ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Ф. М. ДОСТОЕВСКОГО

Математический факультет
Кафедра математического моделирования

Б. Ю. Пичугин

Теория вероятностей и математическая статистика

Курс лекций
для студентов химических специальностей

Издание
ОмГУ

Омск
2005

УДК 519.2
ББК 22.17
П 364

Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским советом ОмГУ

Б.Ю. Пичугин

П 364 **Теория вероятностей и математическая статистика**: курс лекций для студентов химических специальностей. Омск: ОмГУ, 2005. — 62 с.

Данное издание представляет собой курс лекций по теории вероятностей и математической статистике, которые автор читал для студентов второго курса химического факультета Омского госуниверситета с 2002 по 2005 год.

Ввиду краткости курса, при изложении материала основной акцент сделан на прозрачность изложения и практическое применение представленных результатов. В связи с этим автор умолчал о некоторых сложных для восприятия конструкциях (таких, как измеримое множество, мера и т.п) и опустил доказательства сложных теорем, которые читатель при желании может найти в специальной литературе. Изложение сопровождается большим количеством примеров.

УДК 519.2
ББК 22.17

© Омский госуниверситет, 2005

© Б.Ю. Пичугин, 2005

Оформлено в системе LaTeX

Содержание

Введение **6**

§ 1. Элементы теории множеств 6

§ 2. Элементы комбинаторики 7

1 Элементарная теория вероятностей **9**

§ 1. Основные определения 9

1.1. Испытания и события 9

1.2. События как множества элементарных исходов 10

1.3. Вероятность 11

§ 2. Примеры задания вероятности 13

2.1. Классическое определение вероятности 13

2.2. Геометрическая схема вычисления вероятности . . . 14

§ 3. Условная вероятность 15

3.1. Определение условной вероятности 15

3.2. Независимые события 16

3.3. Формула полной вероятности 17

3.4. Формула Байеса вычисления апостериорных вероятностей 18

§ 4. Схема Бернулли. Повторение испытаний 18

4.1. Формула Бернулли 18

4.2. Теорема Пуассона 19

4.3. Локальная теорема Муавра–Лапласа 20

4.4. Интегральная теорема Муавра–Лапласа 20

4.5. Оценка вероятности «успеха» в схеме Бернулли . . . 21

2 Случайные величины **23**

§ 1. Случайные величины и их функции распределения 23

1.1. Определение и примеры случайных величин 23

1.2. Функция распределения 24
1.3. Свойства функции распределения 24
§ 2. Дискретные случайные величины 25
2.1. Определение дискретных случайных величин 25
2.2. Примеры распределений дискретных случайных величин 26
§ 3. Непрерывные случайные величины 28
3.1. Определение непрерывных случайных величин. Плотность распределения 28
3.2. Свойства плотности распределения 28
3.3. Примеры распределений непрерывных случайных величин 29
§ 4. Независимость случайных величин 31
§ 5. Числовые характеристики случайных величин 32
5.1. Математическое ожидание 32
5.2. Дисперсия 33
5.3. Стандартное отклонение 34
5.4. Ковариация случайных величин 34
5.5. Коэффициент корреляции 35
§ 6. Неравенство Чебышева (связь математического ожидания и дисперсии) 35
§ 7. Последовательности случайных величин 36
7.1. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины 36
7.2. Теорема Чебышева и закон больших чисел 37
7.3. Центральная предельная теорема 38
§ 8. Случайные векторы 38
8.1. Определение и примеры случайных векторов 38
8.2. Функция распределения случайного вектора и ее свойства 39
8.3. Дискретные случайные векторы 40
8.4. Непрерывные случайные векторы. Плотность распределения и ее свойства 40

3 Математическая статистика 42
§ 1. Предмет и задачи математической статистики 42
§ 2. Выборка 43
2.1. Основные определения 43
2.2. Гистограмма 44
§ 3. Задача об оценивании параметров 44
3.1. Точечные оценки 44
3.2. Получение точечных оценок 45
3.3. Некоторые точечные оценки 46
3.4. Интервальные оценки 47
§ 4. Задача о проверке статистических гипотез 50
4.1. Общий подход 50
4.2. Проверка гипотезы о виде генерального распределения. Критерий χ^2 51
4.3. Проверка гипотезы о совпадении математических ожиданий 53
4.4. Проверка гипотезы о совпадении дисперсий 54
4.5. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерий χ^2 54
§ 5. Линейный регрессионный анализ 55
5.1. Точечные оценки параметров линейной регрессии . . 55
5.2. Проверка гипотезы о незначимости линейной зависимости по критерию Фишера 56
5.3. Проверка гипотезы о незначимости линейной зависимости через доверительный интервал для коэффициента b_1. 56

Справочные таблицы 57

Введение

§ 1. Элементы теории множеств

Определение. *Множество* — это аксиоматическое понятие, обозначающее набор некоторых объектов, называемых элементами множества. *Пустое множество* $\varnothing$ — множество, не содержащее элементов. $x \in A$ обозначает, что элемент x принадлежит множеству A.

Определение. Множество B называется *подмножеством* A ($B \subseteq A$), если все элементы B входят в A. Очевидно, что $\varnothing$ — подмножество любого множества. Множества A и B *равны*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Операции над множествами.
1) *Объединение*: $A + B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$.
2) *Пересечение*: $A \cdot B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.
3) *Разность*: $A - B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$.
4) *Дополнение*: если $A \subseteq \Omega$, то $\overline{A} = \Omega - A$, здесь Ω — некоторое универсальное множество.

Теорема 1 (Законы Моргана). $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Определение. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов, и *бесконечным* в противном случае. Если множество бесконечно, но все его элементы можно пересчитать, то множество называется *счетным*. Конечное или счетное множество называется *не более чем счетным*.

В качестве примеров счетных множеств можно привести множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ (оно "само себя считает"), множество четных целых чисел $2\,\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Несчетными являются: множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, множество иррациональных чисел $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, множество всех точек плоскости и т.д.

Определение. Число элементов множества A еще называют его *объемом* и обозначают $|A|$. Если A конечно, то $|A|$ — это неотрицательное целое число, а если A — бесконечно, то для обозначения числа его элементов используют символ ∞.

§ 2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика — это раздел математики, занимающийся подсчетом числа комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества при определенных условиях.

Теорема 2 (Правило суммы). Если существует n способов выполнить действие $(*)$ и k способов выполнить действие $(\circ)$, то существует $n + k$ способов выполнить одно из действий — $(*)$ или $(\circ)$.

Теорема 3 (Правило произведения). Если существует n способов выполнить действие $(*)$ и k способов выполнить действие $(\circ)$, то существует nk способов выполнить действия $(*)$ и $(\circ)$ последовательно.

Пример 2.1. В магазине продают 5 видов чашек и 4 вида ложек. Купить только один предмет можно $5 + 4 = 9$ способами, а купить одну чашку и одну ложку можно $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Определение. *Факториалом* $n!$ натурального числа n называют произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению полагают, что $0! = 1$.

Подсчёт числа выборок объёма k из генеральной совокупности объёма n:

	без возвращений	с возвращениями
по порядку (размещения)	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $k \leqslant n$,	$\bar{A}_n^k = n^k$
без порядка (сочетания)	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \leqslant n$,	C_{n+k-1}^k

1) *Размещения с возвращениями.* В выборке на каждом месте может находиться один из n элементов, поэтому, по правилу произведения, $\bar{A}_n^k = n \cdot \dots \cdot n = n^r$.

2) *Размещения без возвращений.* На первое место выборки мы можем поставить элемент n способами, на второе — $(n-1)$ способом (т.к. один

элемент уже занял первое место), на третье — $(n-2)$ способами, и так далее, пока не дойдем до k-го места, которое мы сможем заполнить $(n-k+1)$ способом. В итоге, по правилу произведения, получаем $A_n^k = n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. В частности, переставить n элементов местами можно $A_n^n = n!$ способами.

3) *Сочетания без возвращений.* Каждое конкретное сочетание элементов может реализоваться одним из $A_k^k = k!$ размещений без возвращений. Поэтому размещений в $k!$ раз больше, чем сочетаний. Следовательно, $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4) *Сочетания с возвращениями.* Сопоставим каждой выборке последовательность нулей и единиц, в которую входят единицы по числу раз, которое элемент данного типа входит в выборку, и нули, разделяющие элементы (например, если из множества $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ выбрали элементы $A = \{a_1, a_1, a_1, a_3\}$, то последовательность имеет вид (111001)). Таким образом получим двоичный вектор длины $n+k-1$, содержащий k единиц. Всего существует C_{n+k-1}^k таких векторов.

Раздел 1

Элементарная теория вероятностей

§ 1. Основные определения

1.1. Испытания и события

Определение. *Испытание* — это эксперимент, который протекает с соблюдением определенной совокупности условий S.

Определение. *Событие* — это утверждение, истинность которого однозначно определяется в результате испытания. События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., A_1, A_2, ...; или фигурными скобками, в которые заключают утверждение, составляющее событие: $\{$*брошенная монетка выпала орлом*$\}$.

Пример 1.1. В урне имеются шары некоторых цветов. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара — испытание. Появление красного шара — событие.

Теория вероятностей не ставит перед собой цель предсказать, произойдет данное событие или нет, — это невозможно. Но если испытание можно повторять многократно (с соблюдением одних и тех же условий), то оказывается, что события, наблюдаемые при этих испытаниях, подчиняются определенным закономерностям. В частности, наблюдается статистическая устойчивость частот. Говорят, что такое испытание обладает *статистической регулярностью*. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, предметом теории вероятностей являются закономерности в статистически регулярных испытаниях.

