Квалификационная практика на ЭВМ.
4 курс математического факультета ОмГУ.

Задания по пакету Maple.

1. Докажите тождество

1.1) $\dfrac{\sin(2x+y)}{\sin x} - 2\cos(x+y) = \dfrac{\sin y}{\sin x}$.

1.2) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg}(\pi/4 + x)$.

1.3) $\sin^2(\pi/8 + x) - \sin^2(\pi/8 - x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2}}$.

1.4) $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\operatorname{tg}(\pi/4 - x)\sin^2(\pi/4 + x)} = 1$.

1.5) $\operatorname{tg}^2(\pi/4 - x) = \dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$.

1.6) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

1.7) $\dfrac{\sin x + \cos(2y - x)}{\cos x - \sin(2y - x)} = \operatorname{ctg}(\pi/4 - y)$.

1.8) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)(1 + \sin x)}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

1.9) $\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)\dfrac{1 - \sin x}{\cos x} = 1$.

2. Вычислить

2.1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x/4)}{x^2}$.

2.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2}$.

2.3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$.

2.4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$.

2.5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}$.

2.6) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+3)(\ln(x+2) - \ln(x))$.

2.7) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{7}{x}}$.

2.8) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.9) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

3. Решите уравнения и неравенства

3.1) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$.

3.2) $(x-3)(x-1)^3 + (3-x)(x-2)^3 = 7(x-3)$.

3.3) $\frac{12}{(x-1)^2} - \frac{15}{x(x-2)} + 1 = 0$.

3.4) $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$.

3.5) $\sqrt{2x-2} = x - 4$.

3.6) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$.

3.7) $\sqrt{x + 4\sqrt{x-3} + 1} = x - 2$.

3.8) $\log_{\frac{x}{10}} x + \log_{\frac{x}{5}} x = 0$.

3.9) $\log_{11}(x^2 - 6x + 9)\log_{5-x}(x+8) = 0$.

3.10) $3^{1-x} + \sqrt{15^{-x}} = 10 \cdot 5^{-x}$.

3.11) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

3.12) $\begin{cases} \log_2 x^2 y^3 = 1, \\ \log_2 \frac{x}{y^2} = 4. \end{cases}$

3.13) $\sin(x) = \cos(x) - 1$ (`_EnvAllSolutions := true`).

3.14) $3\sin(3\pi - x) + 2\sin(x - \frac{3\pi}{2}) = 2$.

3.15) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

3.16) $\sqrt{8 - x} \leqslant 1 + x$.

3.17) $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$.

3.18) $\frac{1}{\sqrt{6 - 2x + x}} \leqslant \frac{1}{3}$.

4. Исследовать ряд на сходимость. Если удастся, вычислите его сумму.

4.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n + 1}$

4.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)3^n}{((n+2)!)^2}$

4.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{((n-1)!)^2}$

4.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\sqrt{n}}{4^n}$

4.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\sqrt{n+2}}{4^{n+2}}$

4.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n!}{2^n + 3}$

4.7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+12)!\sqrt{n+12}}{2^{n+2} + 12}$

4.8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$

4.9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\sqrt{n^3+2}}{(n-1)4^{n+2}}$

5. Найти условный максимум/минимум функции $u(x, y, z)$.

5.1) Найти максимум функции $u = xyz$, при условии, что $xy + xz + yz - 5 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

5.2) Найти минимум функции $u = x + 2y + 3z$, при условии, что $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

5.3) Найти максимум функции $u = x^2 + yz$ при условии, что $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5.4) Найти максимум функции $u = -\frac{1}{x} + y + z$ при условии, что $x^2 + (2y)^2 + z^2 = 1$.

5.5) Найти минимум функции $u = x^2 + y^3 + \frac{1}{z-1}$ при условии, что $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

5.6) Найти максимум функции $u = x^3 + xyz$ при условии, что $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

5.7) Найти минимум функции $u = -x - y - z$ при условии, что $x^3 + (2y)^3 + z^3 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

5.8) Найти минимум функции $u = 5x + y + z$, при условии, что $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 8$.

