23. Метод интегральных преобразований. Преобразование Фурье.

Интегральное преобразование Фурье (ИПФ) от функции $f(x)$:

$$F(\xi) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx, \quad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} F(\xi)d\xi.$$

Функция $f(x)$ называется оригиналом (или прообразом), а функция F — образом. Образ $F(\xi)$ также будем обозначать $\widehat{f}(\xi)$.

Интегральное преобразование Фурье существует, если:
1) функция $f(x)$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;
2) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.
3) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$.

Заметим, что интегральное преобразование Фурье линейно: если ИПФ существует для функций $f(x)$ и $g(x)$, то $\widehat{(af+bg)}(\xi) = a\widehat{f}(\xi) + b\widehat{g}(\xi)$, где a и b — произвольные константы.

23.1. Докажите равенства $\widehat{f}'(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ и $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$.

23.2. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, найдите общее решение уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$. Указание: рассмотрите интегральное преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi,t)$ от функции $u(x,t)$ по переменной x.
Ответ: $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$.

23.3 (818)**.** Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите задачу:
$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u(x,0) = 0$.
Указание: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ia\xi - b^2\xi^2}d\xi = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-b^2\xi^2}\cos(a\xi)d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\frac{a^2}{4b^2}}$.
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} ds\, d\tau$.

23.4. Пользуясь равенством $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, докажите, что для четной функции $f(x)$ преобразование Фурье приобретает вид *косинус-преобразования Фурье*:

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \cos\xi x\, f(x)dx, \quad f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \cos\xi x\, \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Если функция $f(x)$ нечетна, то преобразование Фурье приобретает вид *синус-преобразования Фурье*:

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \sin\xi x\, f(x)dx, \quad f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \sin\xi x\, \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Так как преобразование Фурье допускает разрывы первого рода, то косинус-преобразование и синус-преобразование существует для любой определенной при $x > 0$ функции $f(x)$ такой, что
1) функция $f(x)$ непрерывна при $x > 0$, кроме быть может конечного числа точек разрыва первого рода;
2) интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно;
3) $|f(+0)| < \infty$, $f(+\infty) = 0$.

23.5. Докажите, что для косинус-преобразования Фурье справедливо равенство:

$$\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0).$$

А для синус-преобразования Фурье справедливо равенство:

$$\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi) + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \xi f(0).$$

23.6 (821)**.** Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите задачу:
$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ u(0,t) = u(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] ds\, d\tau.$

Для самостоятельного решения

Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите следующие задачи.

23.7 (816)**.** $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\, ds\, d\tau.$

23.8 (817)**.** $u_t = a^2 u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x).$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\, ds.$

23.9 (820)**.** $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ u_x(0,t) = v(t),\ u(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau.$