.
Выбрав матрицу C в виде $C = (M^{-1})^T$, мы получим, что матрица $CAC^T = (M^{-1})^T AM^{-1} = B$ будет матрицей оператора L в переменных ξ, η, δ. А это, в свою очередь, означает, что оператор L приобретет канонический вид.

4.4. Преобразуйте к каноническому виду уравнения:
а) $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$;
б) $u_{xy} + u_{zz} + u_x - u_y = 0$.
Ответ:
а) $u_{\xi\xi} + 2u = 0$;
б) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\delta\delta} + 2u_\xi = 0$.

Для самостоятельного решения

4.5. Приведите к каноническому виду и упростите при помощи экспоненциальной замены следующие уравнения:
а) $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0$;
б) $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0$.
Ответ:
а) $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = y + z$, $\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\eta + 2u_\zeta + u = 0$,
$u = ve^{\eta-\zeta}$, $\quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2v_\zeta = 0$.
б) $\xi = y$, $\eta = x + y$, $\zeta = z$, $\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\xi + 2u_\eta + u_\zeta + u = 0$,
$u = ve^{-\frac{1}{2}\xi+\eta-\frac{1}{2}\zeta}$, $\quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v = 0$.

5. Уравнения гиперболического типа 1

5.1. Найдите общее решение следующих уравнений:
а) $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;
б) $u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$ (указание: сделайте замену $v = u_{xx}$);
в) $\operatorname{ch} x\, u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y - \operatorname{ch} x\, u = 0$ (указание: сделайте замену $v = u_{yy} \operatorname{ch} x$).

Ответ:
а) $u = f(x + y) + g(3x + 2y)$;
б) $u = \cos y + xg(y) + g'(y) + \int\limits_0^x (x - s)e^{-ys} f(s)ds$;
в) $u = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(yg(x) + g'(x) + \int\limits_0^y (y - s)e^{-sx} f(s)ds\right)$.

Для самостоятельного решения

5.2. Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + 2x^2y(u_x + u) = 0$.
Ответ: $u = e^{-x}\left(f(y) + \int\limits_0^x e^{s-s^2y^2} g(s)ds\right)$.

5.3. Решите следующие задачи Коши:
а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$, $\ u(0, y) = -x^2/2$, $u_y(x, 0) = -\sin x$;
б) $3u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0$, $\ u(x, x) = \frac{x}{1+x^2}$, $u_y(x, x) = \cos x$.
Ответ:
а) $u = -\frac{x^2}{2} + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x$;
б) $u = \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} + 10\cos\frac{x+y}{2} - \frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2} - 10\cos\frac{2x+3y}{5}$.

6. Уравнения гиперболического типа 2

6.1. Решите следующие задачи Коши:
а) $4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0$, $\ u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$;
б) $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$, $\ u(0, y) = \varphi(y)$, $u_x(0, y) = \psi(y)$;
в) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$, $\ u(x, \sin x) = x + \cos x$, $u_y(x, \sin x) = \sin x$;
г) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}$, $\ u(x, 0) = \sin x$, $u_y(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

Ответ:
а) $u = \varphi(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(s)ds$;
б) $u = (1 + 2x - e^{2x})e^y + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{2x+y} \psi(s)ds$;
в) $u = x + \cos(x - y + \sin x)$;
г) $u = \frac{1}{2}x^2(e^y - 1) + \sin x + \frac{1}{6}(x^3 - (x - e^y - 1)^3) + \operatorname{arctg}(x + e^y - 1) - \operatorname{arctg} x$.

Для самостоятельного решения

6.2. Решите следующие задачи Коши:
а) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + u_x + (1 - \sin x + \cos x)u_y = 0$, $u(x, \sin x) = \cos x$, $u_y(x, \sin x) = \sin x$;
б) $2u_x - u_y - 4u = e^{x+y}$, $u(x, 0) = \varphi(x)$;

Ответ:
а) $u = \cos(y - x - \sin x)$;
б) $u = e^{x-2y}\left(e^{-(x+2y)}\varphi(x + 2y) - \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{1}{3}\right)$;

7. Контрольная работа 1

8. Уравнение поперечных колебаний струны

Рассмотрим струну, которая в состоянии покоя совпадает с отрезком $[0; \ell]$ оси x. Пусть эта струна совершает поперечные колебания в плоскости (x, u). Обозначим через $u(x, t)$ отклонение точки x струны от положения равновесия в момент t. Цель: поставить задачу на нахождение функции $u(x, t)$. Для этого необходимо научиться вычислять кинетическую и потенциальную энергию струны.

