МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Ф. М. ДОСТОЕВСКОГО

Математический факультет
Кафедра математического моделирования

Б. Ю. Пичугин

Семинары по теории вероятностей и математической статистике для химиков

Методические указания

Издательство Омского госуниверситета Омск, 2005 г.

УДК 519.2
ББК 22.17
П 364

Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским советом ОмГУ

П 364 Б.Ю. Пичугин. Семинары по теории вероятностей и математической статистике для химиков. Омск: ОмГУ, 2005. — 28 с.

Данное учебное пособие написано по материалам семинаров, которые автор проводил для студентов второго курса химического факультета Омского госуниверситета с 2002 по 2005 год в рамках курса «высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика».

УДК 519.2
ББК 22.17

© Омский госуниверситет, 2005

© Б.Ю. Пичугин, 2005

Оформлено в системе LaTeX

Содержание

1 Элементарная теория вероятностей **4**
1. Вводный семинар 4
2. Элементы комбинаторики и классическое определение вероятности 5
3. Сложение событий. Геометрическая схема 7
4. Условная вероятность 8
5. Схема Бернулли 10
6. Контрольная работа №1 11

2 Случайные величины **12**
7. Функция распределения 12
8. Дискретные и непрерывные случайные величины 13
9. Числовые характеристики случайных величин 14
10. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Центральная предельная теорема 15
11. Случайные векторы 17
12. Контрольная работа №2 18

3 Математическая статистика **19**
13. Выборка. Задача об оценивании параметров. 19
14. Проверка гипотезы о виде генерального распределения. Критерий χ^2 20
15. Сравнение выборок 20
16. Линейный регрессионный анализ 21

Приложения **22**
1. Справочные таблицы 22
2. Задание для самостоятельного решения по разделу математическая статистика 27
3. Требования к получению зачета 28

Раздел 1

Элементарная теория вероятностей

1. Вводный семинар

Что такое случайность? Для того, чтобы дать ответ на этот вопрос, рассмотрим некоторые примеры. Можно ли узнать точное количество молекул кислорода в трехлитровой банке? Зная давление и температуру можно, но не точно. Вряд ли давление и температура изменяться если мы удалим одну-две молекулы из банки. Таким образом число молекул — случайно. Можем ли мы угадать карту, которую мы вытащим из середины перемешанной колоды? Нет. Карта — это случайная величина. Если мы бросим игральную кость, сможем ли мы точно сказать, что выпадет шестерка? Нет. Выпадение шестерки — это случайное событие. Сами приведите примеры случайных величин и событий.

Событие будем называть случайным, если про него неизвестно, произойдет оно или нет в результате эксперимента. Величину (числовую) будем называть случайной, если ее значение становится известным только в результате эксперимента.

Исход данного конкретного эксперимента предсказать невозможно (так как он случайный). Но, оказывается, что если повторять один и тот же эксперимент много раз, то в полученной цепи случайностей можно обнаружить некоторые закономерности. Теория вероятностей и занимается исследованием этих закономерностей.

1.1. Молодой человек играет в русскую рулетку. В барабане всего один патрон (из шести). Оцените шансы выжить после первого выстрела. А если первый выстрел — осечка, то каковы шансы после второго? А после третьего, четвертого, . . . ,?

1.2. Каковы шансы выиграть в обычную рулетку в зависимости от вида ставки. Сможете ли Вы выиграть в рулетку, если будете долго играть? Почему говорят, что в рулетку выигрывает только казино?

1.3. Известно, что в месяц в среднем происходит 2 ДТП на 1000 автомобилей. Страховая компания предлагает следующие условия: страховка стоит 0.5% от стоимости машины в месяц, в страховом случае выплачивается полная стоимость автомобиля. Почему такое страховое общество будет процветать? Что нужно знать для того, чтобы организовать прибыльное страховое общество?

1.4. У Вас в руках колода карт. Оцените шанс наудачу вытащить а) десятку крестей, б) десятку, в) кресты, г) картинку.

1.5. Петя задумал масть. Каковы шансы, что Вы вытащите карту такой же масти?

1.6. Крупье бросает два кубика. Вы ставите на сумму. Если Вы угадаете, то Вам возвращают выигрыш в размере семи ставок. Как выгодней всего играть?

1.7. Если бросать три кубика, то какая сумма очков 9 выпадает в одном из 6 случаев (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)? Сумма 10 также выпадает в одном из 6 случаев (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). Следовательно, шансы выпадения для 9 и для 10 одинаковы. Но если Вы будете проводить этот эксперимент достаточно долго, то заметите, что 10 выпадает чаще 9. Почему?

1.8. Кодовый замок на сейфе кодируется четырьмя цифрами. Каковы шансы угадать шифр с первой попытки?

2. Элементы комбинаторики и классическое определение вероятности

Теоретический материал.

1. Подсчёт числа выборок объёма k из генеральной совокупности объёма n:

	без возвращений	с возвращениями
по порядку (размещения)	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $k \leqslant n$,	$\bar{A}_n^k = n^k$
без порядка (сочетания)	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \leqslant n$,	C_{n+k-1}^k

3. Классическое определение вероятности: если исходы равновозможны и их конечное число, то $\mathsf{P}(A) = \frac{\text{число благоприятных для } A \text{ исходов}}{\text{число всех исходов}}$.

2.1. В мешке лежат разноцветные шарики, одинаковые на ощупь. Из мешка не глядя извлекают один шарик. Для этого испытания приведите примеры несовместных событий, полной группы событий.

2.2. В мешке лежат 9 красных и 5 синих шара. Найдите вероятность наудачу вытащить синий шар.

2.3. Все грани куба окрасили, а затем его распилили на 1000 маленьких кубиков. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь а) три, б) две, в) одну, г) ни одной окрашенной грани.

2.4. На клавиатуре компьютера 101 клавиша. Мартышка наудачу ударила по клавишам 19 раз. Чему равна вероятность того, что мартышка набрала словосочетание «теория вероятностей»?

2.5. У мартышки есть 7 кубиков с буквами А, Б, В, Ж, Р, С, О. Она наудачу выложила 4 кубика в ряд. Найдите вероятность того, что получилось слово «РОСА».

2.6. У мартышки есть 7 кубиков с буквами А, Б, В, Ж, Р, С, О. Она наудачу выбрала 4 кубика. а) Найдите вероятность того, что она выбрала буквы А, О, Р, С. б) Найдите вероятность того, что на двух из четырёх выбранных кубиков написаны буквы А и О.

2.7. У мартышки есть 9 красных и 5 синих шара. Она выбрала 6 шаров. Найдите вероятность того, что она выбрала 4 красных и 5 синих шара.

2.8. Найдите вероятность угадать а) 5 номеров; б) 3 номера в лотерею «5 из 36».

2.9. У мартышки есть 4 шарика с цифрами 1, 2, 3, 4. Она 10 раз показывает нам какой-нибудь шарик. Найдите вероятность того, что шарик №1 она показала 1 раз, шарик №2 — 2 раза, шарик №3 — 3 раза, шарик №4 — 4 раза.

2.10. У мартышки есть ящик с 4 отсеками и 10 одинаковых дробинок. Она наудачу раскладывает дробинки по отсекам. Найдите вероятность того, что в первый отсек она положила одну дробинку, во второй — две, в третий — три и в четвертый — четыре.