Определение. События A_1, A_2, ..., A_n называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление остальных событий в одном и том же испытании.

Определение. События A_1, A_2, ..., A_n образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно появится одно из них.

Пример 1.2. Наудачу извлекают карту из колоды. Обозначим $A_1 = \{$*Появилась черви*$\}$, $A_2 = \{$*Появилась буби*$\}$, $A_3 = \{$*Появилась черная масть*$\}$, $A_4 = \{$*Появилась картинка*$\}$. Тогда:
1) события A_1, A_2 — несовместны и полной группы не образуют;
2) события A_1 и A_4 — совместны и полной группы не образуют;
3) события A_1, A_2, A_3 — несовместны и образуют полную группу;
4) события A_1, A_2, A_3, A_4 — совместны и образуют полную группу.

1.2. События как множества элементарных исходов

Определение. События ω_1, ω_2, ... называют *элементарными исходами испытания* (элементарными событиями), если
1) они несовместны;
2) образуют полную группу;
3) их нельзя разложить на подсобытия.
Множество всех элементарных исходов обозначают $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

В результате испытания появляется ровно один элементарный исход. Неразложимость на подсобытия означает, что для любого события A, наблюдаемого при испытании, элементарные исходы делятся на *благоприятные* этому событию и *неблагоприятные*. Если в результате испытания произошел благоприятный событию A исход, то событие A обязательно наступит, а если неблагоприятный, то точно не наступит.

Отождествим каждое наблюдаемое в испытании событие A с множеством всех элементарных исходов, благоприятных этому событию. Далее если будем говорить о наблюдении некоторого события, то будем подразумевать, что в множестве всех элементарных исходов Ω выделено некоторое подмножество A благоприятных этому событию элементарных исходов. События, у которых совпадают множества благоприятных элементарных исходов, не различают.

Пример 1.3. Бросают игральную кость. $\omega_i = \{$*Выпало* i *очков*$\}$ — элементарные исходы, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Тогда $A = \{$*выпало число очков, кратное трем*$\} = \{\omega_3, \omega_6\} = \{$*выпала тройка или шестерка*$\}$. Исходы $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$ неблагоприятны для A.

События $u = \{$*выпало* 4 *очка*$\}$ и $v = \{$*не выпало* 4 *очка*$\}$ несовместны и образуют полную группу, но не являются элементарными исходами, так как по ним нельзя сказать, выпало 6 очков или нет.

Пример 1.4. Из отрезка $[2; 5]$ наудачу выбирают число. Здесь элементарными исходами будут все точки отрезка $[2; 5]$, то есть $\Omega = [2; 5]$, и, например, $A = \{$*выпало число меньшее* 4$\} = [2; 4)$.

Так события представляют собой множества элементарных исходов, то с событиями можно делать все те же самые операции, что и с множествами: сложение $A + B$, умножение AB, вычитание $A - B$, дополнение $\overline{A}$.

Пример 1.5 (Продолжение 1.3)**.** $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\} = \{$*выпало число очков, не кратное трем*$\} = \{$*выпала не тройка и не шестерка*$\}$. Обозначим $B = \{$*выпало число очков, меньшее* 5$\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Тогда $A + B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\} = \{$*выпало число очков, кратное трем или меньшее* 5$\} = \{$*выпала не пятерка*$\}$, $AB = \{\omega_3\} = \{$*выпало число очков, кратное трем и меньшее* 5$\} = \{$*выпала тройка*$\}$, $A - B = \{\omega_6\} = \{$*выпала шестерка*$\}$.

Замечание. Если события $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, то $A_i A_j = \varnothing$ для любой пары A_i, A_j из них. Если события $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то $A_1 + \cdots + A_n = \Omega$.

1.3. Вероятность

Определение. *Вероятность* — это функция $\mathsf{P}(\cdot)$, которая каждому событию A сопоставляет число так, что выполняются следующие аксиомы:
Аксиома 1. $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$ для любого события A.
Аксиома 2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.
Аксиома 3 (Сложения). Если события A и B несовместны, то

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Вероятность есть число, характеризующее степень возможности наступления события. Чем больше число $\mathsf{P}(A)$, тем вероятнее то, что событие A произойдет в результате испытания.

Определение. Событие A *достоверно*, если $\mathsf{P}(A) = 1$, *невозможно*, если $\mathsf{P}(A) = 0$ и *случайно*, если $0 < \mathsf{P}(A) < 1$. Про достоверное событие также говорят, что оно наступит *почти наверное* (сокращенно п.н.).

Теорема 4. 1. Если $A \subset B$ (то есть из A следует B), то $\mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.
2. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.
3. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$.

Доказательство. **1.** $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A + (B - A)) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - A) \Rightarrow \mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.
2. $\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(\Omega - A) = \mathsf{P}(\Omega) - \mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(A)$.
3. $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$ так как $\mathsf{P}(B - A) \geqslant 0$. ■

Следствие. Если событие A достоверно, то $\overline{A}$ — невозможно, и наоборот.

Пример 1.6. В квартире три открытых окна и комар. Известно, что в первое окно комар вылетит (событие A) с вероятностью $\mathsf{P}(A) = 0.14$, во второе (событие B) — $\mathsf{P}(B) = 0.21$, а в третье (событие C) — $\mathsf{P}(C) = 0.18$. Тогда вероятность того, что комар вылетит через первое или второе окно $(A + B)$ равна $\mathsf{P}(A + B) = 0.14 + 0.21 = 0.35$. Вероятность того, что комар погибнет в квартире $(\overline{A + B + C})$, равна $\mathsf{P}(\overline{A + B + C}) = 1 - (0.14 + 0.21 + 0.18) = 0.47$.

Теорема 5 (Сложения). Для любых событий A и B верно равенство

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Доказательство. $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A - AB) + \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$. ■

Пример 1.7. На стене висят два листа бумаги, частично перекрывающие друг друга. Стрелок попадёт в первый лист (событие A) с вероятностью $\mathsf{P}(A) = 0.7$, во второй лист (событие B) — с вероятностью $\mathsf{P}(B) = 0.5$, в оба листа — с вероятностью $\mathsf{P}(AB) = 0.4$. Тогда вероятность того, что стрелок попадет хотя бы в один лист равна $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB) = 0.7 + 0.5 - 0.4 = 0.8$.

§ 2. Примеры задания вероятности

2.1. Классическое определение вероятности

Определение. События называют *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Определение. Будем говорить, что испытание протекает по *классической схеме*, если в нем все элементарные исходы равновозможны и их конечное число.

Определение. В испытании, протекающем по классической схеме, *вероятностью* события A называют величину

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\text{число благоприятных для } A \text{ исходов}}{\text{число всех исходов}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Пример 2.1. В урне лежат 2 красных шара, 3 синих и один белый. Наудачу извлекают один шар. Элементарные исходы $A_1 = \{$*появился красный шар*$\}$, $A_2 = \{$*появился синий шар*$\}$, $A_3 = \{$*появился белый шар*$\}$ не равновозможны.

Пронумеруем шары числами от 1 до 6: 1, 2 — красные; 3, 4, 5 — синие; 6 — белый. Тогда в этом испытании будет шесть элементарных исходов: $\omega_1 = \{$*появился №1*$\}$, $\ldots$, $\omega_6 = \{$*появился №6*$\}$. Эти элементарные исходы равновероятны и их конечное число, следовательно, это испытание протекает по классической схеме. Тогда $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $A_3 = \{\omega_6\}$ и $\mathsf{P}(A_1) = \frac{2}{6}$, $\mathsf{P}(A_2) = \frac{3}{6}$, $\mathsf{P}(A_3) = \frac{1}{6}$.

Теорема 6. Определение вероятности в смысле классической схемы корректно, то есть удовлетворяет аксиомам вероятности.

Доказательство. Проверим справедливость всех аксиом вероятности.
Аксиома 1. Так как всякое событие A является подмножеством Ω, то $0 \leqslant |A| \leqslant \Omega$. Следовательно, $0 \leqslant \mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \leqslant 1$.
Аксиома 2. Очевидно, что $\mathsf{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.
Аксиома 3. Пусть события A и B несовместны. Тогда ни один элемент множества $A + B$ не может принадлежать одновременно A и B. Поэтому $|A+B| = |A|+|B|$. Следовательно, $\mathsf{P}(A+B) = \frac{|A+B|}{|\Omega|} = \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$. ■

Пример 2.2 (Гипергеометрическая схема)**.** В урне 7 красных шаров, 9 синих, 11 зеленых и 13 желтых. Найти вероятность того, что среди 15 наудачу взятых шаров ровно 5 красных, 4 синих и 3 зеленых.

Ответ: $\frac{C_7^5 C_9^4 C_{11}^3 C_{13}^3}{C_{40}^{15}}$.

2.2. Геометрическая схема вычисления вероятности

Определение. Из *геометрической фигуры* G наудачу выбирают точку. Будем говорить, что это испытание проходит по *геометрической схеме*, если все точки фигуры G равновозможны (геометрической фигурой называется множество, обладающее длиной, площадью или объемом). В таком испытании $\Omega = G$.

В этом испытании классическая схема неприменима. Поэтому дадим новое

Определение. В испытании, протекающем по геометрической схеме, *вероятностью* события A называют величину

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes} \Omega} = \frac{\text{мера благоприятных для } A \text{ исходов}}{\text{мера всех исходов}},$$

где mes — это мера фигуры: длина, площадь или объем. Причем в результате деления должна получиться безразмерная величина (т.е. м^2 нельзя делить на м^3).