8.1. Струна $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$ с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$ совершает поперечные колебания $u = u(x, t)$. Найдите кинетическую энергию $K = K(u)(t)$ струны в момент времени t для случаев, когда струна
а) не имеет сосредоточенных масс;
б) в точках x_i имеет сосредоточенные массы m_i, $i = 1, \ldots, n$.

Известно, что потенциальная энергия элемента струны пропорциональна приращению длины этого элемента. Коэффициент пропорциональности называется натяжением струны.

8.2. Струна $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$ с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$ и натяжением T совершает поперечные колебания $u = u(x, t)$. Используя это, найдите потенциальную энергию $U = U(u)(t)$ струны в момент времени t для случаев, когда:
а) концы струны закреплены жестко;
б) концы струны закреплены жестко и степенями u_x выше второй можно пренебречь (т.е. считая, что колебания *малые*);
в) к концам струны приложены силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$, направленные вертикально вверх (*указание*: потенциальная энергия силы F, не зависящей от точки приложения, равна

$-Fh$, где h — высота над нулевым уровнем);
г) концы струны закреплены упруго, то есть они испытывают действие силы, пропорциональной их отклонению и направленной противоположно отклонению (*указание*: потенциальная энергия силы $F = F(u)$, зависящей от точки приложения u, равна работе по преодолению этой силы при перемещении из точки u_1 в точку u_2: $A = -\int_{u_1}^{u_2} F(u)du$);
д) на каждый элемент струны действует внешняя сила $f(x,t)dx$, направленная вертикально вверх ($f(x,t)$ — плотность внешних сил).

Теперь все готово для того, чтобы вывести уравнение колебания струны. Выводить будем из принципа Гамильтона: в «точке» $u = u(x,t)$ тождественно равна нулю первая вариация функционала

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2} \big(K(u)(t) - U(u)(t)\big)dt, \qquad 0 \leqslant t_1 < t_2 \text{ — произвольны.}$$

Первой вариацией функционала $A(u)$ в точке u называется линейная по δu часть приращения $A(u+\delta u) - A(u)$. Первую вариацию в точке u будем обозначать $DA(u)(\delta u)$.

8.3. Струна ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$ и натяжением T совершает *малые* поперечные колебания $u = u(x,t)$. Пусть $u(x,0) = \varphi(x)$ (начальное отклонение), $u_t(x,0) = \psi(x)$ (начальная скорость). На основании принципа Гамильтона сформулируйте задачу на нахождение функции $u(x,t)$, когда:
а) концы струны закреплены жестко;
б) концы струны свободны;
в) к концам струны приложены силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$, направленные вертикально вверх;
г) концы струны закреплены упруго;
д) левый конец закреплен жестко, а правый — упруго;
е) концы струны закреплены жестко, и на струну действует внешняя сила с плотностью $f(x,t)$, направленная вертикально вверх.

9. Уравнение продольных колебаний стержня

Рассмотрим упругий стержень (для растяжения или изгибания упругого стержня следует приложить определенное усилие — это отличает его от струны, которая гнется свободно). Будем считать, что:
1) центры тяжести всех поперечных (перпендикулярных оси x) сечений образуют отрезок $[0;\ell]$ числовой оси x;
2) поперечные сечения стержня могут смещаться (совершать продольные колебания) вдоль оси x;
3) во время смещения поперечные сечения остаются плоскими и ортогональными оси x (это допущение оправдано, когда толщина стержня много меньше его длины);

Для стержня, находящегося в состоянии покоя, обозначим: $S(x)$ — площадь поперечного сечения в точке x, $\rho(x)$ — объемная плотность в точке x (то есть для получения массы ее следует умножить на объем), $E(x)$ — модуль Юнга в точке x (модуль Юнга фигурирует в законе Гука: $T = ES\varepsilon$, где T — сила натяжения, ε — относительное удлинение), $f(x,t)$ — объемная плотность внешних сил, действующих вдоль оси x.