Для самостоятельного решения

2.11. В ящике лежат жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный жетон содержит цифру 7.

2.12. В мешке лежат 20 шариков с номерами от 1 до 20. Из мешка наудачу извлекают три шарика. Найдите вероятность того, что номера всех извлеченных шариков меньше 10.

2.13. Имеется 10 лампочек: 4 красных, 6 зеленых и 10 кнопок для каждой лампочки. Перед началом эксперимента все лампочки погашены. Мартышка нажала 7 кнопок. Найдите вероятность того, что зажглись 2 красных и 5 зеленых лампочек.

3. Сложение событий. Геометрическая схема

Сложение событий

3.1. В мешке лежат разноцветные шарики, одинаковые на ощупь. Из мешка не глядя извлекают один шарик. Для этого испытания укажите элементарные исходы, приведите примеры суммы событий, произведения событий, разности событий и дополнения.

3.2. Нейтрон столкнулся с атомом урана. В результате столкновения нейтрон может отразиться с вероятностью 0.02, поглотиться с вероятностью 0.76 и вызвать деление ядра с вероятностью 0.22. Чему равна вероятность того, что после столкновения нейтрон отразится или поглотится? Чему равна вероятность того, что после столкновения нейтрон не поглотится?

3.3. Вероятность того, что на семинар по высшей математике опоздает хотя бы один молодой человек равна 0.6. Вероятность опоздания хотя бы одной девушки равна 0.7. Вероятность того, что опоздает молодой человек вместе с девушкой равна 0.3. Чему равна вероятность того, что кто-нибудь опоздает?

3.4. Найдите $\mathsf{P}(A\overline{B})$, если $\mathsf{P}(A) = 0.5$, $\mathsf{P}(B) = 0.8$, $\mathsf{P}(A + B) = 0.95$.

Геометрическая схема

3.5. Внутри белого квадрата со стороной 3 закрашен черной краской круг радиуса 1. Из квадрата наудачу выбрали точку. Найдите вероятность того, что точка белая.

3.6. На отрезок AB наудачу брошена точка C. Найдите вероятности событий $U = \{AC < CB\}$, $V = \{AC > 2\,CB\}$, $W = \{$*меньший из отрезков* AC *и* CB *больше* $AB/3\}$.

3.7. Из отрезка AB наудачу выбраны точки C и D. Найдите $\mathsf{P}(AC < 2\,AD)$.

3.8. На отрезок AB наудачу брошена точка C. Затем на отрезок CB наудачу брошена точка D. Найдите вероятность события $U = \{CD < AB/2\}$.

3.9 (Задача о встрече). Два шпиона договорились встретиться в месте X между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет 15 минут и уходит. Найдите вероятность того, что шпионы встретятся, если момент прихода каждый шпион выбирает наудачу.

3.10 (Задача Бюффона, франц. естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2b$ ($b < a$). Найдите вероятность того, что игла пересечет одну из прямых.

Для самостоятельного решения

3.11. Известно, что $\mathsf{P}(A) = 0.8$, $\mathsf{P}(B) = 0.77$, $\mathsf{P}(A + B) = 0.95$. Найдите $\mathsf{P}(AB)$.

3.12. Внутри трехлитровой банки стоит стакан (200мг) и летает муха. Найдите вероятность того, что сегодня в два часа дня муха будет в стакане.

3.13. На отрезок AB длины 16 наудачу брошена точка C. Найдите вероятность события $U = \{AC^2 > AB\}$.

4. Условная вероятность

4.1. Есть 11 карточек: В, Е, Р, О, Я, Т, Н, О, С, Т, Ь. Наудачу по очереди извлекают 6 карточек. Найдите вероятность того, что появилось слово «ЯРОСТЬ».

4.2. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

4.3. Игральный кубик бросили 4 раза. Найдите вероятность того, что а) всякий раз выпадало число, меньшее 5; б) меньшее 5 число выпадало ровно 3 раза.

4.4. Есть 4 цветных кубика со следующими цифрами на гранях: синий — 1, 1, 1, 5, 5, 5; красный — 2, 2, 2, 2, 6, 6; желтый — 3, 3, 3, 3, 3, 3; белый — 0, 0, 4, 4, 4, 4. Два игрока по очереди выбирают кубик и бросают его. Выигрывает тот игрок, у которого выпало больше очков. За какого игрока выгодней играть: за того, кто берёт кубик первым, или за второго?

4.5. Три исследователя проводят одинаковый опыт. Вероятность того, что первый допустит ошибку в расчетах равна 0.1, второй — 0.15 и третий — 0.2. Найдите вероятность того, что ошибку допустит хотя бы один исследователь.

4.6. Три химика изготовили три динамитные шашки. Вероятность того, что динамит, изготовленный первым химиком, взорвётся, равна 0.2, вторым — 0.4, а третьим — 0.9. Вы наудачу выбрали одну из шашек и подожгли фитиль. а) Найдите вероятность того, что динамит взорвётся. б) Динамит взорвался. Найдите вероятность того, что это была шашка третьего химика. Хотя теперь уже всё равно, чья она была...

4.7. Добрый молодец подъехал к дорожному камню, на котором написано: «налево пойдешь — коня потеряешь с вероятностью 0.6, направо пойдешь — коня потеряешь с вероятностью 0.4, а прямо пойдешь — с вероятностью 0.9 потеряешь коня». Подумал д.м. и решил: брошу я кубик игральный, если выпадет 1 или 2, налево пойду, если 3, 4 или 5 — направо, ну а если 6, то прямо! а) Найдите вероятность того, что потеряет коня добрый молодец. б) Ну хорошо. Он его потерял. Найдите вероятность того, что он пошел прямо.

4.8. Пётр и Василий решили стреляться. Пётр может попасть в Василия с вероятностью 0.4, а Василий в Петра — с вероятностью 0.6. Стреляют по очереди до первого попадания. Первым стреляет Пётр. Найдите вероятность того, что Пётр выживет.

Для самостоятельного решения

4.9. Из 100 лотерейных билетов всего 5 выигрышных. Найдите вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

4.10. Разработчики гарантируют, что вероятность поломки прибора равна 0.03. Найдите вероятность того, что сломается хотя бы один из 100 таких приборов. Удивлены?

4.11. У Вас есть четыре пробирки. Вероятность того, что в первой пробирке кислота, равна 0.6, во второй — 0.3, в третьей — 0.7, а в четвертой — 0.9. Вы наудачу выбрали пробирку и окунули в нее палец. а) Найдите вероятность того, что Вы ощутите жжение. б) Вы почувствовали жжение. Найдите вероятность того, что Вы выбрали вторую пробирку. Хотя...

5. Схема Бернулли

5.1. Игральный кубик бросили 9 раз. Найдите вероятность того, что шестерка выпала а) ровно три раза; б) меньше трех раз; в) больше трех раз.

5.2. Вероятность появления события A равна 0.004. Найдите вероятность того, из 1000 испытаний событие A возникнет а) ровно три раза; б) меньше трех раз; в) больше трех раз.

5.3. Игральный кубик бросили 7000 раз. Найдите вероятность того, что тройка выпала ровно 1160 раз.