Теорема 7. Определение вероятности в смысле геометрической схемы корректно, то есть удовлетворяет аксиомам вероятности.

Пример 2.3 (Невозможное событие, которое может произойти)**.** Из квадрата наудачу выбирают точку. Пусть внутри квадрата отмечен отрезок. Тогда событие $A = \{$*точка попала на отрезок*$\}$ невозможно, т.к. площадь отрезка равна нулю, но это событие может произойти!

Пример 2.4 (Парадокс Бертрана)**.** Требуется определить, с какой вероятностью хорда, проведённая произвольным образом в окружности единичного радиуса, превысит по длине сторону вписанного в эту окружность правильного треугольника (то есть превысит $\sqrt{3}$).

В данном случае есть по крайней мере три способа подсчёта геометрической вероятности:

1) Проведём диаметр, перпендикулярный к хорде, и подсчитаем вероятность как отношение длины «центрального участка» (того, через который проходят хорды длиннее $\sqrt{3}$) к целому диаметру. $P = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$.
2) Рассмотрим угол φ между хордой и касательной к окружности. Хорда больше $\sqrt{3}$, если $60^\circ < \varphi < 120^\circ$ (то есть хорда лежит внутри вписанного в окружность правильного треугольника). Таким образом, $P = \frac{120-60}{180-0} = \frac{1}{3}$.
3) Хорда превысит по длине сторону правильного треугольника, если её центр пересечёт окружность, вписанную в этот треугольник, то есть вероятность рассчитывается как отношение площадей вписанной и описанной окружностей: $P = \frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}$. Таким образом, выбор вероятности неоднозначен.

§ 3. Условная вероятность

3.1. Определение условной вероятности

Определение. Вероятность появления события A, вычисленную в предположении, что событие B уже произошло, называют *условной*. Обозначают $\mathsf{P}(A|B)$ или $\mathsf{P}_B(A)$. По определению полагают, что для условной вероятности выполняется равенство (*формула условной вероятности*)

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B).$$

Пример 3.1. В урне 3 красных и 3 зеленых шара. По очереди извлекают два шара. Вероятность того, что второй шар красный (B) при условии, что первый шар зеленый (A), равна $\mathsf{P}(B|A) = \frac{3}{5}$, кроме того $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$.

Теорема 8. Зафиксируем событие B. Для условной вероятности $\mathsf{P}(\cdot \mid B)$ справедливы:
аксиома 1: $0 \leqslant \mathsf{P}(A|B) \leqslant 1$ для любого события A;
аксиома 2: $\mathsf{P}(\Omega|B) = 1$, кроме того $\mathsf{P}(B|B) = 1$;
аксиома сложения: $\mathsf{P}(A+C|B) = \mathsf{P}(A|B)+\mathsf{P}(C|B)$, если A и C несовместны;
теорема сложения: $\mathsf{P}(A + C|B) = \mathsf{P}(A|B) + \mathsf{P}(C|B) - \mathsf{P}(AC|B)$;
формула условной вероятности: $\mathsf{P}(AC|B) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(C|AB)$.

Доказательство. Действительно:

Аксиома 1. Так как $AB \subset B$, то $\mathsf{P}(AB) \leqslant \mathsf{P}(B)$ (теорема 4). Значит, $0 \leqslant \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)} \leqslant 1$.

Аксиома 2. Очевидно, что $\mathsf{P}(\Omega|B) = \frac{\mathsf{P}(\Omega B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = 1$.

Аксиома 3. Пусть события A и C несовместны. Тогда $\mathsf{P}(A + C|B) = \frac{\mathsf{P}(AB+CB)}{\mathsf{P}(B)} =/$ в силу аксиомы сложения$/= \frac{\mathsf{P}(AB)+\mathsf{P}(CB)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A|B) + \mathsf{P}(C|B)$.

Теорема сложения и формула условной вероятности следуют из аксиом.

■

Следствие. При помощи условной вероятности можно вычислять вероятность произведения многих событий.

$$\mathsf{P}(ABC) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(BC|A) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(C|AB).$$

$$\mathsf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathsf{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

Пример 3.2 (Продолжение 3.1)**.** Вероятность того, что последовательно извлекли красный (A), зеленый (B) и опять красный (C) шары, равна $\mathsf{P}(ABC) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20}$.

3.2. Независимые события

Определение. События A и B называют *независимыми*, если верно равенство $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. Обозначение $A\#B$.

По формуле условной вероятности имеем, что $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B)$. Следовательно, для независимых событий выполнены равенства $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$, из которых следует термин независимость: наступление события B никоим образом не влияет на вероятность наступления события A и наоборот.

Как правило, независимость событий дана в условии задачи.

Теорема 9. Если $A\#B$, то $\overline{A}\#B$, $A\#\overline{B}$ и $\overline{A}\#\overline{B}$.

Доказательство. $\mathsf{P}(\overline{A}B) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(\overline{A}|B) = \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A|B)) =/$т.к. $A\#B/= \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) = \mathsf{P}(\overline{A})\mathsf{P}(B)$. Следовательно, $\overline{A}\#B$, но тогда $A\#\overline{B}$ и $\overline{A}\#\overline{B}$. ■

Пример 3.3. Первый стрелок поразит мишень (A) с вероятностью 0.8, второй (B) — с вероятностью 0.7. Тогда первый попадет, а второй промахнется с вероятностью $\mathsf{P}(A\overline{B}) = 0.8 \cdot 0.3 = 0.24$. Вероятность того, что в мишень попадет ровно один стрелок, равна $\mathsf{P}(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.38$

Определение. События A, B и C *независимы в совокупности*, если $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(AC) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)$, $\mathsf{P}(BC) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$ и $\mathsf{P}(ABC) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$. Аналогично дается определение независимости четырех и более событий.

Теорема 10. Если A, B и C — независимы в совокупности, то $AB\#C$ и $(A+B)\#C$.

Из попарной независимости ($A\#B$, $B\#C$, $C\#A$) *не следует*, что A, B и C независимы в совокупности! Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 3.4. В урне красный, белый, синий и красно-бело-синий шары. Наудачу извлекают шар. $A = \{$*появится красный цвет*$\}$, $B = \{$*появится белый цвет*$\}$, $C = \{$*появится синий цвет*$\}$. $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 1/2$ и $\mathsf{P}(AB) = 1/4 = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. Следовательно, $A\#B$. Аналогично получаем $C\#B$ и $A\#C$. Но $\mathsf{P}(ABC) = 1/4 \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$. В частности, в этом примере события AB и C оказываются зависимыми.

Теорема 11. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, \ldots, A_n$ равна $1 - q_1 \cdots q_n$, где $q_1 = \mathsf{P}(\overline{A_1}), \ldots, q_n = \mathsf{P}(\overline{A_n})$.

Доказательство. Пусть $A = \{$*произошло хотя-бы одно из событий* $A_1, \ldots, A_n\}$. Тогда $\overline{A} = \{$*не произошло ни одно из событий* $A_1, \ldots, A_n\} = \overline{A_1 \cdots A_n}$. Следовательно, $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A_1}) \cdots \mathsf{P}(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdots q_n$. ■

Пример 3.5. В типографии имеется 4 печатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0.9. Тогда вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина, равна $1 - 0.1^4 = 0,9999$.

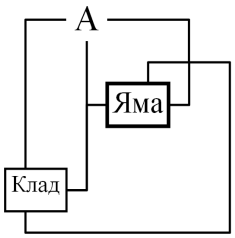
3.3. Формула полной вероятности

Теорема 12 (Формула полной вероятности). Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа несовместных событий. Назовем их *гипотезами*. Тогда для всякого события A верна формула

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \cdots + \mathsf{P}(H_n)\mathsf{P}(A|H_n).$$

Доказательство. $A = AH_1 + \cdots + AH_n$. Следовательно, $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AH_1) + \cdots + \mathsf{P}(AH_n) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \cdots + \mathsf{P}(H_n)\mathsf{P}(A|H_n)$. ■

Пример 3.6. Найти вероятность того, что искатель дойдет до клада, если он на каждом перекрестке он наудачу поворачивает в любое ответвление, кроме того, по которому пришел.



$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) + \mathsf{P}(H_3)\mathsf{P}(A|H_3)$
$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$

3.4. Формула Байеса вычисления апостериорных вероятностей

Определение. Пусть H_1, ..., H_n — гипотезы, и A — некоторое событие. Вероятности $\mathsf{P}(H_i)$ называют *априорными* (известны до испытания), а вероятности $\mathsf{P}(H_i|A)$ — *апостериорными* (известны после испытания, в результате проведения которого появилось событие A).

Теорема 13 (Формула Байеса). Апостериорные вероятности гипотез вычисляются по формуле.

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(H_iA)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A|H_i)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \cdots + \mathsf{P}(H_n)\mathsf{P}(A|H_n)}$$

Пример 3.7 (Продолжение 3.6). $\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{1}{3} \cdot 1/\frac{11}{18} = \frac{6}{11}$, $\mathsf{P}(H_2|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}/\frac{11}{18} = \frac{3}{11}$, $\mathsf{P}(H_3|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}/\frac{11}{18} = \frac{2}{11}$.

§ 4. Схема Бернулли. Повторение испытаний

4.1. Формула Бернулли

Рассмотрим серию из n независимых случайных испытаний с двумя исходами «У» (успех) и «Н» (неуспех). Пусть в каждом испытании исход «У» наступает с вероятностью p, а исход «Н» с вероятностью $q = 1 - p$. В этом случае говорят, что проводятся серия испытаний по схеме Бернулли. Обозначим $\text{У}_i = \{$*«Успех» в i-том испытании*$\}$ и $\text{Н}_i = \overline{\text{У}}_i = \{$*«Неуспех» в i-том испытании*$\}$. Тогда $\mathsf{P}(\text{У}_i) = p$ и $\mathsf{P}(\text{Н}_i) = q$.