5.9) Найти максимум функции $u = x + yz + z$ при условии, что $x + 5y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

6. Найдите объем тела, заданного неравенствами. Изобразите это тело (`with(plots)`, `plot3d`, `implicitplot3d`).

6.1) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.2) $\sqrt[3]{\frac{x}{5}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2}} + \sqrt[3]{\frac{z}{3}} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.3) $\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{4}{5}} \leqslant 1, \quad x \geqslant y, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.4) $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2 \leqslant 9, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant x^2, \quad z \geqslant 0.$

6.5) $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2 \leqslant 20, \quad x \geqslant \sqrt{y}, \; y \geqslant 0, \; z \geqslant 0.$

6.6) $(x-2)^2+(y-2)^2+z \leqslant 18, \quad x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; z \in [0;1].$

6.7) $(x-2)^2+y^3+(z-3)^2 \leqslant 22, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.8) $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{4}} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.9) $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$

6.10) $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{5}} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant x, \quad z \geqslant 0.$

7. Для данной матрицы A найдите $\det A$, A^2, A^{-1}, A^T, $(A + 2E)(A - 1)$, собственные числа и собственные вектора, жорданову форму и жорданов базис, решите СЛАУ

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(`with(LinearAlgebra)`).

7.1) $A = \begin{pmatrix} 168 & 16 & 16 & 16 & -40 \\ -210 & 52 & -56 & -44 & 86 \\ -153 & -54 & 60 & -54 & 99 \\ 261 & 62 & 68 & 158 & -119 \\ 114 & 12 & 24 & 12 & 42 \end{pmatrix}$

7.2) $A = \begin{pmatrix} 50 & -303 & 385 & 299 & -74 \\ 61 & -66 & 98 & 46 & 8 \\ -55 & 348 & -455 & -352 & 31 \\ 113 & -408 & 553 & 404 & -11 \\ -85 & 219 & -266 & -166 & 25 \end{pmatrix}$

7.3) $A = \begin{pmatrix} -71 & 513 & -595 & -425 & 158 \\ -67 & 183 & -119 & -76 & 37 \\ 73 & -342 & 455 & 274 & -124 \\ -139 & 474 & -518 & -289 & 178 \\ 59 & -111 & 133 & 92 & 37 \end{pmatrix}$

7.4) $A = \begin{pmatrix} 35 & 826 & -238 & 455 & 665 \\ -20 & -634 & 166 & -349 & -497 \\ 10 & 450 & -125 & 255 & 357 \\ 31 & 905 & -237 & 500 & 707 \\ 5 & 274 & -73 & 152 & 217 \end{pmatrix}$

7.5) $A = \begin{pmatrix} 56 & 406 & -112 & 224 & 329 \\ -35 & -896 & 252 & -518 & -735 \\ 32 & 894 & -211 & 501 & 707 \\ 36 & 997 & -275 & 589 & 791 \\ 29 & 766 & -205 & 428 & 637 \end{pmatrix}$

7.6) $A = \begin{pmatrix} 138 & -219 & -264 & 132 & 15 \\ 18 & -6 & -30 & 15 & 3 \\ 120 & -225 & -246 & 127 & 16 \\ 186 & -336 & -390 & 201 & 27 \\ -186 & 336 & 390 & -183 & -9 \end{pmatrix}$

7.7) $A = \begin{pmatrix} 150 & -240 & -288 & 143 & 17 \\ 6 & 15 & -6 & 5 & 2 \\ 156 & -288 & -318 & 157 & 19 \\ 222 & -399 & -462 & 231 & 30 \\ -150 & 273 & 318 & -159 & -12 \end{pmatrix}$

7.8) $A = \begin{pmatrix} 216 & -360 & -426 & 205 & 31 \\ -174 & 318 & 366 & -178 & -28 \\ 354 & -624 & -732 & 362 & 56 \\ 258 & -456 & -546 & 280 & 40 \\ -186 & 330 & 402 & -196 & -10 \end{pmatrix}$