5.4. Вероятность появления события A равна 0.3. Найдите вероятность того, из 1000 испытаний событие A возникнет а) не менее 100 и не более 320 раз, б) не менее 280 и не более 310 раз.

5.5. В 2000 испытаниях событие A возникло 123 раза. а) Оцените вероятность события A на уровне доверия $\delta = 0.94$. б) Сколько нужно провести испытаний, чтобы на уровне доверия 0.94 оценить вероятность события A с точностью 0.01.

5.6. Кондитерская фабрика «Пышка» выпускает булочки с изюмом. На 1000 булочек уходит 10000 изюминок. Найдите вероятность того, что в купленной Вами булочке будет ровно 10 изюминок.

5.7 (Страховое общество). Страховка стоит 120 рублей, в страховом случае Вам выплачивают 10000 рублей. а) Найдите вероятность того, что страховое общество понесет убытки, если оно заключило 1000 договоров, а вероятность страхового случая равна 0.01. б) Сколько необходимо заключить договоров, чтобы с вероятностью 0.99 прибыль страхового общества составила 100 тыс. рублей.

Для самостоятельного решения

5.8. Монетку подбросили 10 раз. Найдите вероятность того, что орел выпал 4 раза.

5.9. Монетку подбросили 1000 раз. Найдите вероятность того, что орел выпал а) ровно 444 раза; б) не менее 400 и не более 550 раз.

5.10. Событие A возникает с вероятностью 0.007. Найдите вероятность того, что в 700 испытаниях событие A появится ровно 6 раз.

6. Контрольная работа №1

Вариант 0

6.1. Из карточной колоды (52 карты) извлекли все пики и все десятки. Найдите вероятность того, что извлеченная из оставшейся колоды карта будет картинкой.

6.2. На отрезок AB длины 27 см наудачу брошена точка C. Найдите вероятность того, что наибольший из отрезков AC и CB будет меньше 20 см.

6.3. Два стрелка поражают мишень с вероятностями 0.79 и 0.89 соответственно. Стрелки произвели по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена.

6.4. У Вас есть 10 пробирок: 3 больших и 7 маленьких. Вероятность того, что в большой пробирке окажется вода равна 0.19, а в маленькой — 0.89. Найдите вероятность того, что в наудачу выбранной пробирке будет вода.

6.5. За сутки из $1.23 \cdot 10^6$ атомов вещества радиоактивному распаду подверглись $3.11 \cdot 10^3$ атомов. На уровне доверия $\delta = 0.95$ оцените вероятность распада атома вещества в течение суток.

Раздел 2

Случайные величины

7. Функция распределения

7.1. Постройте функцию распределения дискретной случайной величины ξ, распределение которой определено таблицей $\begin{array}{c|cccc} \xi & 1 & 2.5 & 5 & -4 \\ \hline \mathsf{P} & 0.1 & 0.25 & 0.25 & 0.4 \end{array}$.

7.2. Пусть ξ — это координата точки, наудачу выбранной из $[-2;8]$. Постройте $F_\xi(x)$.

7.3. На плоскости даны три точки $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(1,1)$. Пусть ξ — это абсцисса точки, наудачу выбранной из треугольника ABC. Постройте $F_\xi(x)$.

7.4. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$. Найдите $\mathsf{P}(\xi < 1)$, $\mathsf{P}(\xi \geqslant \sqrt{3})$, $\mathsf{P}(\xi \leqslant 0)$, $\mathsf{P}(0 \leqslant \xi < 1)$, $\mathsf{P}(\operatorname{arctg}(\xi) < 1)$.

7.5. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ a(1+x)(5-x), & -1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. а) Найдите параметр a, если $\mathsf{P}(\xi = 2) = 0.5$. б) Для найденного параметра a вычислите $\mathsf{P}(-4 < \xi < 1)$, $\mathsf{P}(0 \leqslant \xi < 7)$, $\mathsf{P}(|\xi| > 1)$, $\mathsf{P}(\xi^2 < 4)$, $\mathsf{P}(\xi^2 + \xi < 2)$. в) Найдите u такое, что $\mathsf{P}(\xi < u) = 1/3$.

Для самостоятельного решения

7.6. Постройте функцию распределения дискретной случайной величины ξ, распределение которой определено таблицей $\begin{array}{c|ccc} \xi & 1 & -3 & 6 \\ \hline \mathsf{P} & 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{array}$.

7.7. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Вычислите $\mathsf{P}(\sqrt{\xi - 1} < 2)$.

7.8. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ a\sqrt{x+1}, & -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Найдите параметр a, если $\mathsf{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}$.

8. Дискретные и непрерывные случайные величины

8.1. Пётр поражает мишень с вероятностью 0.3, а Иван — с вероятностью 0.6. Каждый сделал по два выстрела. Найдите распределение общего числа попаданий ξ.

8.2. Запишите распределение случайных величин $\xi \in \mathrm{U}(2)$, $\eta \in \mathrm{B}(5, 0.3)$, $\zeta \in \mathrm{G}(0.3)$. Дайте им содержательную интерпретацию.

8.3. Дана дискретная случайная величина ξ: $\begin{array}{c|cccc} \xi & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0.8 \\ \hline \mathsf{P} & 0.3 & 0.2a & 0.1a^2 & 0.4 \end{array}$. Определите параметр a. Найдите $\mathsf{P}(\xi < 0)$, $\mathsf{P}(|\xi| < 0.65)$, $\mathsf{P}(\xi^2 > 0.2)$.

8.4. Среднее число маршруток, подъезжающих к остановке за 1 минуту, равно 0.46. Найдите вероятность того, что за полчаса к остановке подойдет ровно 10 маршруток.

8.5. Пусть случайная величина ξ — это координата наудачу брошенной точки на отрезок $[1; 5]$. Является ли эта случайная величина непрерывной? Если да, то найдите плотность ее распределения.

8.6. Случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Найдите параметр a и функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдите $\mathsf{P}(\xi^2 - \xi > 2)$.

8.7. Случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$ Найдите $\mathsf{P}(-2 < \xi < 0.5)$. Найдите функцию распределения с.в. ξ.

8.8. Расчетное значение измеряемой величины равно 7, но в результате измерений эта величина в среднем может отклоняться от расчетного значения на 0.8. Пусть ξ — это значение величины, полученное после измерения. Найдите $\mathsf{P}(\xi - 7 > 0.8)$, $\mathsf{P}(|\xi - 7| > 1.2)$.

Для самостоятельного решения

8.9. Дана дискретная случайная величина ξ: $\begin{array}{c|cccc} \xi & 1 & 2 & 10 & 45 \\ \hline \mathsf{P} & 2a & 3a & 5a & 0.3 \end{array}$. Определите параметр a. Найдите $\mathsf{P}(\xi < 7)$, $\mathsf{P}(\xi^{10} - 1 > 0)$.

8.10. Случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$ Найдите $\mathsf{P}(\xi^2 + 6\xi > 7)$. Найдите функцию распределения с.в. ξ.

8.11. Дана случайная величина $\xi \in \mathrm{N}(-6, 2)$. Найдите $\mathsf{P}(2\xi + 11 > 0)$.