Определение. Через $P_n(k)$ обозначают вероятность того, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли появилось ровно k «Успехов».

Пример 4.1. Вычислим $P_4(2) = \mathsf{P}(\text{У}_1\text{У}_2\text{Н}_3\text{Н}_4 + \text{У}_1\text{Н}_2\text{У}_3\text{Н}_4 + \cdots + \text{Н}_1\text{Н}_2\text{У}_3\text{У}_4) = ppqq + pqpq + pqqp + qppq + qpqp + qqpp = 6p^2q^2$.

Теорема 14 (Формула Бернулли). $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство. В n испытаниях ровно k исходов «У» может возникнуть C_n^k всевозможными способами. Каждый из этих способов появляется с вероятностью $p^k q^{n-k}$ и так как эти способы несовместны, то $P_n(k) = \underbrace{p^k q^{n-k} + \cdots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ слагаемых}} = C_n^k p^k q^{n-k}$ ■

Пример 4.2. Вероятность того, что свободный нейтрон в течение 1 сек. испытает столкновение с атомом вещества равна 0.08. Тогда вероятность того, что из 100 нейтронов испытают столкновение ровно 3 нейтрона равна $P_{100}(3) = C_{100}^3 0.08^3 0.92^{97} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2\cdot 1} 0.08^3 0.92^{97} = 0.0254$. А чему равно $P_{100}(30)$?

Использование формулы Бернулли для больших чисел затруднительно, так как требует трудоемких вычислений. Но при больших n вероятность $P_n(k)$ можно вычислить приближенно при помощи приведенных ниже формул.

4.2. Теорема Пуассона

Теорема 15 (Пуассона). Если $0 < p < 1$, n велико, а np мало ($np \leqslant 5$), то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Символ $\approx$ означает приближенное равенство, причем, чем больше n, тем точнее равенство.

Пример 4.3. Пусть $n = 10^3$, $p = 0.002$. Тогда $\lambda = 2 \leqslant 5$ и $P_{1000}(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0,1804$.

4.3. Локальная теорема Муавра–Лапласа

Теорема 16 (Локальная теорема Муавра–Лапласа). Если $0 < p < 1$, n велико и $np > 5$, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p.$$

Символ $\approx$ означает приближенное равенство, причем, чем больше n, тем точнее равенство.

Пример 4.4. Пусть $n = 200$, $k = 55$, $p = 0.3$. Тогда $np = 60 > 5$ и $x = \frac{55-0.3\cdot 200}{\sqrt{200\cdot 0.3\cdot 0.7}} = -0,772$, $\varphi(x) \approx 0,2962$, $P_{200}(55) \approx 0,0457$.

Правило вычисления вероятности $P_n(k)$.

1. Если n мало, то следует применять формулу Бернулли.
2. Если n велико и $np \leqslant 5$, то следует применять теорему Пуассона.
3. Если n велико и $np > 5$, то следует применять локальную теорему Муавра–Лапласа.

В качестве иллюстрации некорректного использования указанного правила приведем следующий

Пример 4.5. Пусть $n = 10^4$, $p = 10^{-4}$. $\lambda = np = 1$.

Формула Бернулли: $P_n(1) = C^1_{10^4}10^{-4}(1-10^{-4})^{9999} = 0,367898$ (ответ точный);

Теорема Пуассона: $P_n(1) = \frac{1^1}{1!}e^{-1} = 0,367\mathbf{879}$ (ошибка в пятом знаке);

Локальная теорема Муавра–Лапласа: $P_n(1) = \frac{1}{\sqrt{0,9999}}\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{0,9999}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,3\mathbf{98962}$ (ошибка во втором знаке!).

4.4. Интегральная теорема Муавра–Лапласа

Пример 4.6 (Продолжение 4.2)**.** Вероятность того, что столкновение испытают от 2 до 4 нейтронов включительно, равна $P_{100}(2) + P_{100}(3) + P_{100}(4) = C^2_{100}0.08^2 0.92^{98} + C^3_{100}0.08^3 0.92^{97} + C^4_{100}0.08^4 0.92^{96} = 0.088$. А чему равна вероятность того, что столкновение испытают от 5 до 40 нейтронов?

Определение. Через $P_n(k_1; k_2)$ обозначают вероятность того, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, появилось не менее k_1 и не более k_2 «Успехов».

$$P_n(k_1; k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \cdots + P_n(k_2-1) + P_n(k_2).$$

Теорема 17 (Интегральная теорема Муавра–Лапласа). Если $0 < p < 1$ и n велико, то

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Символ $\approx$ означает приближенное равенство, причем, чем больше n, тем точнее равенство.

Для вычисления функции $\Phi(x)$ не существует явной формулы, поэтому для нахождения ее значений используют таблицы (см. табл. 1).

Правила пользования таблицей:
1. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
2. Если $x > 5$, то $\Phi(x) \approx 1$.
3. Если $x < -5$, то $\Phi(x) \approx 0$.

Пример 4.7 (Продолжение 4.6). $P_{100}(5; 40) = \Phi(11.80) - \Phi(-1.11) = \Phi(11.80) - (1 - \Phi(1.11)) = 1 - 1 + 0.8665 = 0.8665$.

Замечание. Кроме таблиц функции $\Phi(x)$ в литературе можно встретить таблицы функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-x^2/2}\, dx$. Для перевода одних значений в другие следует применять формулу $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0.5$.

4.5. Оценка вероятности «успеха» в схеме Бернулли

Рассмотрим некоторое событие A, вероятность $\mathsf{P}(A) = p$ которого требуется оценить. Проведем n одинаковых независимых испытаний. Обозначим через k число испытаний, в которых произошло событие A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\tfrac{k}{n} - p| < \varepsilon) = \mathsf{P}\left(n(p-\varepsilon) < k < n(p+\varepsilon)\right) = P_n(n(p-\varepsilon); n(p+\varepsilon))$$

Воспользовавшись интегральной теоремой Муавра–Лапласа, получаем

$$x_1 = \tfrac{n(p-\varepsilon)-np}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon\sqrt{\tfrac{n}{pq}}, \quad x_2 = \tfrac{n(p+\varepsilon)-np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon\sqrt{\tfrac{n}{pq}}.$$

$$\mathsf{P}(|\tfrac{k}{n} - p| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\tfrac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\tfrac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\tfrac{n}{pq}}\right) - 1.$$

Зафиксируем достаточно большую вероятность $\delta = 0.95$ и из уравнения $2\Phi(v) - 1 = \delta$ найдем число $v = 1.96$. Если взять $\varepsilon = 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}$, то получим

$$\mathsf{P}\left(|\tfrac{k}{n} - p| < 1.96\sqrt{\tfrac{pq}{n}}\right) \approx 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95,$$

то есть с вероятностью 0.95 можно утверждать, что значение p лежит в интервале $(\frac{k}{n} - 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}; \frac{k}{n} + 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}})$.

В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеем, что $pq \leqslant (\frac{p+q}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$\left(\tfrac{k}{n} - 1.96\sqrt{\tfrac{pq}{n}}; \tfrac{k}{n} + 1.96\sqrt{\tfrac{pq}{n}}\right) \subset \left(\tfrac{k}{n} - 1.96\sqrt{\tfrac{1}{4n}}; \tfrac{k}{n} + 1.96\sqrt{\tfrac{1}{4n}}\right).$$

Поэтому с вероятностью большей, чем 0.95, можно утверждать, что значение p лежит в интервале $\left(\frac{k}{n} - 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}; \frac{k}{n} + 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)$.

Полученный интервал называется *доверительным*, число $\delta = 0.95$ называется *доверительной вероятностью* или *уровнем доверия*, а число $v = 1.96$ называется *квантилью нормального распределения*. В главе 3 о доверительных интервалах будет рассказано более подробно.

Пример 4.8. Испытание провели 1000 раз, из которых событие A наблюдалось 743 раза. Оценим вероятность A на уровне доверия $\delta = 0.9$. Из уравнения $2\Phi(v) - 1 = \delta$ находим $v = 1.65$. Следовательно, $\mathsf{P}(A) \in (\frac{743}{1000} - 1.65\sqrt{\frac{1}{4000}}; \frac{743}{1000} + 1.65\sqrt{\frac{1}{4000}}) = (0.7169; 0.7691)$ с вероятностью, большей 0.9.

А сколько необходимо провести испытаний, чтобы длина доверительного интервала была меньше 0.01? Длина доверительного интервала равна $1.65\sqrt{\frac{1}{n}}$. Следовательно, из неравенства $1.65\sqrt{\frac{1}{n}} \leqslant 0.01$ находим $n \geqslant 27225$.

Раздел 2

Случайные величины

§ 1. Случайные величины и их функции распределения

1.1. Определение и примеры случайных величин

Определение. *Случайной величиной* называют числовую величину, которая вычисляется в результате проведения некоторого случайного испытания. Случайные величины обозначают ξ, η, ζ, ... или X, Y, Z, ...

Пример 1.1. Бросают игральную кость. Обозначим ξ — число очков на верхней грани. ξ — случайная величина, принимающая шесть возможных значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 1.2. Бросают монетку много раз. Обозначим ξ — номер бросания, при котором в первый раз появился орел. ξ — случайная величина, возможные значения которой — это все натуральные числа.

Пример 1.3. На отрезок $[2;5]$ наудачу бросают точку. Координата точки ξ есть случайная величина, множество возможных значений которой совпадает с отрезком $[2;5]$.