7.9) $A = \begin{pmatrix} 43 & 11 & -17 & 17 & -5 \\ 17 & 32 & -2 & -27 & -4 \\ 86 & -36 & -63 & -24 & -97 \\ 120 & -30 & -125 & 9 & -163 \\ -121 & 52 & 120 & 54 & 182 \end{pmatrix}$

8. Найти базисы пространств $V = \text{l.h.}\{u_1, \ldots, u_6\}$ и $U = \text{l.h.}\{u_1, u_2, u_3\} \cap \text{l.h.}\{u_4, u_5, u_6\}$. Ортогонализировать найденные базисы. (`with(LinearAlgebra), Basis, IntersectionBasis, GramSchmidt`)

8.1) $u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (1,2,3), \quad u_3 = (0,1,2),$
$u_4 = (1,0,0), \quad u_5 = (1,2,1), \quad u_6 = (4,4,2).$

8.2) $u_1 = (1,0,1), \quad u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (2,1,1),$
$u_4 = (1,1,1), \quad u_5 = (1,0,0), \quad u_6 = (1,0,1).$

9. Найти общее решение дифференциального уравнения

9.1) $x^2y' = y(x + y)$.

9.2) $y'^2 + 2(x - 1)y' - 2y = 0$.

9.3) $x^2y' - 2xy = 3y$.

9.4) $y'^2 + (3x - 6)y' = 3y$.

9.5) $(x + y)^2y' = 1$.

9.6) $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$.

9.7) $x^2y'^2 + y^2 = 2x(2 - yy')$.

9.8) $xy' = e^y + 2y'$.

9.9) $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$.

Изобразите фазовое пространство этого уравнения. (`with(DEtools);`)

10. Нарисовать образ прямоугольника $[-2-2i; 2+2i]$ при отображении $w : \mathbb{C} \ni z \mapsto w(z) \in \mathbb{C}$. (`with(plots);`)

10.1) $w(z) = e^z$.

10.2) $w(z) = \cos(z)$.

10.3) $w(z) = \sin(z)$.

10.4) $w(z) = \ln(z)$.

10.5) $w(z) = \mathrm{ch}(z)$.

10.6) $w(z) = z^3$.

10.7) $w(z) = (3z + i)/(z - 1)$.

10.8) $w(z) = z^z$.

10.9) $w(z) = z + 1/z$.

11. Изобразите тор.

12. Изобразите поле векторов $F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}^2$ на прямоугольнике P.
(`with(plots);`)

12.1) $F(x, y) = (\sin x + \cos y, \sin x \cos y)$, $P = [1; 5] \times [-1; 1]$.

12.2) $F(x, y) = (x^2 + y, x + y^2)$, $P = [-1; 4] \times [-1; 1]$.

12.3) $F(x, y) = (xy, x \cos(y))$, $P = [0; 1] \times [0; 1]$.

12.4) $F(x, y) = (\sin(x) + y^2, \cos(x)/y)$, $P = [0; 5] \times [1; 3]$.

12.5) $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$, $P = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

12.6) $F(x, y) = (1, x + y)$, $P = [-50; 50] \times [-10; 70]$.

12.7) $F(x, y) = (e^{x+y}, \ln(x + y))$, $P = [1; 5] \times [1; 3]$.

12.8) $F(x, y) = (\arcsin x + \arccos y, \sin(\pi^2 xy))$, $P = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

12.9) $F(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$, $P = [-5; 5] \times [1; 6]$.

13. Сгенерируйте случайный граф G на 10 вершинах. Проверьте планарность графа G. Найдите его остовное дерево T. Нарисуйте графы G и T.
(`with(networks);`)

Литература

[1] Дьяконов В. Maple 6: учебный курс. — СПб.: Питер, 2001. — 608с.

[2] Семенов С.П., Славский В.В. Системы компьютерной математики. Учебное пособие для студентов математического факультета АГУ. — Барнаул.: Изд-во Алт.. ун-та, 2000. — 120с.

[3] Посмотрите, что есть в нашей библиотеке.