Через $u(x,t)$ обозначим отклонение в момент t того сечения стержня, которое, находясь в покое, имело абсциссу x.

Сформулируем принцип Даламбера: сумма всех сил (включая инерционные), действующих на тело в направлении возможного перемещения равна нулю.

9.1. Рассмотрим упругий стержень, совершающий продольные колебания $u = u(x,t)$. На каждое поперечное сечение стержня $S(x)$ со стороны правой от этого сечения части стержня действует сила натяжения $T(x,t)$. Используя закон Гука, найдите силу натяжения $T(x,t)$. Какая сила натяжения действует на сечение $S(x)$ со стороны левой от этого сечения части стержня?

9.2. Рассмотрим упругий стержень, совершающий продольные колебания $u = u(x,t)$. Пусть $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$. На основании принципа Даламбера сформулируйте задачу на нахождение функции $u(x,t)$ для случаев, когда:
а) на стержень не оказывается внешнего воздействия, а его концы закреплены жестко;
б) на стержень действуют внешние силы с объемной плотностью $f(x,t)$, и концы стержня свободны;
в) по направлению оси x к концам стержня приложены силы $F_1(x)$ и $F_2(x)$, сонаправленные с осью x;
г) концы стержня закреплены упруго;
д) левый конец испытывает сопротивление, пропорциональное его скорости, а правый закреплен жестко;
е) стержень (на единицу массы) испытывает действие силы сопротивления отклонению, пропорциональной скорости, а концы стержня колеблются по заданным законам $v_1(t)$ и $v_2(t)$.

10. Уравнение теплообмена

Назовем *потоком тепла* (или *тепловым потоком*) — количество тепла, протекающее за единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярно площадке.

О законе Фурье. Предположим, что у нас есть некоторая область $G \subset \mathbb{R}^n$, каждая точка $\bar{x}$ которой имеет температуру $u(\bar{x})$. Тогда от более нагретых точек тепло будет перетекать к более холодным. Для каждой точки $\bar{x} \in G$ определим вектор плотности потока тепла $\bar{q}(\bar{x})$: направление вектора $\bar{q}(\bar{x})$ совпадает с направлением потока тепла, а его длина равна тепловому потоку через единичную площадку, перпендикулярную вектору $\bar{q}(\bar{x})$. Закон Фурье:

$$\bar{q}(\bar{x}) = -k(\bar{x})\nabla u(\bar{x}),$$

где $k(\bar{x})$ — коэффициент теплопроводности в точке x, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ — оператор градиента. То есть тепло течет в направлении, противоположном направлению наибольшего роста температуры.

О законе Ньютона. Пусть по некоторой границе соприкасаются две среды с температурами T_1 и T_2. Тогда через границу сред от более нагретого тела к менее нагретому перетекает тепловой поток

$$q = \varkappa|T_1 - T_2|.$$

Коэффициент $\varkappa$ называется коэффициентом конвективной теплопроводности.

На этом семинаре мы ограничимся одномерным случаем. Пусть дан стержень, ось которого совпадает с отрезком $[0;\ell]$ оси x. Будем считать, что в каждом поперечном сечении температура постоянна (т.е. толщина стержня много меньше его длины). Для каждой точки x отрезка $[0;\ell]$ обозначим: $S(x)$ — площадь поперечного сечения, $P(x)$ —

периметр поперечного сечения, $\rho(x)$ — объемная плотность в точке x, $c(x)$ — удельная теплоемкость в точке x, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности внутри стержня, $\varkappa(x)$ — коэффициент конвективной теплопроводности между стержнем и внешней средой, $u_0(t)$ — температура внешней среды, $f(x,t)$ — объемная плотность источников тепла внутри стержня, $u(x,t)$ — температура сечения $S(x)$ в момент t.