Так как случайная величина ξ вычисляется в результате проведения случайного испытания, то для всякого действительного x и множества $B \subset \mathbb{R}$ можно рассматривать события вида $\{\xi = x\}$, $\{\xi < x\}$, $\{\xi \leqslant x\}$, $\{\xi \geqslant x\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi \in B\}$, $\{\xi \notin B\}$, причем некоторые их этих событий могут оказаться невозможными. Кроме того, если ξ и η — это случайные величины, то $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\xi\eta$, ξ/η — также случайные величины.

Пример 1.4. Пусть случайная величина ξ принимает значение 0, если выпадет орел, и 1, если решка. Случайная величина η — число очков на верхней грани кубика. Тогда случайная величина $\xi+\eta$ принимает 7 различных значений 1, 2, ..., 7. Например, значение 4 она принимает с вероятностью $\mathsf{P}(\xi+\eta=4)=\frac{1}{6}$, а значение 7 — с вероятностью $\mathsf{P}(\xi+\eta=7)=\frac{1}{12}$.

Случайная величина $\xi\eta$ может принимать семь значений 0, 1, ..., 6. Значение 0 принимается с вероятностью $\frac{1}{2}$, а все остальные значения с вероятностями $\frac{1}{12}$.

1.2. Функция распределения

Определение. Функцию $F_\xi(x)=\mathsf{P}(\xi<x)$ называют *функцией распределения* случайной величины ξ. Аргумент x пробегает все действительные значения.

Пример 1.5. Случайная величина ξ — это координата точки, наудачу брошенной на отрезок $[2;5]$. Тогда $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 2,\\ \frac{1}{3}(x-2), & 2<x\leqslant 5,\\ 1, & 5<x.\end{cases}$

Пример 1.6. Бросают игральную кость. Случайная величина ξ — это число очков на верхней грани. Тогда $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ 1/6, & 1<x\leqslant 2,\\ 2/6, & 2<x\leqslant 3,\\ \ldots, & \\ 1, & 6<x.\end{cases}$

1.3. Свойства функции распределения

Теорема 18. Пусть ξ — случайная величина, $F_\xi(x)$ — её функция распределения, $a\leqslant b$ — произвольные действительные числа. Тогда

1. $\mathsf{P}(\xi<b)=F_\xi(b)$,
$\mathsf{P}(\xi\leqslant b)=F_\xi(b+0)$,
$\mathsf{P}(\xi\geqslant b)=1-F_\xi(b)$,
$\mathsf{P}(\xi>b)=1-F_\xi(b+0)$,
$\mathsf{P}(a\leqslant\xi<b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)$,
$\mathsf{P}(a<\xi\leqslant b)=F_\xi(b+0)-F_\xi(a+0)$,
$\mathsf{P}(a<\xi<b)=F_\xi(b)-F_\xi(a+0)$,

$\mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(a)$,
$\mathsf{P}(\xi = b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(b)$,
2. $F_\xi(x)$ не убывает: если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \leqslant F_\xi(x_2)$.
3. Если случайная величина ξ принимает значения только из полуинтервала $[a;b)$, то $F_\xi(a) = 0$ и $F_\xi(b) = 1$. В частности, $F_\xi(-\infty) = 0$ и $F_\xi(+\infty) = 1$.
4. $F_\xi(x)$ непрерывна слева: $F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$ для всех x.
5. Если некоторая функция $F(x)$ удовлетворяет свойствам 2, 3 и 4, то существует случайная величина ξ такая, что $F_\xi(x) = F(x)$.

Пример 1.7. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{16}x^2, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Тогда
$\mathsf{P}(-2 \leqslant \xi < 1) = F_\xi(1) - F_\xi(-2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} - 0 = \frac{7}{16}$,
$\mathsf{P}(\xi \leqslant 1.2) = F_\xi(1.2+0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}1.2^2 = 0.52$, $\mathsf{P}(\xi \leqslant 0) = F_\xi(0+0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}0^2 = \frac{1}{4}$,
$\mathsf{P}(\xi = 0) = F_\xi(0+0) - F_\xi(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$,
$\mathsf{P}(\xi > 1.6) = 1 - \mathsf{P}(\xi \leqslant 1.6) = 1 - (\frac{1}{4} + \frac{3}{16}1.6^2) = 0.27$.
Так как $F_\xi(0) = 0$ и $F_\xi(2) = 1$, то все возможные значения случайной величины ξ лежат в промежутке $[0;2)$.

§ 2. Дискретные случайные величины

2.1. Определение дискретных случайных величин

Определение. Случайная величина ξ называется *дискретной*, если множество ее возможных значений не более чем счетно.

Дискретные случайные величины удобно записывать в виде таблиц: $\begin{array}{c|ccc} \xi & x_1 & x_2 & \cdots \\ \hline \mathsf{P} & p_1 & p_2 & \cdots \end{array}$, где x_1, x_2, ... — возможные значения случайной величины ξ, а $p_1 = \mathsf{P}(\xi = x_1)$, $p_2 = \mathsf{P}(\xi = x_2)$, ... Такую таблицу называют *законом распределения* дискретной случайной величины.

Пример 2.1 (Продолжение 1.4). $\begin{array}{c|cccccc} \xi & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$, $\begin{array}{c|cc} \eta & 0 & 1 \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$,
$\begin{array}{c|ccccccc} \xi+\eta & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}$, $\begin{array}{c|ccccccc} \xi\eta & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}$.

Замечание. Всякий закон распределения дискретной случайной величины должен удовлетворять условию согласования:

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

Доказательство. $p_1 + p_2 + \dots = \mathsf{P}(\xi = x_1 \text{ или } \xi = x_2 \text{ или } \dots) = 1.$ ■

Пример 2.2. Пусть $\begin{array}{c|ccccc} \xi & -5.05 & -1.00 & 7.13 & 16.4 & 0.001 \\ \hline \mathsf{P} & 0.06 & 0.15 & 0.14 & 0.22 & p_5 \end{array}$ — распределение дискретной случайной величины ξ. Тогда $p_5 = 1 - 0.06 - 0.15 - 0.14 - 0.22 = 0.43$, $\mathsf{P}(\xi < 1) = 0.06 + 0.15 + 0.43 = 0.64$, $\mathsf{P}(|\xi| \geqslant 2) = 0.06 + 0.14 + 0.22 = 0.42$.

2.2. Примеры распределений дискретных случайных величин

Вырожденное распределение $\mathrm{I}(a)$

Вырожденное распределение имеет вид $\begin{array}{c|c} \xi & a \\ \hline \mathsf{P} & 1 \end{array}$, то есть ξ — это константа a.

Дискретное равномерное распределение $\mathrm{U}(n)$

Дискретное равномерное распределение определяет случайную величину, которая с равной вероятностью принимает любое из n возможных значений $x_1, \dots, x_n$. Задается таблицей $\begin{array}{c|ccc} \xi & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline \mathsf{P} & 1/n & \cdots & 1/n \end{array}$.

Пример 2.3. Пусть ξ — число очков, выпавшее на кубике. Тогда $\xi \sim \mathrm{U}(6)$.

Бернуллиевское распределение $B(p)$

Бернуллиевское распределение — это распределение числа «Успехов» в *одном* испытании. Задается таблицей $\begin{array}{c|cc} \xi & 0 & 1 \\ \hline \mathsf{P} & q & p \end{array}$, где p — это вероятность «Успеха», $q = 1 - p$.

Биномиальное распределение $\mathrm{B}(n, p)$

Биномиальное распределение — это распределение числа «Успехов» в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, где вероятность успеха в одном испытании равна p. Задается таблицей $\begin{array}{c|ccccc} \xi & 0 & \cdots & k & \cdots & n \\ \hline \mathsf{P} & C_n^0 p^0 q^n & \cdots & C_n^k p^k q^{(n-k)} & \cdots & C_n^n p^n q^0 \end{array}$

Пример 2.4. Игральный кубик бросили 100 раз. «Успехом» будем считать выпадение четверки. Тогда число успехов — это случайная величина $\xi \sim \mathrm{B}(100, 1/6)$.

Это распределение называют биномиальным, так как выражение $C_n^k p^k q^{(n-k)}$ совпадает с k-ым слагаемым в биноме Ньютона $(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{(n-1)} + C_n^2 p^2 q^{(n-2)} + \cdots + C_n^n p^n q^0$. Эта же формула автоматически является проверкой условия согласования, так как $(p+q)^n = 1$.

Замечание. Если $\xi \sim \mathrm{B}(n,p)$, то ξ можно представить в виде суммы n независимых бернуллиевских случайных величин: $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim \mathrm{B}(p)$.

Геометрическое распределение $G(p)$

Пусть по схеме Бернулли проводится бесконечная серия испытаний с вероятностью «Успеха» p. Тогда номер первого «Успеха» имеет геометрическое распределение: $\begin{array}{c|cccccc} \xi & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \hline \mathsf{P} & p & qp & \cdots & q^{k-1}p & \cdots \end{array}$. Случайная величина ξ может принимать любое натуральное значение.

Пример 2.5. Снайпер стреляет по цели до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле $p = 0.6$. Тогда количество использованных патронов есть случайная величина $\xi \sim \mathrm{G}(0.6)$.

Это распределение называется геометрическим, так как при подсчете суммы вероятностей появления случайной величины ξ используется формула суммы геометрической прогрессии: $p + qp + q^2p + \cdots + q^{k-1}p + \cdots = p\frac{1}{1-q} = 1$.