9. Числовые характеристики случайных величин

9.1. Дана дискретная случайная величина ξ: $\begin{array}{c|cccc} \xi & -2 & 1 & 3 & 7 \\ \hline \mathsf{P} & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{array}$. Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\xi^2$, $\mathsf{D}\xi$, $\sigma(\xi)$, $\mathsf{M}(\xi - 3)^2$, $\mathsf{M}\sin\frac{\xi\pi}{3}$.

9.2. Случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$

Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\xi^2$, $\mathsf{D}\xi$, $\sigma(\xi)$, $\mathsf{M}(\xi - 3)^2$, $\mathsf{M}\sqrt{\xi}$.

9.3. Вероятность того, что молекула вещества вступит реакцию в течение 1 секунды, равна $1.33{\cdot}10^{-3}$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение числа молекул, вступивших в реакцию в течение 1 секунды, если количество молекул равно $1.27 \cdot 10^5$.

9.4. В условиях задачи 9.3 найдите среднее, дисперсию и стандартное отклонение времени ожидания вступления в реакцию очередной молекулы.

9.5. Муха ползает по ребрам правильного тетраэдра. Каждое ребро она проползает ровно за 1 минуту. В одной из вершин тетраэдра сидит паук, который обязательно съест муху, как только она приползет в эту вершину. Найдите среднее, дисперсию и стандартное отклонение времени жизни мухи, если в начальный момент муха сидит в вершине и очередное ребро она выбирает наудачу.

9.6. Случайные ξ, η — независимы и $\mathsf{M}\xi = 3$, $\mathsf{M}\eta = -2$, $\mathsf{D}\xi = 1$, $\mathsf{D}\eta = 2$. Найдите $\mathsf{M}(\xi+\eta)$, $\mathsf{D}(2\xi-4\eta)$, $\mathsf{M}(\xi\eta)$, $\mathsf{M}\xi^2$, $\mathsf{M}\eta^2$, $\mathsf{D}(\xi\eta)$, $\mathsf{M}(\xi\eta+\xi)$, $\mathsf{D}(\xi\eta+\xi)$.

9.7. Случайные ξ и η таковы, что $\mathsf{M}\xi = 4$, $\mathsf{M}\eta = -1$, $\mathsf{D}\xi = 1$, $\mathsf{D}\eta = 4$, $\mathsf{D}(\xi+\eta) = 1.5$. Найдите $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$, $\mathsf{M}(\xi\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$. Сделайте вывод о наличии или отсутствии линейной зависимости между ξ и η.

Для самостоятельного решения

9.8. Пусть ξ — выпавшее на кубике число очков. Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{M}\sin\frac{\xi\pi}{4}$.

9.9. Случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$ Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\sigma(\xi)$, $\mathsf{M}\sqrt{\xi}$.

9.10. Случайные величины ξ и η таковы, что $\mathsf{M}\xi = 2$, $\mathsf{M}\eta = -8$, $\mathsf{D}\xi = 2$, $\mathsf{D}\eta = 6$, $\mathsf{M}(\xi\eta) = -14$. Найдите $\mathsf{D}(\xi+\eta)$.

10. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Центральная предельная теорема

Неравенство Чебышева

10.1. Пусть случайная величина ξ такова, что $\mathsf{D}\xi = 1$. Используя неравенство Чебышева, оцените сверху вероятность того, что ξ отклонится от своего математического ожидания не менее, чем на 5.

10.2. Используя неравенство Чебышева, оцените снизу вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на три стандартных отклонения.

10.3. Пусть ζ — это число маршруток, подъехавших к остановке в течение часа. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность $\mathsf{P}(20 \leqslant \zeta \leqslant 40)$, если среднее число маршруток, подъезжающих к остановке в течение часа, равно $\lambda = 30$.

Теорема Чебышева

10.4. Последовательность независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ... задана распределениями $\begin{array}{c|cc} \xi_n & a & -a \\ \hline \mathsf{P} & \frac{n}{2n+1} & \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$, $n = 1, 2, \ldots$. Применима ли для этой последовательности теорема Чебышева?

10.5. Последовательность независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ... задана распределениями $\begin{array}{c|cc} \xi_n & 1 & n \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$, $n = 1, 2, \ldots$. Применима ли для этой последовательности теорема Чебышева?

Центральная предельная теорема

10.6. Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... такая, что $\mathsf{M}\xi_1 = 3$, $\mathsf{D}\xi_1 = 2$. Пусть $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Используя центральную предельную теорему, оцените вероятность $\mathsf{P}(3 < \xi < 4)$ для $n = 25$. Сколько нужно провести испытаний, чтобы эта вероятность была больше, чем $\delta = 0.49$?

10.7. Пусть ξ — это число «успехов» в 500 испытаниях, с вероятностью «успеха» в одном испытании $p = 0.2$. Используя центральную предельную теорему, оцените вероятность $\mathsf{P}(80 \leqslant \xi \leqslant 130)$. Сравните результат с вероятностью $P(80, 130)$, вычисленной при помощи интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

10.8. Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... такая, что $\xi_n \in \mathrm{G}(0.2)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Сколько нужно провести испытаний, чтобы вероятность $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \leqslant 0.01)$ была больше $\delta = 0.95$?.

Для самостоятельного решения

10.9. Пусть ξ — это число «успехов» в 100 испытаниях, с вероятностью «успеха» $p = 0.3$. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность $\mathsf{P}(20 \leqslant \xi \leqslant 40)$.

10.10. Последовательность независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ... задана распределениями $\begin{array}{c|cc} \xi_n & n+1 & -n \\ \hline \mathsf{P} & \frac{n}{2n+1} & \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$, $n = 1, 2, \ldots$. Применима ли для этой последовательности теорема Чебышева?

10.11. Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... такая, что $\xi_n \in \mathrm{E}(0.2)$. Пусть $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Используя центральную предельную теорему, оцените вероятность $\mathsf{P}(3 < \xi < 5.5)$ для $n = 36$. Сколько нужно провести испытаний, чтобы эта вероятность была больше, чем $\delta = 0.92$?

11. Случайные векторы

11.1. Пусть (ξ, η) — это координаты точки, наудачу выбранной из треугольника ABC, с координатами вершин $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,2)$. а) Найдите функцию распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$ и плотность $f_{\xi,\eta}(x,y)$ вектора (ξ,η). б) Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{M}\xi\eta$, $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$, $\mathsf{D}(\xi+\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$, $\mathsf{M}(\xi^2\eta+2\eta)$.

11.2. Бросили игральный кубик и выпавшее число очков разложили на множители. Пусть ξ — это количество двоек в разложении, а η — количество троек. а) Запишите распределение случайного вектора (ξ,η) в виде таблицы. б) Найдите функцию распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$. в) Найдите $\mathsf{M}((\xi+1)(\eta+2))$.

11.3. Дискретный случайный вектор (ξ,η) задан распределением

$\eta \setminus \xi$	-2	3	4
-2	0.15	0.30	0.05
3	0	0.33	0.17

. а) Найдите распределения случайных величин ξ и η по отдельности. б) Найдите $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$, $\mathsf{M}(\xi\eta)$, $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$, $\mathsf{M}\sin(\frac{\pi}{3}\xi+\frac{\pi}{4}\eta)$, $\mathsf{D}(2\xi-\eta)$.