10.1. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. Пусть $u(x,0)=\varphi(x)$. Сформулируйте задачу на определение температуры в стержне в момент $t>0$ для случаев, когда:
а) концы стержня теплоизолированы;
б) на концах стержня поддерживаются тепловые потоки $q_1(t)$ и $q_2(t)$, направленные внутрь стержня;
в) на концах стержня происходит теплообмен по закону Ньютона со средами температур $T_1(t)$ и $T_2(t)$;
г) на конце $x=0$ сосредоточена теплоизолированная масса m из того же материала, что и стержень, а на конце $x=\ell$ поддерживается температура $T_2(t)$;
д) на обоих концах стержня сосредоточены массы m из того же материала, что и стержень, причем конец $x=0$ теплоизолирован, на на конце $x=\ell$ поддерживается тепловой поток $q_2(t)$, направленный внутрь стержня.

10.2. Через боковую поверхность стержня осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой. Пусть $u(x,0)=\varphi(x)$. Сформулируйте задачу на определение температуры в стержне в момент $t>0$ для случаев, когда:
а) на конце $x=0$ поддерживается тепловой поток $q_1(t)$, а конец $x=\ell$ теплоизолирован;
б) тепло в стержне поглощается пропорционально u_t в каждой его точке, а концы теплоизолированы.

11. Формулы Даламбера и Пуассона

11.1. Решите следующие задачи Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases}$

Ответ:
а) $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$ — *Формула Даламбера*;
б) $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau$ — *Формула Пуассона.*

11.2. Решите следующие задачи Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\sin x, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+6, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=4x, \quad x\in\mathbb{R}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+x\,t, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\cos x,\ u_t(x,0)=x^2+x, \quad x\in\mathbb{R}; \end{cases}$

Ответ:
а) $u(x,t) = \sin x$;
б) $u(x,t) = (x+2t)^2$;
в) $u(x,t) = \cos x \cos t + x^2 t - \frac{1}{3}t^3 - x\,t + \frac{1}{6}x\,t^3$.

Для самостоятельного решения

11.3. Решите следующие задачи Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt} = 9\,u_{xx} + \sin x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Ответ:
а) $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)\sin x$;
б) $u(x,t) = \frac{t}{\omega} - \frac{t}{\omega^2}\sin \omega t$;
в) $u(x,t) = x\,t + \sin(x+t) - (1 - \operatorname{ch} t)e^x$.

12. Формулы Даламбера и Пуассона

Полубесконечная струна

12.1. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$
Используя формулу Даламбера покажите, что
1) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — нечетны, то $u(0,t) \equiv 0$;
2) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — четны, то $u_x(0,t) \equiv 0$.

12.2. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$
Используя формулу Даламбера покажите, что
1) если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ нечетны и $f(x,t)$ — нечетна по x, то $u(0,t) \equiv 0$;
2) если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ четны и $f(x,t)$ — четна по x, то $u_x(0,t) \equiv 0$.

12.3. Решите следующие задачи Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt} = a^2\,u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1 - e^{-x},\ u_t(x,0) = \sin x, \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} = a^2\,u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2 - x^3,\ u_t(x,0) = \cos x, \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

Ответ:
а) $u(x,t) = \begin{cases} 1 - e^{-x}\operatorname{ch} at + \frac{1}{2a}(\cos(x-at) - \cos(x+at)), \text{ если } x - at > 0, \\ e^{-at}\operatorname{sh} x + \frac{1}{2a}(\cos(x-at) - \cos(x+at)), \text{ если } x - at \leqslant 0; \end{cases}$
б) $u(x,t) = \frac{1}{2}\big((x+at)^2 - (x+at)^3 + (x-at)^2 - |x-at|^3\big) + \frac{1}{2a}\big(\sin(x+at) - \sin(x-at)\big)$.

Разные задачи на волновое уравнение

12.4. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$ Докажите, что функция $v(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)d\tau$ является решением задачи Коши $\begin{cases} v_{tt} = a^2\Delta v, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ v(x,0) = 0, \ v_t(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

12.5. Пусть функция $u(x,t)$ является решением уравнения $u_{tt} = u_{xx}$. Покажите, что функция $v = u\left(\frac{x}{x^2-t^2}, \frac{t}{x^2-t^2}\right)$ также является решением этого уравнения всюду, где она определена.

Для самостоятельного решения

12.6. Решите следующие задачи Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt} = 9\,u_{xx}, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = 2, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2 + x + 2, \ u_t(x,0) = \sin 3x, \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} = 4\,u_{xx} + 2, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = -3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = -3x, \ u_t(x,0) = x^2\cos 4x, \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

13. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа

13.1 (Разминка)**.** Найти решение следующих дифференциальных уравнений:
а) $y'' - 4y = 0$;
б) $y'' + 4y = 0$.