Распределение Пуассона $\mathbf{\Pi}(\lambda)$

Распределение Пуассона представляет собой приближение биномиального распределения, используемое в теореме Пуассона: $\begin{array}{c|ccccc} \xi & 0 & 1 & \cdots & k & \cdots \\ \hline \mathsf{P} & \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \cdots \end{array}$. Кроме того, распределение Пуассона имеет число событий в *простейшем потоке событий.*

Пусть есть последовательность (поток) событий, которые наступают в произвольные моменты времени (например, столкновения нейтронов с атомами урана, вызовы, поступающие на АТС, прибытие маршруток на остановку и др.), и пусть за определенное время в среднем появляется λ событий. Тогда при некоторых дополнительных ограничениях можно считать, что число появляющихся за это время событий есть случайная величина $\xi \sim \Pi(\lambda)$.

Пример 2.6. Среднее число молекул вещества A, вступающих в реакцию за 1 мс, равно 4.8. Пусть ξ — число вступивших в реакцию молекул в течение 3 мс. Тогда $\xi \sim \Pi(14.4)$, а вероятность того, что за 3 мс в реакцию вступят ровно 15 молекул, равна $\mathsf{P}(\xi = 15) = \frac{14.4^{15}}{15!} e^{-14.4} = 0.10118$.

§ 3. Непрерывные случайные величины

3.1. Определение непрерывных случайных величин. Плотность распределения

Определение. Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна и всюду, кроме, быть может, нескольких точек, имеет производную $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$. Производная $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Пример 3.1. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin(x/2), & 0 < x \leqslant \pi, \\ 1, & \pi < x \end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Функция $F_\xi(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$. Поэтому ξ — непрерывна. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \cos(x/2)/2, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < x. \end{cases}$

Замечание. Пусть ξ — непрерывная случайная величина. Тогда её функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна. Следовательно, $F_\xi(x+0) = F_\xi(x)$ и для всякого числа x выполнено равенство $\mathsf{P}(\xi = x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = 0$, то есть всякое свое значение непрерывная случайная величина принимает с вероятностью 0. Отсюда следует, что $\mathsf{P}(a \leqslant \xi < b) = \mathsf{P}(a < \xi < b) = \mathsf{P}(a < \xi \leqslant b) = \mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b)$.

3.2. Свойства плотности распределения

Теорема 19. Пусть ξ — непрерывная случайная величина, $F_\xi(x)$ — ее функция распределения, $f_\xi(x)$ — ее плотность. Тогда

1. $f_\xi(x) \geqslant 0$ для всех чисел x.

2. $\mathsf{P}(a \leqslant \xi < b) = \int\limits_a^b f_\xi(s)\,ds$. В частности, $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^x f_\xi(s)\,ds$, то есть функция распределения есть первообразная от плотности распределения.

3. Справедливо *условие согласования*: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(s)\,ds = 1$.

Замечание. Из свойства 2 вытекает, что непрерывная случайная величина чаще принимает значения там, где ее плотность больше. Она не принимает значений там, где ее плотность равна нулю.

Пример 3.2. Пусть $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\pi, \\ \frac{1}{2\pi}(1+\cos x), & -\pi < x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < x, \end{cases}$ — плотность случайной величины ξ. Тогда $\mathsf{P}(-3\pi < \xi < \pi/2) = \int\limits_{-3\pi}^{\pi/2} f_\xi(s)ds = \int\limits_{-3\pi}^{-\pi} 0ds + \int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi}(1+\cos s)ds = \frac{1}{2\pi}(\frac{3\pi}{2} + 1 - 0) = \frac{3}{4}$.

Найдем функцию распределения. По свойству 2 имеем, что $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^x f_\xi(s)\,ds$. Если $x \leqslant -\pi$, то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^x 0\,ds = 0$. Если $-\pi < x \leqslant \pi$, то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\pi}^x \frac{1}{2\pi}(1+\cos s)ds = \frac{1}{2\pi}(x + \pi + \sin x)$. Если $\pi < x$, то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(1+\cos s)ds = \frac{1}{2\pi}(\pi + \pi + \sin\pi) = 1$.

Пример 3.3. Пусть $f_\xi(x) = \frac{a}{e^{-x}+e^x}$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найдем неизвестный параметр a. Для этого запишем условие согласования $1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{e^{-s}+e^s}ds = a\arctan(e^x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $a = \frac{2}{\pi}$.

3.3. Примеры распределений непрерывных случайных величин

Равномерное распределение $\mathrm{U}(a;b)$

Равномерное распределение имеет точка, наудачу брошенная на отрезок $(a;b)$. Функция распределения: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$ Плотность:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

Пример 3.4. Пусть цена деления прибора равна γ. Тогда ошибка округления при снятии показаний с прибора есть случайная величина $\xi \sim \mathrm{U}(-\frac{1}{2}\gamma; \frac{1}{2}\gamma)$.

Нормальное распределение $\mathrm{N}(a, \sigma)$

Нормальное распределение определяется плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. В большинстве случаев считается, что результат измерения есть случайная величина с нормальным распределением.

Пример 3.5. Расчетное значение количества вещества, получаемого в результате реакции равно 5 мг. При этом известно, что на практике оно в среднем может отклоняться от расчетного значения на 0.3 мг (как в меньшую, так и в большую сторону). При этих условиях, можно считать, что количество вещества есть случайная величина $\xi \sim \mathrm{N}(5, 0.3)$.

Замечание. Пусть $\eta \sim \mathrm{N}(0, 1)$, тогда $F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2} ds = \Phi(x)$.

Замечание. Пусть $\xi \sim \mathrm{N}(a, \sigma)$. Тогда $\xi = \sigma\eta + a$, где $\eta \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Следовательно, для ξ можно вычислять вероятности, используя функцию Лапласа $\Phi(x)$:

$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(\sigma\eta + a < x) = \mathsf{P}(\eta < \frac{x-a}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$

$\mathsf{P}(x_1 < \xi < x_2) = \Phi(\frac{x_2-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-a}{\sigma})$.

Пример 3.6 (Продолжение 3.5)**.** Вероятность того, что после реакции получится более 5.5 мг. вещества равна $\mathsf{P}(\xi > 5.5) = \mathsf{P}(5.5 < \xi < +\infty) = \Phi(\frac{+\infty-5}{0.3}) - \Phi(\frac{5.5-5}{0.3}) = 1 - 0.9515 = 0,0485$.

Экспоненциальное распределение $\mathrm{E}(\lambda)$

Экспоненциальное распределение определяется плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x, \end{cases}$ или ф.р. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x. \end{cases}$. Время ожидания очередного события в простейшем потоке событий имеет экспоненциальное

распределение. Т.е. это время ожидания события, которое «может наступить в любой момент». Время до распада атома вещества имеет экспоненциальное распределение.

Пример 3.7. Известно, что в среднем за 1 мсек распадается 0.26 атомов вещества. Тогда время до распада очередного атома, измеренное в милисекундах, есть случайная величина $\xi \sim \mathrm{E}(0.26)$. Вероятность того, что до очередного распада пройдет более 5 мсек, равна $\mathsf{P}(\xi > 5) = 1 - F_\xi(5) = e^{-0.26 \cdot 5} \approx 0,2725$.

Замечание. У экспоненциального распределения отсутствует память! То есть все равно, когда Вы начали ожидать. $\mathsf{P}(\xi > a + x \mid \xi > a) = \frac{\mathsf{P}(\xi > a+x,\ \xi > a)}{\mathsf{P}(\xi > a)} = e^{-\lambda x} = \mathsf{P}(\xi > x)$.

§ 4. Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины ξ и η *независимы* ($\xi \# \eta$), если для любых действительных чисел x и y выполняется равенство

$$\mathsf{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathsf{P}(\xi < x)\mathsf{P}(\eta < y).$$

Замечание. Независимость случайных величин аналогична независимости событий. Если $\xi \# \eta$, то значение одной из этих случайных величин не влияет на распределение другой: $\mathsf{P}(\xi < x | \eta < y) = \frac{\mathsf{P}(\xi < x, \eta < y)}{\mathsf{P}(\eta < y)} = \mathsf{P}(\xi < x)$. В большинстве случаев о независимости случайных величин можно судить по условию задачи.

Замечание. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные функции. Тогда $\xi_1 = u(\xi)$ и $\eta_1 = v(\eta)$ также независимы.

Пример 4.1. Пусть ξ — число очков на первом кубике, η — на втором. Тогда ξ и η — независимы.

Пример 4.2. Пусть случайные величины ξ и η связаны равенством $\xi = \eta - 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi < x, \eta < x) = \mathsf{P}(\xi < x) = F_\xi(x) \neq F_\xi(x)F_\xi(x+1)$. Следовательно, ξ и η — зависимы.

Замечание. Если при вычислении величины ξ используется величина η, то ξ и η скорее всего будут зависимы.

§ 5. Числовые характеристики случайных величин

5.1. Математическое ожидание

Пример 5.1. Два стрелка стреляют по цели $\begin{array}{c|ccc}\xi & 8 & 9 & 10\\ \hline \mathsf{P} & 1/3 & 1/3 & 1/3\end{array}$ и $\begin{array}{c|ccc}\eta & 8 & 9 & 10\\ \hline \mathsf{P} & 1/4 & 1/2 & 1/4\end{array}$. Кто из них стреляет лучше? Можно сравнить среднее число выбитых очков. Пусть из n выстрелов k_8 раз попал а 8, k_9 — в 9 и k_{10} — в 10. Тогда среднее число выбитых очков равно $\frac{1}{n}(8k_8+9k_9+10k_{10}) \approx 8p_8 + 9p_9 + 10p_{10}$. Для первого стрелка — 9, для второго — тоже 9, следовательно, в среднем стрелки стреляют одинаково.

