24. Метод интегральных преобразований. Преобразование Фурье.

Для того чтобы вычислить двумерное интегральное преобразование Фурье от функции $f(x,y)$ необходимо сначала вычислить ИПФ по первой переменной, а затем по второй. В итоге получаются формулы:

$$\widehat{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi x+\eta y)}f(x,y)dx\,dy,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(\xi x+\eta y)}\widehat{f}(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

24.1 (822). Используя двумерное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t=a^2\Delta u,\ -\infty<x,y<\infty,\ t>0,\ u(x,y,0)=\varphi(x,y)$.

Ответ: $u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2t}}\varphi(p,q)\,dp\,dq$.

24.2 (824). Используя двумерное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t=a^2\Delta u,\ -\infty<x<\infty,\ y>0,\ t>0,\ u(x,0,t)=0,$ $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$.
Указание: сведите эту задачу к задаче 24.1.

Ответ: $u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-p)^2+(y+q)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(p,q)\,dp\,dq$.

24.3 (827). Используя двумерное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t=a^2\Delta u,\ -\infty<x<\infty,\ y>0,\ t>0,\ u_y(x,0,t)=f(x,t),$ $u(x,y,0)=0$.
Указание: по переменной y использовать косинус-преобразование Фурье.

Ответ: $u(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}dp\,d\tau$.

Для самостоятельного решения

24.4 (823). Используя двумерное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t=a^2\Delta u+f(x,y,t),\ -\infty<x,y<\infty,\ t>0,\ u(x,y,0)=0$.

Ответ: $u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,q,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,dp\,dq\,d\tau$.

24.5 (825). Используя двумерное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t=a^2\Delta u,\ -\infty<x<\infty,\ y>0,\ t>0,\ u(x,0,t)=f(x,t),$ $u(x,y,0)=0$.
Указание: по переменной y используйте синус-преобразование Фурье.

Ответ: $u(x,y,t)=\frac{y}{4a^2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\,dp\,d\tau$.