11.4. Пусть $F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0, \\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x>0,\ y>0, \end{cases}$ — функция распределения случайного вектора (ξ,η). а) Найдите $\mathsf{P}(\xi<1,\ \eta<3)$, $\mathsf{P}(1<\xi<2,\ \eta<1)$, $\mathsf{P}(1<\xi<3,\ 2<\eta<4)$, $\mathsf{P}(-2<\xi<1,\ -1<\eta<3)$. б) Найдите плотность $f_{\xi,\eta}(x,y)$ распределения случайного вектора (ξ,η). в) Найдите $\mathsf{M}(4^{-\xi-2\eta})$. г) Найдите вероятность попадания точки (ξ,η) в треугольник с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,2)$.

Для самостоятельного решения

11.5. На плоскости отмечены точки $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$, $D(2,2)$. Пусть (ξ,η) — координаты точки, наудачу выбранной из отмеченных. а) Запишите распределение случайного вектора (ξ,η) в виде таблицы. б) Найдите $\mathsf{P}(\xi>0.5,\ \eta<0.5)$. в) Найдите $\mathsf{M}(\xi\eta)$.

11.6. Пусть $F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0, \\ 1-e^{-x}-e^{-2y}+e^{-x-2y}, & x>0,\ y>0, \end{cases}$ — функция распределения случайного вектора (ξ,η). Найдите $\mathsf{P}(-1<\xi<3,\ 2<\eta<4)$.

11.7. В условиях задачи 11.6 найдите $\mathsf{M}(e^{-2\xi-\eta})$.

12. Контрольная работа №2

Вариант 0

12.1. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Найдите вероятность $\mathsf{P}(2\xi^2 - \xi > 3)$.

12.2. Дискретная случайная величина ξ имеет распределение

ξ	-1	x	3	5
P	0.1	a	0.4	0.2

. Определите параметры x и a, если $\mathsf{M}\xi = 2.8$.

12.3. Пусть $f_\xi(x) = \begin{cases} .0, & x < -1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найдите $F_\xi(x)$.

12.4. Случайная величина ξ такова, что $\mathsf{D}\xi = 1$. Используя неравенство Чебышева, оцените снизу вероятность $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \leqslant 3)$.

12.5. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых случайных величин определена распределениями

ξ_n	$-n$	2	n
P	$\frac{1}{n^2}$	$1 - \frac{2}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

. Применима ли к данной последовательности теорема Чебышева?

Раздел 3

Математическая статистика

13. Выборка. Задача об оценивании параметров.

Для выборки

0.4	0.1	0.3	0.0	0.0	0.3	2.9	0.8
0.2	1.6	0.2	1.4	1.2	0.0	0.2	0.6
0.4	1.5	0.0	0.0	1.5	0.8	2.4	1.3
0.0	0.3	0.3	0.4	0.0	0.0	1.8	1.3
2.3	2.5	3.0	1.0	0.2	0.5	1.4	2.2

13.1. Постройте распределение частот.

13.2. Найдите размах выборки $\omega 3$).

13.3. Постройте гистограмму.

13.4. Найдите точечные оценки математического ожидания $\bar{x}$ и дисперсии s, s^2.

13.5. Предположив, что генеральное распределение относится к классу $\mathrm{E}(\lambda)$, оцените параметр λ.

13.6. Предположив, что генеральное распределение относится к классу $\mathrm{U}(\alpha, \beta)$, оцените параметры α и β.

13.7. На уровнях доверия $\delta = 0.9$ и $\delta = 0.99$ постройте доверительные интервалы для математического ожидания. Рассмотрите два случая: 1) когда генеральное распределение не является нормальным ($\xi \not\sim \mathrm{N}(\cdot, \cdot)$); 2) когда генеральное распределение является нормальным ($\xi \sim \mathrm{N}(\cdot, \cdot)$).

13.8. На уровне доверия $\delta = 0.9$ постройте доверительный интервал для дисперсии. Рассмотрите два случая: 1) когда генеральное распределение не является нормальным ($\xi \not\sim \mathrm{N}(\cdot, \cdot)$); 2) когда генеральное распределение является нормальным ($\xi \sim \mathrm{N}(\cdot, \cdot)$).

14. Проверка гипотезы о виде генерального распределения. Критерий χ^2

Для выборки

8.39	8.01	7.22	7.22	5.50	7.93	9.31
6.11	7.94	3.44	6.73	11.31	4.25	7.40
9.25	4.63	8.23	10.10	6.91	8.35	
7.84	4.99	5.70	6.07	8.96	6.47	
6.25	10.42	8.63	12.77	10.96	8.95	

14.1. Вычислите: n, $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\bar{x}$, s, s^2.

14.2. Используя критерий χ^2, проверьте гипотезу о равномерности генерального распределения, разбив отрезок $[\alpha^*;\beta^*]$ на 5 частотных интервалов.

14.3. Используя критерий χ^2, проверьте гипотезу о нормальности генерального распределения.

15. Сравнение выборок

Для выборок

X					Y				
2.79	8.46	2.78	5.34	4.52	3.26	5.15	0.12	9.41	6.76
1.66	4.54	2.95	4.02	3.77	4.91	7.11	1.76	9.37	8.98
3.00	6.35	2.40	4.97	5.99	4.87	2.64	4.92	4.81	
4.83	9.71	4.91	1.58	2.96	4.09	10.04	1.90	4.79	
4.87	3.40	6.30	7.36		5.69	2.27	4.76	5.61	

15.1. Проверьте гипотезу о совпадении математических ожиданий. Рассмотрите два случая: 1) когда генеральное распределение одной из выборок не является нормальным; 2) когда генеральные распределения обоих выборок нормальны.

15.2. Проверьте гипотезу о совпадении дисперсий. Рассмотрите два случая: 1) когда генеральное распределение одной из выборок не является нормальным; 2) когда генеральные распределения обоих выборок нормальны.

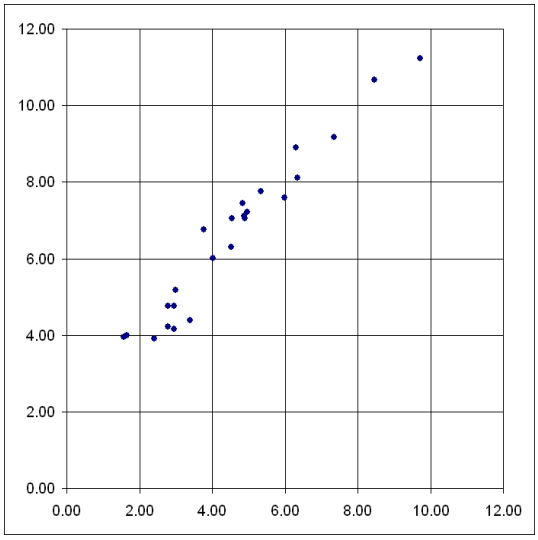
15.3. Используя критерий χ^2, проверьте гипотезу об однородности выборок X и Y.