13.2. Решите следующие задачи:

а) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{5\pi x}{2\ell}, \ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2\ell}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ:
а) $u(x,t) = \frac{\ell}{2a\pi}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\sin\frac{2a\pi t}{\ell}$;
б) $u(x,t) = \frac{2\ell}{a\pi}\sin\frac{\pi x}{2\ell}\sin\frac{a\pi t}{2\ell} + \sin\frac{5\pi x}{2\ell}\cos\frac{5a\pi t}{2\ell}$.

13.3. Докажите ортогональность системы функций $X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{\ell}$, $k = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, и найдите (X_k, X_k).

Для самостоятельного решения

13.4. Докажите ортогональность системы функций $X_k(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, и найдите (X_k, X_k) для случаев, когда
а) $X_k(x) = \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}$, $k = 1, 2, \ldots$;
б) $X_k(x) = \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}$, $k = 1, 2, \ldots$;
в) $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{\ell}$, $k = 0, 1, \ldots$, $(X_0(x) \equiv 1)$.

13.5. Дайте физическую интерпретацию и решите задачу:
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2\ell}, \ u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2\ell} + \cos\frac{5\pi x}{2\ell}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$$

14. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Неоднородные уравнения.

14.1. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{a(2k+1)\pi t}{\ell}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}$

или $u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечет.}}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{ak\pi t}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}$;

14.2. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{\ell} + \frac{\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{\ell}\right)\sin\frac{\pi x}{\ell}$.

14.3. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axe^{-t}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2A\ell}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1+(\frac{ak\pi}{\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{ak\pi t}{\ell} + \frac{\ell}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$.

Для самостоятельного решения

14.4. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + A\sin t, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{4A}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечет.}}}^{\infty}\frac{1}{k\left((\frac{ak\pi}{2\ell})^2-1\right)}\left(\sin t - \frac{2\ell}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{2\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{2\ell}$.

14.5. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2\ell}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{2\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{2\ell} + \frac{2\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2\ell}\right)\cos\frac{\pi x}{2\ell}$.

15. Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Декомпозиция.

15.1. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = t^2, \quad u(\pi,t) = t^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = (1 - \frac{x}{\pi})t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin x \cos t +$
$+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[(-1)^k 3t - 1 + \cos kt - 3\frac{(-1)^k}{k}\sin kt\right]\sin kx.$

15.2. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{x}{2}, \ \ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = x + t + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)t}{2}\sin\frac{(2k+1)x}{2}.$

Для самостоятельного решения

15.3. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad u(\pi,t) = t, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x \cos x, \ \ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = (1 - \frac{x}{\pi})e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x -$
$-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+k^2)}\left[e^{-t} + k^2\cos kt - (2k + \frac{1}{k})\sin kt\right]\sin kx.$

15.4. Решите задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2\ell}{a}\sin 2t, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{t}{2} - (\frac{1}{4} + \cos\frac{2x}{a})\sin 2t.$

16. Метод Фурье для уравнений параболического типа.

16.1. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = Ax. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}x.$

16.2. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{-[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$, где $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x dx.$

16.3. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l}. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = e^{-(\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\beta)t} \sin \frac{\pi}{2l} x.$

16.4. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{-[(\frac{ak\pi}{l})^2+\beta]t} \cos \frac{k\pi}{l} x$, $a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx$, $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$, $k = 1, 2, ...$

Для самостоятельного решения

16.5. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = A(l-x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}]^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x.$

16.6. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi) e^{-[(\frac{a\pi k}{l})^2+\beta]t} \sin \frac{k\pi}{l} x.$

17. Метод Фурье для уравнений параболического типа — 2.

17.1. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = A. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = 2hA \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}[l(h^2+\lambda_k)+h]} e^{-(a^2\lambda_k+\beta)t} F_k(x)$, где $F_k(x) = \sqrt{\lambda_k} \cos \sqrt{\lambda_k} x + h \sin \sqrt{\lambda_k} x$, λ_k — положительные корни уравнения $h \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l = \sqrt{\lambda}$.

