25. Метод интегральных преобразований. Преобразование Лапласа.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant 0$ и:
1) непрерывна всюду на $[0;\infty)$, кроме быть может конечного числа точек разрыва первого рода;
2) существуют $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $|f(x)| < Me^{\alpha x}$ для всех $x \geqslant 0$.
Тогда для функции f определено преобразование Лапласа:

$$\bar{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\xi x} f(x)dx, \quad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{(\beta+is)x} \bar{f}(\beta+is)ds, \quad \beta > \alpha.$$

Функция $\bar{f}(\xi)$ определена только при ξ таких, что $\operatorname{Re}\xi > \alpha$, и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\xi > \alpha$ (т.е. имеет комплексную производную). Константа β выбирается произвольно.

Интегральное преобразование Лапласа линейно: если ИПЛ существует для функций $f(x)$ и $g(x)$, то

$$\overline{(af+bg)}(\xi) = a\bar{f}(\xi) + b\bar{g}(\xi),$$

где a и b — произвольные константы.

25.1. Докажите равенство $\overline{f'}(\xi) = \xi\bar{f}(\xi) - f(0)$. Чему будет равно $\overline{f''}(\xi)$?

Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных при $x > 0$, называется интеграл

$$(f * g)(x) = \int\limits_0^x f(s)g(x-s)ds.$$

25.2. Докажите равенство $\overline{f * g}(\xi) = \bar{f}(\xi)\bar{g}(\xi)$.

Таблица пар «прообраз $\rightleftharpoons$ образ» при преобразовании Лапласа ($a \in \mathbb{R}$):

$$\sin(ax) \rightleftharpoons \tfrac{a}{\xi^2+a^2}, \quad \cos(ax) \rightleftharpoons \tfrac{\xi}{\xi^2+a^2},$$

$$x^n \sin(ax) \rightleftharpoons \tfrac{in!}{2}\left(\tfrac{1}{(\xi+ia)^{n+1}} - \tfrac{1}{(\xi-ia)^{n+1}}\right), \quad x^n \cos(ax) \rightleftharpoons \tfrac{n!}{2}\left(\tfrac{1}{(\xi+ia)^{n+1}} + \tfrac{1}{(\xi-ia)^{n+1}}\right), \ n \in \mathbb{N},$$

$$\sinh(ax) \rightleftharpoons \tfrac{a}{\xi^2-a^2}, \quad \cosh(ax) \rightleftharpoons \tfrac{\xi}{\xi^2-a^2},$$

$$x^n e^{ax} \rightleftharpoons \tfrac{n!}{(\xi-a)^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

25.3 (830). Пользуясь преобразованием Лапласа по переменной x решите задачу: $u_y = u_{xx} + a^2u + f(x)$, $0 < x, y < \infty$, $u(0,y) = u_x(0,y) = 0$.

Ответ: $u(x,y) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^x f(x-s)\sin as\, ds$.

25.4 (834). Пользуясь преобразованием Лапласа по переменным x и t решите задачу: $9u_{xx} + 4u_{tt} = 36e^{2x}\sin 3t$, $0 < x, t < \infty$, $u(0,t) = 0$, $u_x(0,t) = \sin 3t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 3xe^{2x}$.

Ответ: $u(x,y) = xe^{2x}\sin 3t$.

Для самостоятельного решения

25.5 (831). Пользуясь преобразованием Лапласа решите задачу:
$u_y = u_{xx} + u + B\cos x,\ 0 < x, t < \infty,\ u(0, y) = Ae^{-3y},\ \ u_x(0, y) = 0.$
Ответ: $u(x, t) = Ae^{-3y}\cos 2x - \frac{B}{2}x\sin x.$

25.6 (832). Пользуясь преобразованием Лапласа решите задачу:
$u_{xx} - u_t + u = f(x),\ 0 < x, t < \infty,\ u(0, t) = t,\ \ u_x(0, t) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = t\cos x + \frac{1}{2}x\sin x + \int\limits_0^x f(s)\sin(x - s)ds.$