16. Линейный регрессионный анализ

Даны выборки:

X				
2.79	8.46	2.78	5.34	4.52
1.66	4.54	2.95	4.02	3.77
3.00	6.35	2.40	4.97	5.99
4.83	9.71	4.91	1.58	2.96
4.87	3.40	6.30	7.36	

Y				
4.22	10.66	4.77	7.75	6.30
3.99	7.06	4.15	6.02	6.76
5.17	8.12	3.92	7.21	7.59
7.44	11.23	7.04	3.96	4.77
7.11	4.39	8.90	9.17	



Предположим, что между элементами выборок X и Y существует линейная зависимость

$$y_i = b_0 + b_1\, x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где b_0, b_1 — коэффициенты зависимости, $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma)$ — случайная ошибка наблюдений.

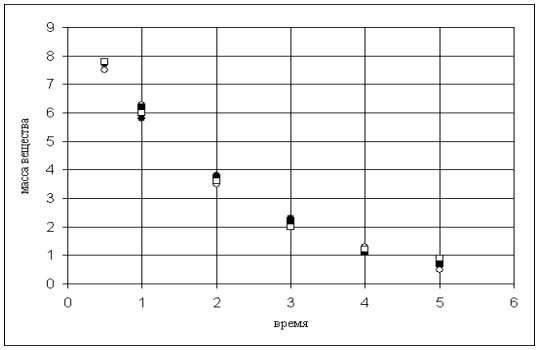
16.1. Найдите точечные оценки b_0^*, b_1^* коэффициентов линейной зависимости.

16.2. Используя критерий Фишера, проверьте гипотезу о незначимости линейной зависимости между X и Y.

16.3. Постройте доверительный интервал для коэффициента b_1. Используя найденный доверительный интервал, проверьте гипотезу о незначимости линейной зависимости между X и Y.

16.4. По следующим экспериментальным данным

время	масса вещества			
0.5	7.7	7.5	7.8	7.8
1	5.8	6.3	6.2	6
2	3.8	3.5	3.7	3.6
3	2.3	2.2	2.2	2
4	1.3	1.3	1.1	1.2
5	0.8	0.5	0.7	0.9



оцените период полураспада вещества и его первоначальное количество.

Приложения

1. Справочные таблицы

Таблица 1: Значения функции распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\, ds$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.30	0.6179	0.60	0.7257	0.90	0.8159	1.20	0.8849	1.50	0.9332
0.01	0.5040	0.31	0.6217	0.61	0.7291	0.91	0.8186	1.21	0.8869	1.51	0.9345
0.02	0.5080	0.32	0.6255	0.62	0.7324	0.92	0.8212	1.22	0.8888	1.52	0.9357
0.03	0.5120	0.33	0.6293	0.63	0.7357	0.93	0.8238	1.23	0.8907	1.53	0.9370
0.04	0.5160	0.34	0.6331	0.64	0.7389	0.94	0.8264	1.24	0.8925	1.54	0.9382
0.05	0.5199	0.35	0.6368	0.65	0.7422	0.95	0.8289	1.25	0.8944	1.55	0.9394
0.06	0.5239	0.36	0.6406	0.66	0.7454	0.96	0.8315	1.26	0.8962	1.56	0.9406
0.07	0.5279	0.37	0.6443	0.67	0.7486	0.97	0.8340	1.27	0.8980	1.57	0.9418
0.08	0.5319	0.38	0.6480	0.68	0.7517	0.98	0.8365	1.28	0.8997	1.58	0.9429
0.09	0.5359	0.39	0.6517	0.69	0.7549	0.99	0.8389	1.29	0.9015	1.59	0.9441
0.10	0.5398	0.40	0.6554	0.70	0.7580	1.00	0.8413	1.30	0.9032	1.60	0.9452
0.11	0.5438	0.41	0.6591	0.71	0.7611	1.01	0.8438	1.31	0.9049	1.61	0.9463
0.12	0.5478	0.42	0.6628	0.72	0.7642	1.02	0.8461	1.32	0.9066	1.62	0.9474
0.13	0.5517	0.43	0.6664	0.73	0.7673	1.03	0.8485	1.33	0.9082	1.63	0.9484
0.14	0.5557	0.44	0.6700	0.74	0.7704	1.04	0.8508	1.34	0.9099	1.64	0.9495
0.15	0.5596	0.45	0.6736	0.75	0.7734	1.05	0.8531	1.35	0.9115	1.65	0.9505
0.16	0.5636	0.46	0.6772	0.76	0.7764	1.06	0.8554	1.36	0.9131	1.66	0.9515
0.17	0.5675	0.47	0.6808	0.77	0.7794	1.07	0.8577	1.37	0.9147	1.67	0.9525
0.18	0.5714	0.48	0.6844	0.78	0.7823	1.08	0.8599	1.38	0.9162	1.68	0.9535
0.19	0.5753	0.49	0.6879	0.79	0.7852	1.09	0.8621	1.39	0.9177	1.69	0.9545
0.20	0.5793	0.50	0.6915	0.80	0.7881	1.10	0.8643	1.40	0.9192	1.70	0.9554
0.21	0.5832	0.51	0.6950	0.81	0.7910	1.11	0.8665	1.41	0.9207	1.71	0.9564
0.22	0.5871	0.52	0.6985	0.82	0.7939	1.12	0.8686	1.42	0.9222	1.72	0.9573
0.23	0.5910	0.53	0.7019	0.83	0.7967	1.13	0.8708	1.43	0.9236	1.73	0.9582
0.24	0.5948	0.54	0.7054	0.84	0.7995	1.14	0.8729	1.44	0.9251	1.74	0.9591
0.25	0.5987	0.55	0.7088	0.85	0.8023	1.15	0.8749	1.45	0.9265	1.75	0.9599
0.26	0.6026	0.56	0.7123	0.86	0.8051	1.16	0.8770	1.46	0.9279	1.76	0.9608
0.27	0.6064	0.57	0.7157	0.87	0.8078	1.17	0.8790	1.47	0.9292	1.77	0.9616
0.28	0.6103	0.58	0.7190	0.88	0.8106	1.18	0.8810	1.48	0.9306	1.78	0.9625
0.29	0.6141	0.59	0.7224	0.89	0.8133	1.19	0.8830	1.49	0.9319	1.79	0.9633