17.2. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{\beta+(\frac{a\pi}{l})^2}[1 - e^{-[\beta+(\frac{a\pi}{l})^2]t}] \sin \frac{\pi}{l} x.$

17.3. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = q, \quad t > 0, \\ u(x,0) = Ax. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = qx + \frac{l(A-q)}{2} - \frac{4(A-q)l}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{a\pi(2m+1)}{l})^2 t}}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)}{l} t.$

Для самостоятельного решения

17.4. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = T, \quad u(l,t) = A, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A-T}{l}x + T + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[(-1)^k A - T]e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x.$

18. Метод Фурье для уравнений параболического типа. Задача теплообмена в шаре.

Рассмотрим *однородный* шар $B_R = \{0 \leqslant r < R\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Пусть $u(x,y,z,t)$ — температура в точке $(x,y,z) \in B_R$ в момент $t > 0$. Тогда изменение температуры описывается уравнением

$$u_t = a^2\Delta u - \beta u + \gamma, \quad (x,y,z) \in B_R, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $\beta = \frac{\alpha}{c\rho}$, $\gamma = \frac{Q}{c\rho}$, $k = \text{const} > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, $c = \text{const} > 0$ — удельная теплоемкость шара, $\rho = \text{const} > 0$ — плотность шара, $\alpha = \text{const} > 0$ — коэффициент поглощения тепла в шаре (например, за счет химических реакций), $Q = \text{const} > 0$ — плотность источников тепла внутри шара.

Перейдем в уравнении (1.1) к сферическим координатам.

$$u = u(r,\varphi,\theta,t), \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах выглядит ужасно

$$\Delta u = \tfrac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \tfrac{1}{r^2\sin\theta}(u_\theta \sin\theta)_\theta + \tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}.$$

Но мы рассматриваем однородный шар и если начальное распределение температуры и краевое условие не зависят от φ и θ, то для всех $t > 0$ температура u также не будет зависеть от φ и θ, то есть $u = u(r,\varphi,\theta,t) = u(r,t)$. В этом случае производные по углам φ, θ пропадут.

$$\Delta u = \tfrac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r.$$

Далее всегда будем считать, что $u = u(r,t)$ (иначе сдохнем). В итоге задача теплообмена в шаре приобретет вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2\frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r - \beta u + \gamma, \quad 0 \leqslant r < R, \ \ t > 0, \\ u(R,t) = U, \quad u(0,r) = u_\circ(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \\ u(r,t) \text{ — ограничена по } r. \end{cases}$$

Где краевое условие $u(R,0) = U$ означает, что на поверхности шара поддерживается постоянная температура U. Краевые условия могут меняться.

18.1. В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если:
а) поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U;
б) с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной плотности q;
в) на поверхности происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Температура среды равна P.

Для самостоятельного решения

18.2. Решите задачу: $\begin{cases} u_t = a^2\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r - \beta u, \quad 0 \leqslant r < R, \ t > 0, \ \beta > 0, \\ u_r(R,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(r,t) \text{ — ограничена по } r, \\ u(r,0) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < \frac{R}{2} \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R. \end{cases} \end{cases}$

Ответ: $u(r,t) = e^{-\beta t}\left[\frac{U}{8} + \frac{2U}{r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{R\lambda_k}{2} - R\lambda_k\cos\frac{R\lambda_k}{2}}{2R\lambda_k - \sin 2R\lambda_k}\, e^{-a^2\lambda_k^2 t}\sin\lambda_k r\right]$, где λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = R\lambda$.

19. Метод Фурье для уравнений параболического типа. Задача теплообмена в прямоугольной пластинке.

19.1. Решите задачу:
$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s, \ t > 0, \\ u(0,y,t) = u_x(p,y,t) = 0, \quad 0 < y < s, \ t > 0, \\ u_y(x,0,t) = u(x,s,t) = 0, \quad 0 < x < p, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = B\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s. \end{cases}$

Ответ: $u = B\, e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s} + \frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\left[1 - e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}$.