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины $\begin{array}{c|ccc}\xi & x_1 & x_2 & \cdots\\ \hline \mathsf{P} & p_1 & p_2 & \cdots\end{array}$ называется число $\mathsf{M}\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число $\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$.

Пример 5.2. Пусть $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2,\\ 1, & \pi/2 < x,\end{cases}$ — функция распределения случайной величины ξ. Тогда $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\\ \cos x, & 0 < x < \pi/2,\\ 0, & \pi/2 < x,\end{cases}$ — ее плотность распределения, а $\mathsf{M}\xi = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = (\cos x + x\sin x)\big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$ — математическое ожидание.

Теорема 20 (Свойства математического ожидания).

1. Математическое ожидание линейно. То есть для любых двух случайных величин ξ, η и для любых двух действительных чисел a, b верно равенство $\mathsf{M}(a\xi + b\eta) = a\mathsf{M}\xi + b\mathsf{M}\eta$.

В частности: $\mathsf{M}a = a$, $\mathsf{M}(a\xi) = a\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}(a\xi + b) = a\mathsf{M}\xi + b$, $\mathsf{M}(\xi - \eta) = \mathsf{M}\xi - \mathsf{M}\eta$, $\mathsf{M}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \mathsf{M}\xi_1 + \cdots + \mathsf{M}\xi_n$.

2. Если $\xi \# \eta$, то $\mathsf{M}(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\eta$.

3. Пусть $v(x)$ — некоторая функция. Тогда $\mathsf{M}v(\xi) = v(x_1)p_1 + v(x_2)p_2 + \ldots$, если ξ — дискретна, и $\mathsf{M}v(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x) f_\xi(x)\,dx$, если ξ — непрерывна.

В частности: $\mathsf{M}\xi^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots$ или $\mathsf{M}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx$.

Замечание. Любая невырожденная случайная величина зависит от себя самой, поэтому $\mathsf{M}\xi^2 \neq (\mathsf{M}\xi)^2$.

Пример 5.3. По цели стреляют трое: 0.5, 0.6 и 0.7, каждый по одному разу. Попадание — 2 очка, промах — -1 очко. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — число очков, выбитое, соответственно, первым, вторым и третьим стрелком. Тогда $\mathsf{M}\xi_1 = (-1)\cdot 0.5 + 2\cdot 0.5 = 0.5$, $\mathsf{M}\xi_2 = (-1)\cdot 0.4 + 2\cdot 0.6 = 0.8$, $\mathsf{M}\xi_3 = (-1)\cdot 0.3 + 2\cdot 0.7 = 1.1$, $\mathsf{M}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = 0.5 + 0.8 + 1.1 = 2.4$.

Пример 5.4. Кубик бросили 10 раз и перемножили все полученные очки. Тогда мат. ожидание полученного произведения равно $(3.5)^{10}$.

Пример 5.5. Пусть $\begin{array}{c|cc} \eta & -1 & 2 \\ \hline \mathsf{P} & 0.4 & 0.6 \end{array}$, тогда $\mathsf{M}\xi^3 = (-1)^3\cdot 0.4 + 2^3\cdot 0.6 = 4.4$.

Пример 5.6. Пусть $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x, \end{cases}$ — плотность случайной величины ξ. Тогда $\mathsf{M}\xi^3 = \int\limits_0^1 x^3 (3x^2)\,dx = \frac{1}{2}$.

5.2. Дисперсия

Пример 5.7 (Продолжение 5.1)**.** Два стрелка стреляют по цели. Кто из них чаще оправдывает ожидания? Можно сравнить насколько, в среднем, они отклоняются от ожидаемого количества очков. Среднее значение квадратов отклонений от ожидаемого числа очков равно $\frac{1}{n}((8-9)^2 k_8 + (9-9)^2 k_9 + (10-9)^2 k_{10}) \approx (8-9)^2 p_8 + (9-9)^2 p_9 + (10-9)^2 p_{10} = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$. Для первого стрелка — $\frac{2}{3}$, для второго — $\frac{1}{2}$. Таким образом второй стрелок больший мастер, чем первый, так как более стабилен, а стабильность, как известно, — признак мастерства.

Определение. *Дисперсией* случайной величины ξ называется число $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$.

Замечание. Для вычисления дисперсии также справедлива формула $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$.

Доказательство. Действительно, $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\xi^2 - 2\mathsf{M}\xi\mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$. ■

Дисперсия характеризует степень рассеяния случайной величины. Чем меньше дисперсия тем меньше случайная величина отклоняется от ожидаемого значения. Например, краскопульт.

Замечание. Если забыть возвести в квадрат разность $(\xi - \mathsf{M}\xi)$, то обязательно получим ноль: $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi) = \mathsf{M}\xi - \mathsf{M}\mathsf{M}\xi = 0$.

Пример 5.8 (Продолжение 5.2)**.** $\mathsf{M}\xi^2 = x^2 \sin x - 2\sin x + 2x\cos x\big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\pi^2 - 2$. Тогда $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{1}{4}\pi^2 - 2 - (\frac{1}{2}\pi - 1)^2 = \pi - 3$.

Теорема 21 (Свойства дисперсии). Пусть ξ, η — случайные величины, a, b — действительные константы. Тогда.
1. $\mathsf{D}\xi \geqslant 0$. Причем $\mathsf{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда ξ — это константа.
2. $\mathsf{D}(a\xi) = a^2\mathsf{D}\xi$. В частности, $\mathsf{D}(-\xi) = (-1)^2\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\xi$.
3. Если $\xi \# \eta$, то $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta$. В частности, $\mathsf{D}(\xi - \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta$, $\mathsf{D}(\xi + a) = \mathsf{D}\xi$.

5.3. Стандартное отклонение

Определение. *Стандартным отклонением* случайной величины ξ называется число $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathsf{D}\xi}$.

Замечание. Величина $\sigma(\xi)$ так же, как и дисперсия, характеризует разброс (рассеяние) случайной величины ξ, но, в отличие от дисперсии, измеряется в тех же единицах измерения, что и сама случайная величина.

5.4. Ковариация случайных величин

Определение. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называется число $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{M}\big((\xi - \mathsf{M}\xi)(\eta - \mathsf{M}\eta)\big)$. Если $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 0$, то говорят, что ξ и η некоррелированы.

Замечание. Для вычисления ковариации случайных величин ξ и η справедливы формулы:

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\big(\mathsf{D}(\xi + \eta) - \mathsf{D}\xi - \mathsf{D}\eta\big),$$
$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\big(\mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta - \mathsf{D}(\xi - \eta)\big),$$

$$\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta.$$

Доказательство. Действительно, $\mathsf{D}(\xi+\eta) = \mathsf{M}\big(\xi+\eta-\mathsf{M}(\xi+\eta)\big)^2 = \mathsf{M}\big((\xi-\mathsf{M}\xi)+(\eta-\mathsf{M}\eta)\big)^2 = \mathsf{M}(\xi-\mathsf{M}\xi)^2+\mathsf{M}(\eta-\mathsf{M}\eta)^2+\mathsf{M}\big((\xi-\mathsf{M}\xi)(\eta-\mathsf{M}\eta)\big) = \mathsf{D}\xi+\mathsf{D}\eta+2\mathsf{cov}(\xi,\eta)$.

Вторая формула получается аналогично.

Третья формула следует из равенств: $\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}\big((\xi-\mathsf{M}\xi)(\eta-\mathsf{M}\eta)\big) = \mathsf{M}(\xi\eta-\xi\mathsf{M}\eta-\eta\mathsf{M}\xi+\mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta)-\mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta-\mathsf{M}\eta\mathsf{M}\xi+\mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}(\xi\eta)-\mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta$. ■

Замечание. Из последней формулы вытекает, что ξ и η некоррелированы тогда и только тогда, когда $\mathsf{M}(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta$. В частности, это равенство выполнено для независимых ξ и η. Но, вместе с тем, существуют зависимые и некоррелированые случайные величины.

5.5. Коэффициент корреляции

Определение. *Коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η называется число $\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathsf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi\cdot\mathsf{D}\eta}}$.

Теорема 22 (Свойства коэффициента корреляции). Пусть ξ, η — случайные величины. Тогда.

1. $-1 \leqslant \rho(\xi,\eta) \leqslant 1$.

2. $\rho(\xi,\eta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{M}(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta$.

3. $\rho(\xi,\eta) = \pm 1$ тогда и только тогда, когда $\xi = a\eta + b$. Причем, если $\rho(\xi,\eta) = 1$, то $a > 0$ (зависимость прямая), и если $\rho(\xi,\eta) = -1$, то $a < 0$ (зависимость обратная).

Замечание. Таким образом, коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин.

§ 6. Неравенство Чебышева (связь математического ожидания и дисперсии)

Теорема 23 (Неравенство Чебышева). Пусть дана случайная величина ξ, у которой существуют математическое ожидание и дисперсия. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства $\mathsf{P}(|\xi-\mathsf{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$ и $\mathsf{P}(|\xi-\mathsf{M}\xi| < \varepsilon) > 1-\frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

Пример 6.1. Пусть $\mathsf{D}\xi = 0.001$, тогда $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 0.1) \leqslant \frac{0.001}{0.1^2} = 0.1$.

Замечание. Неравенство Чебышева дает очень грубую оценку. Например, если в предыдущем примере взять $\mathsf{D}\xi = 1$, то $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 0.1) \leqslant \frac{1}{0.1^2} = 100$, что, вообще говоря, очевидно.