Продолжение таблицы 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.80	0.9641	2.00	0.9772	2.20	0.9861	2.40	0.9918	2.60	0.9953	2.80	0.9974
1.81	0.9649	2.01	0.9778	2.21	0.9864	2.41	0.9920	2.61	0.9955	2.82	0.9976
1.82	0.9656	2.02	0.9783	2.22	0.9868	2.42	0.9922	2.62	0.9956	2.84	0.9977
1.83	0.9664	2.03	0.9788	2.23	0.9871	2.43	0.9925	2.63	0.9957	2.86	0.9979
1.84	0.9671	2.04	0.9793	2.24	0.9875	2.44	0.9927	2.64	0.9959	2.88	0.9980
1.85	0.9678	2.05	0.9798	2.25	0.9878	2.45	0.9929	2.65	0.9960	2.90	0.9981
1.86	0.9686	2.06	0.9803	2.26	0.9881	2.46	0.9931	2.66	0.9961	2.92	0.9982
1.87	0.9693	2.07	0.9808	2.27	0.9884	2.47	0.9932	2.67	0.9962	2.94	0.9984
1.88	0.9699	2.08	0.9812	2.28	0.9887	2.48	0.9934	2.68	0.9963	2.96	0.9985
1.89	0.9706	2.09	0.9817	2.29	0.9890	2.49	0.9936	2.69	0.9964	2.98	0.9986
1.90	0.9713	2.10	0.9821	2.30	0.9893	2.50	0.9938	2.70	0.9965	3.00	0.9987
1.91	0.9719	2.11	0.9826	2.31	0.9896	2.51	0.9940	2.71	0.9966	3.20	0.9993
1.92	0.9726	2.12	0.9830	2.32	0.9898	2.52	0.9941	2.72	0.9967	3.40	0.9997
1.93	0.9732	2.13	0.9834	2.33	0.9901	2.53	0.9943	2.73	0.9968	3.60	0.9998
1.94	0.9738	2.14	0.9838	2.34	0.9904	2.54	0.9945	2.74	0.9969	3.80	0.99993
1.95	0.9744	2.15	0.9842	2.35	0.9906	2.55	0.9946	2.75	0.9970	4.00	0.99997
1.96	0.9750	2.16	0.9846	2.36	0.9909	2.56	0.9948	2.76	0.9971	4.50	0.999997
1.97	0.9756	2.17	0.9850	2.37	0.9911	2.57	0.9949	2.77	0.9972	5.00	1.000000
1.98	0.9761	2.18	0.9854	2.38	0.9913	2.58	0.9951	2.78	0.9973		
1.99	0.9767	2.19	0.9857	2.39	0.9916	2.59	0.9952	2.79	0.9974		

Таблица 2: Двусторонние квантили $t_{\delta,k}$ распределения Стьюдента.
δ — уровень доверия, k — число степеней свободы.

k	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$	$\delta = 0.99$	k	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$	$\delta = 0.99$
1	6.31	12.71	63.66	18	1.73	2.10	2.88
2	2.92	4.30	9.92	19	1.73	2.09	2.86
3	2.35	3.18	5.84	20	1.72	2.09	2.85
4	2.13	2.78	4.60	25	1.71	2.06	2.79
5	2.02	2.57	4.03	30	1.70	2.04	2.75
6	1.94	2.45	3.71	35	1.69	2.03	2.72
7	1.89	2.36	3.50	40	1.68	2.02	2.70
8	1.86	2.31	3.36	50	1.68	2.01	2.68
9	1.83	2.26	3.25	60	1.67	2.00	2.66
10	1.81	2.23	3.17	70	1.67	1.99	2.65
11	1.80	2.20	3.11	80	1.66	1.99	2.64
12	1.78	2.18	3.05	90	1.66	1.99	2.63
13	1.77	2.16	3.01	100	1.66	1.98	2.63
14	1.76	2.14	2.98	120	1.66	1.98	2.62
15	1.75	2.13	2.95	140	1.66	1.98	2.61
16	1.75	2.12	2.92	160	1.65	1.97	2.61
17	1.74	2.11	2.90	∞	1.64	1.96	2.58

Таблица 3: Квантили $\chi^2_{p,k}$ распределения хи-квадрат.
p — вероятность, k — число степеней свободы.

	p									
k	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65
140	100.65	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84	186.85
160	117.68	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53	209.82
180	134.88	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06	232.62
200	152.24	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45	255.26
240	187.32	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89	300.18
280	222.80	227.91	235.54	242.25	250.13	310.72	320.03	328.25	337.97	344.70
320	258.59	264.10	272.34	279.56	288.04	352.82	362.72	371.45	381.78	388.91
360	294.64	300.53	309.33	317.03	326.07	394.79	405.24	414.46	425.35	432.87
400	330.90	337.16	346.48	354.64	364.21	436.65	447.63	457.31	468.72	476.61
440	367.35	373.94	383.77	392.37	402.44	478.42	489.90	500.01	511.94	520.16
480	403.95	410.87	421.19	430.20	440.75	520.11	532.08	542.60	555.01	563.56
520	440.69	447.93	458.71	468.12	479.12	561.73	574.16	585.08	597.95	606.82
560	477.55	485.10	496.32	506.11	517.56	603.29	616.16	627.47	640.78	649.96
600	514.53	522.37	534.02	544.18	556.06	644.80	658.09	669.77	683.52	692.98

Таблица 4: Левые квантили $F_p(f_1, f_2)$ распределения Фишера.
p — вероятность, f_1 — число степеней свободы большей дисперсии, f_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии.

$p = 0.995$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	12.83	5.85	5.66	5.53	5.42	5.34	5.27	5.17	5.10	5.04	5.00	4.97	4.93	4.90
12	11.75	5.09	4.91	4.77	4.67	4.59	4.53	4.43	4.36	4.31	4.26	4.23	4.19	4.17
14	11.06	4.60	4.43	4.30	4.20	4.12	4.06	3.96	3.89	3.84	3.79	3.76	3.73	3.70
16	10.58	4.27	4.10	3.97	3.87	3.80	3.73	3.64	3.57	3.51	3.47	3.44	3.40	3.37
18	10.22	4.03	3.86	3.73	3.64	3.56	3.50	3.40	3.33	3.28	3.24	3.20	3.17	3.14
20	9.94	3.85	3.68	3.55	3.46	3.38	3.32	3.22	3.15	3.10	3.06	3.02	2.99	2.96
24	9.55	3.59	3.42	3.30	3.20	3.12	3.06	2.97	2.90	2.84	2.80	2.77	2.73	2.70
28	9.28	3.41	3.25	3.12	3.03	2.95	2.89	2.79	2.72	2.67	2.63	2.59	2.56	2.53
32	9.09	3.29	3.12	3.00	2.90	2.83	2.77	2.67	2.60	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40
36	8.94	3.19	3.03	2.90	2.81	2.73	2.67	2.58	2.50	2.45	2.41	2.37	2.33	2.30
40	8.83	3.12	2.95	2.83	2.74	2.66	2.60	2.50	2.43	2.38	2.33	2.30	2.26	2.23
45	8.71	3.04	2.88	2.76	2.66	2.59	2.53	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.19	2.16
50	8.63	2.99	2.82	2.70	2.61	2.53	2.47	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.10

$p = 0.975$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	6.94	3.72	3.62	3.55	3.50	3.45	3.42	3.37	3.33	3.30	3.27	3.26	3.24	3.22
12	6.55	3.37	3.28	3.21	3.15	3.11	3.07	3.02	2.98	2.95	2.93	2.91	2.89	2.87
14	6.30	3.15	3.05	2.98	2.92	2.88	2.84	2.79	2.75	2.72	2.69	2.67	2.65	2.64
16	6.12	2.99	2.89	2.82	2.76	2.72	2.68	2.63	2.58	2.55	2.53	2.51	2.49	2.47
18	5.98	2.87	2.77	2.70	2.64	2.60	2.56	2.50	2.46	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35
20	5.87	2.77	2.68	2.60	2.55	2.50	2.46	2.41	2.37	2.33	2.31	2.29	2.27	2.25
24	5.72	2.64	2.54	2.47	2.41	2.36	2.33	2.27	2.23	2.19	2.17	2.15	2.12	2.11
28	5.61	2.55	2.45	2.37	2.32	2.27	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07	2.05	2.03	2.01
32	5.53	2.48	2.38	2.31	2.25	2.20	2.16	2.10	2.06	2.02	2.00	1.98	1.95	1.93
36	5.47	2.43	2.33	2.25	2.20	2.15	2.11	2.05	2.00	1.97	1.94	1.92	1.90	1.88
40	5.42	2.39	2.29	2.21	2.15	2.11	2.07	2.01	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85	1.83
45	5.38	2.35	2.25	2.17	2.11	2.07	2.03	1.96	1.92	1.88	1.85	1.83	1.81	1.79
50	5.34	2.32	2.22	2.14	2.08	2.03	1.99	1.93	1.89	1.85	1.82	1.80	1.77	1.75