Для самостоятельного решения

19.2. Решите задачу:
$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s, \ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(p,y,t) = 0, \quad 0 < y < s, \ t > 0, \\ u(x,0,t) = u_y(x,s,t) = 0, \quad 0 < x < p, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s. \end{cases}$

Ответ: $u = \frac{A}{a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)-1}\left[e^{-t} - e^{-a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)t}\right]\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s}$.

20. Контрольная работа 2

21. Метод Фурье для эллиптических уравнений

21.1. Задача в прямоугольнике.
$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s, \\ u(0,y) = u_x(p,y) = 0, \ u(x,0) = 0, \ u(x,s) = f(x). \end{cases}$

Ответ: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi s}{2p}}\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi y}{2p}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2p}$, где $f_k = \frac{(f,X_k)}{(X_k,X_k)} = \frac{2}{p}\int\limits_0^p f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2p}dx$.

21.2. Задача в полуполосе.
$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < \infty, \ 0 < y < \ell, \\ u(x,0) = u_y(x,\ell) = 0, \ u(0,y) = f(y), \ u(\infty,y) = 0. \end{cases}$

Ответ: $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2\ell}$, где $f_k=\frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)}=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2\ell}dy$.

21.3. а) Найдите общее решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в полярных координатах.
б) Найдите непрерывное решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\leqslant r<R$.
в) Найдите непрерывное и ограниченное решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ вне круга $0\leqslant r<R$.
Указание: $\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$.

Ответ: а) $u=A_0\ln r+B_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(C_kr^k+D_kr^{-k})(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)$.

б) $u=B_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^k(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)$.

в) $u=B_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^{-k}(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)$.

Для самостоятельного решения

21.4. $\begin{cases}\Delta u=0,\quad 0<x<\infty,\ 0<y<\ell,\\ u_y(x,0)=u_y(x,\ell)+hu(x,\ell)=0,\ \ u(0,y)=f(y),\ \ u(\infty,y)=0,\ \ h>0.\end{cases}$

Ответ: $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_ke^{-\lambda_kx}\cos\lambda_ky$, где $f_k=\frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)}=\frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^{\ell}f(x)\cos\lambda_ky\,dy$, λ_k — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda\ell=h$.

22. Метод Фурье для эллиптических уравнений внутри круга, вне круга, в кольце.

Опираясь на задачу 21.3, решите следующие задачи.

22.1. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<R,\ u(R,\varphi)=\varphi(2\pi-\varphi)$.

Ответ: $u=\frac{2}{3}\pi^2-4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k^2R^k}\cos k\varphi$.

22.2. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<R,\ u(x,y)|_{r=R}=4xy^2$.

Ответ: $u=rR^2\cos\varphi-r^3\cos3\varphi$.

22.3. $\Delta u=0,\ R<r<\infty,\ u(x,y)|_{r=R}=x^2+1,\ u(x,y)$ — ограничена.

Ответ: $u=1+\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}r^{-2}R^4\cos2\varphi$.

22.4. $\Delta u=0,\ a<r<b,\ u(a,\varphi)=A,\ u(b,\varphi)=B\sin2\varphi$.

Ответ: $u=A\frac{\ln b-\ln r}{\ln b-\ln a}+\frac{Bb^2(r^4-a^4)}{r^2(b^4-a^4)}\sin2\varphi$.

22.5. Найдите значение константы A, при котором разрешима задача Неймана $\Delta u=0$, $0\leqslant r<R$, $\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}|_{r=R}=A+\cos^2\varphi$ и найдите ее решение.

Ответ: $u=4r^2\cos2\varphi$ (может быть).

Для самостоятельного решения

22.6. $\Delta u = 0,\ R < r < \infty,\ u(R,\varphi) = \frac{1}{2} + \varphi \sin 2\varphi,\ u(x,y)$ — ограничена.

Ответ: $u = C + \frac{4R^2}{3r}\cos\varphi + \frac{R^3}{4r^2}\cos 2\varphi - \frac{\pi R^3}{r^2}\sin 2\varphi + 4R\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4-k^2}\frac{R^k}{r^k}\cos k\varphi.$

22.7. $\Delta u = 0,\ a < r < b,\ u(a,\varphi) = 0,\ u(b,\varphi) = A\cos\varphi.$

Ответ: $u = \frac{b(r^2-a^2)}{r(b^2-a^2)}\cos\varphi.$