$p = 0.95$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	4.96	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77	2.74	2.71	2.69	2.67	2.66	2.65	2.64
12	4.75	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40
14	4.60	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39	2.35	2.32	2.30	2.28	2.27	2.25	2.24
16	4.49	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	2.24	2.21	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12
18	4.41	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.06	2.05	2.04
20	4.35	2.35	2.28	2.22	2.18	2.15	2.12	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.98	1.97
24	4.26	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03	1.98	1.95	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86
28	4.20	2.19	2.12	2.06	2.02	1.99	1.96	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82	1.80	1.79
32	4.15	2.14	2.07	2.01	1.97	1.94	1.91	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.74
36	4.11	2.11	2.03	1.98	1.93	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76	1.74	1.73	1.71	1.69
40	4.08	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84	1.79	1.76	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66
45	4.06	2.05	1.97	1.92	1.87	1.84	1.81	1.76	1.73	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63
50	4.03	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	1.74	1.70	1.67	1.65	1.63	1.61	1.60

Таблица 5: Таблица числовых характеристик стандартных распределений

распределение	описание	$\mathsf{M}\xi$	$\mathsf{D}\xi$
Дискретные			
$\mathrm{I}(a)$ вырожденное	$\begin{array}{c\|c}\xi & a\\ \hline \mathsf{P} & 1\end{array}$	a	0
$\mathrm{U}(n)$ равномерное	$\begin{array}{c\|ccc}\xi & x_1 & \cdots & x_n\\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{array}$	$\bar{x}$	$\overline{x^2}-(\bar{x})^2$
$\mathrm{B}(p)$ бернуллиевское	$\begin{array}{c\|cc}\xi & 0 & 1\\ \hline \mathsf{P} & 1-p & p\end{array}$	p	pq
$\mathrm{B}(n,p)$ биномиальное	$\mathsf{P}(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,\ldots,n$	np	npq
$\mathrm{G}(p)$ геометрическое	$\mathsf{P}(\xi=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$\Pi(\lambda)$ Пуассона	$\mathsf{P}(\xi=k)=\frac{\Lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=1,2,\ldots$	λ	λ
Непрерывные			
$\mathrm{U}(a,b)$ равномерное	$F_\xi(x)=\frac{x-a}{b-a},\quad x\in(a;b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{N}(a,\sigma)$ нормальное	$F_\xi(x)=\Phi(\frac{x-a}{\sigma})$	a	σ^2
$\mathrm{E}(\lambda)$ экспоненциальное	$F_\xi(x)=1-e^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Принятые обозначения: $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$, $\overline{x^2}=\frac{1}{n}(x_1^2+\cdots+x_n^2)$, p — вероятность «успеха» в схеме Бернулли, $q=1-p$ — вероятность «неуспеха» в схеме Бернулли, λ — среднее число событий за единицу времени, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\,ds$ — функция Лапласа.

2. Задание для самостоятельного решения по разделу математическая статистика

Во всех вычислениях использовать доверительную вероятность $\delta = 0.95$ и уровень значимости $\alpha = 0.05$.

1. Задание для выборки U

1.1. Построить гистограмму, взяв 6 отрезков равной длины.

1.2. Найти точечные оценки $\bar{x}$ и s^2 математического ожидания и дисперсии соответственно.

1.3. Проверить гипотезу о равномерном распределении на отрезке $[\alpha^*, \beta^*]$, где α^* и β^* — несмещённые оценки границ равномерного распределения.

2. Задание для выборки V

2.1. Проверить гипотезу о нормальности распределения.

2.2. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии.

3. Задание для выборок V и X

3.1. Проверить гипотезу о совпадении математических ожиданий генеральных распределений выборок V и X.

3.2. Проверить однородность выборок V и X по критерию χ^2.

4. Задание для выборок X и Y

4.1. Считая, что $Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon$, где b_0 и b_1 — параметры линейной зависимости, $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ — случайная ошибка наблюдений, найти точечные оценки b_0^* и b_1^* коэффициентов b_0 и b_1.

4.2. Используя критерий Фишера, проверить гипотезу о незначимости линейной зависимости.

4.3. Проверить гипотезу о незначимости линейной зависимости через доверительный интервал для коэффициента b_1.

Это задание выполняется в паре, но сдается индивидуально. Переписывать решение у напарника не нужно, работа должна быть сделана в единственном экземпляре. Выборки U, V, X, Y следует получить у преподавателя.

3. Требования к получению зачета

Для того, чтобы получить зачет, необходимо последовательно пройти следующие этапы:

Этап 1. Допуск к зачету. Для того, чтобы получить допуск к зачету, необходимо на вторую контрольную работу (по разделу случайные величины) принести 12 листовую (или 18 листовую) тетрадь «для домашней работы», в которой оформлены решения не менее, чем $13 + 2\,n + 2\,k$ задач для самостоятельного решения. В последней формуле n — это количество пропущенных семинаров, а k — количество недель задержки сдачи тетради, считая от указанной контрольной работы.

Этап 2. Проверка домашней работы. Этот и последующие этапы проходятся во время зачета. Для того, чтобы пройти этот этап, необходимо уверенно отвечать на вопросы по решению задач, которые оформлены в Вашей тетради «для домашней работы». Этап считается пройденным, если преподаватель получит ответы на все поставленные вопросы.

Этап 3. Работа над ошибками в контрольных работах. Для прохождения этого этапа Вы должны предъявить решения всех задач из обоих контрольных работ, по которым у Вас стоит оценка ниже, чем «плюс с точкой». Если контрольная работа была Вами пропущена, то на зачете Вам для решения выдается один из вариантов. Этап считается пройденным, если преподаватель получит ответы на все поставленные вопросы по предъявленным решениям.

Этап 4. Самостоятельная работа по разделу математическая статистика. Для прохождения этого этапа Вы должны полностью сделать задание для самостоятельного решения по разделу математическая статистика. Это задание выполняется в паре, но сдается индивидуально. Переписывать решение у напарника не нужно, работа должна быть сделана в единственном экземпляре. Этап считается пройденным, если преподаватель получит ответы на все поставленные вопросы по предъявленной работе.

Борис Юрьевич Пичугин

Семинары по теории вероятностей и математической статистике для химиков

Методические указания

Редактор Е. В. Коськина
Дизайн обложки З. Н. Образова

Подписано в печать ??.??.2005. Формат бумаги 60 × 84 1/16.
Печ. л. 1,75. Уч.-изд. л 1,75. Тираж 100 экз. Заказ ???.

Издательство Омского государственного университета
644077, г. Омск, пр. Мира, 55А, госуниверситет