Замечание. Пусть $\varepsilon = 5\sigma(\xi)$. Тогда $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 5\sigma(\xi)) \leqslant 1/25 = 0.04$, то есть событие $\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 5\sigma(\xi)\}$ практически невозможно. И это верно для любой случайной величины. Таким образом, если в результате случайного испытания случайная величина ξ отклонилась от своего МО более чем на $5\sigma(\xi)$, то практически наверняка за этим стоит какая либо причина: ошибка эксперимента, ошибочность гипотезы о распределении случайной величины ξ, проявление каких либо неучтенных данных или параметров эксперимента и т.д.

§ 7. Последовательности случайных величин

7.1. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины

Рассмотрим набор $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимых, одинаково распределенных случайных величин (обозначение: i.i.d. — identical independent distributions). Такой набор, например, можно получить, если произвести подряд несколько одинаковых случайных испытаний. Так как у случайных величин $\xi_1, \ldots \xi_n$ совпадают распределения, то совпадают и все числовые характеристики: $\mathsf{M}\xi_1 = \cdots = \mathsf{M}\xi_n = m$ и $\mathsf{D}\xi_1 = \cdots = \mathsf{D}\xi_n = d$.

Предположим, что $\xi_1, \ldots \xi_n$ — это результаты измерений некоторой величины. Тогда, если в измерениях нет систематической ошибки, то точное значение измеряемой величины равно $\mathsf{M}\xi_1$. Для повышения точности измерения, как правило, используют случайную величину $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Действительно, $\mathsf{M}\xi = \frac{1}{n}(\mathsf{M}\xi_1 + \cdots + \mathsf{M}\xi_n) = m$, то есть математическое ожидание ξ также совпадает с измеряемой величиной. Но, вместе с тем, $\mathsf{D}\xi = \frac{1}{n^2}(\mathsf{D}\xi_1 + \cdots + \mathsf{D}\xi_n) = \frac{d}{n}$ — дисперсия уменьшилась в n раз. Следовательно, ошибка измерения уменьшилась в $\sqrt{n}$ раз. Таким образом, случайная величина ξ в среднем также дает измеряемое значение, но имеет меньшее рассеяние, следовательно, дает более точный результат измерения.

7.2. Теорема Чебышева и закон больших чисел

Теорема 24 (Теорема Чебышева). Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ...— попарно независимы, и существует положительная константа C такая, что $\mathsf{D}\xi_1 \leqslant C$, $\mathsf{D}\xi_2 \leqslant C$, ... Тогда для всякого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ вероятность $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant \varepsilon)$ стремиться к 0 при $n \to +\infty$, где $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$.

Доказательство для случая одинаково распределенных ξ_1, ξ_2, ... Так как ξ_1, ξ_2, ...— одинаково распределены, то $\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = \cdots = m$, $\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = \cdots = d$. Так как ξ_1, ξ_2, ...— попарно независимы, то $\mathsf{D}\xi = \frac{d}{n}$. Применяя неравенство Чебышева для величины ξ, имеем $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{d}{n\varepsilon^2} \to 0$. ■

Замечание. Из теоремы Чебышева следует, что среднее арифметическое большого числа случайных величин утрачивает случайность! То есть с ростом n оно все меньше отклоняется от своего математического ожидания. Например, молекулы газа, сталкиваясь со стенками сосуда, сообщают им импульс, тем самым создавая давление на стенки сосуда. Движение молекул случайно, а давление постоянно (точнее, современные приборы не способны зарегистрировать его колебание).

Пример 7.1. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей $\delta = 0.95$, среднее арифметическое измерений ξ отклонялось от точного значения не более чем на $\varepsilon = 0.001$, если дисперсия измерений равна $d = 0.2$?

Согласно неравенству Чебышева, $\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| < \varepsilon) > 1 - \frac{d}{n\varepsilon^2} \geqslant \delta$. Следовательно, $\frac{d}{n\varepsilon^2} \leqslant 1 - \delta$. Подставляя $d = 0.2$, $\varepsilon = 0.001$ и $\delta = 0.95$, находим, что $n \geqslant 4000000$.

Теорема 25 (Закон больших чисел или теорема Бернулли). Пусть испытания проводятся по схеме Бернулли, и вероятность успеха в каждом из них равна p. Тогда вероятность $\mathsf{P}(|\frac{k}{n} - p| \geqslant \varepsilon)$, где k — это число успехов в n испытаниях, стремится к 0 при $n \to +\infty$.

Доказательство. Закон больших чисел получается из теоремы Чебышева, если рассмотреть последовательность независимых бернуллиевских случайных величин ξ_1, ξ_2, $\ldots \sim \mathrm{B}(p)$: $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \frac{k}{n}$, $\mathsf{M}\xi = p$. ■

7.3. Центральная предельная теорема

Теорема 26 (Центральная Предельная Теорема). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — i.i.d., $\mathsf{M}\xi_1 = \cdots = \mathsf{M}\xi_n = m$, $\mathsf{D}\xi_1 = \cdots = \mathsf{D}\xi_n = d$. Тогда при больших n распределение случайной величины $\xi = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$ мало отличается от нормального распределения $\mathrm{N}(m; \sqrt{d/n})$.

Замечание. На практике $n = 6$ уже считают большим.

Пример 7.2 (Продолжение 7.1)**.** Согласно центральной предельной теореме, имеем $\mathsf{P}(|\xi - m| \leqslant 0.001) = \mathsf{P}(m - 0.001 \leqslant \xi \leqslant m + 0.001) = F_\xi(m + 0.001) - F_\xi(m - 0.001) = 2\Phi\Big(\frac{0.001}{\sqrt{d/n}}\Big) - 1 = 0.95$. Следовательно, $\frac{0.001}{\sqrt{d/n}} = 1.96$ и $n \geqslant 768320$.

Замечание. Интегральная теорема Муавра–Лапласа является частным случаем центральной предельной теоремы так же, как ЗБЧ — частный случай теоремы Чебышева.

§ 8. Случайные векторы

8.1. Определение и примеры случайных векторов

До сих пор речь шла только о случайных величинах, принимающих численные значение, то есть об одномерных случайных величинах. Часто в результате случайного испытания наблюдают не одну, а набор случайных величин. В этом случае говорят о случайном векторе.

Определение. *Случайным вектором* называют вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, состоящий из случайных величин, наблюдаемых в одном случайном испытании.

Пример 8.1. Из металла массой 1 кг выплавляют параллелепипед. Размеры параллелепипеда есть случайный трехмерный вектор.

Пример 8.2. На плоскости нарисован единичный круг с центром в начале координат. Координаты точки, выбранной наудачу внутри круга, есть случайный двумерный вектор.

Далее, для простоты, мы будем считать, что в случайном эксперименте наблюдают только две случайные величины, то есть будем работать

только с двумерными случайными векторами (ξ, η). Значения двумерного случайного вектора удобно изображать на плоскости.

8.2. Функция распределения случайного вектора и ее свойства

Определение. *Функцией распределения* случайного вектора (ξ, η) (*совместной функцией распределения*) называют функцию $F_{\xi,\eta}(x, y) = \mathsf{P}(\xi < x, \eta < y)$.

Пример 8.3. Из прямоугольника $[0; 2] \times [0; 3]$, наудачу выбрана точка (ξ, η). Тогда

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0, \\ \frac{1}{6}xy, & 0 < x \leqslant 2 \text{ и } 0 < y \leqslant 3, \\ \frac{1}{6}x, & 0 < x \leqslant 2 \text{ и } 3 < y, \\ \frac{1}{6}y, & 2 < x \text{ и } 0 < y \leqslant 3, \\ 1, & 2 < x \text{ и } 3 < y. \end{cases}$$

Пример 8.4. На плоскости отмечены три точки $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$. Наудачу выбрана одна из них (ξ, η). Тогда $F_{\xi,\eta}(x, y) =$

$$\begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0, \\ 1/3, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } 0 < y \leqslant 1, \\ 2/3, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } 1 < y, \\ 2/3, & 1 < x \text{ и } 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \text{ и } 1 < y. \end{cases}$$

Теорема 27 (Свойства совместной функции распределения). Пусть (ξ, η) — некоторый случайный вектор. Тогда.

1. $0 \leqslant F_{\xi,\eta}(x, y) \leqslant 1$ для всех чисел x и y.

2. $\mathsf{P}(x_1 \leqslant \xi < x_2, \eta < y) = F_{\xi,\eta}(x_2, y) - F_{\xi,\eta}(x_1, y)$,
$\mathsf{P}(\xi < x, y_1 \leqslant \eta < y_2) = F_{\xi,\eta}(x, y_2) - F_{\xi,\eta}(x, y_1)$,
$\mathsf{P}(x_1 \leqslant \xi < x_2, y_1 \leqslant \eta < y_2) = F_{\xi,\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2, y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1, y_1)$.

3. $F_{\xi,\eta}(x, y)$ не убывает по каждому аргументу, т.е. если $x_1 \leqslant x_2$, то $F_{\xi,\eta}(x_1, y) \leqslant F_{\xi,\eta}(x_2, y)$ и если $y_1 \leqslant y_2$, то $F_{\xi,\eta}(x, y_1) \leqslant F_{\xi,\eta}(x, y_2)$.

4. $F_{\xi,\eta}(-\infty, y) = 0$, $F_{\xi,\eta}(x, -\infty) = 0$, $F_{\xi,\eta}(\infty, y) = F_\eta(y)$, $F_{\xi,\eta}(x, \infty) = F_\xi(x)$, $F_{\xi,\eta}(\infty, \infty) = 1$.

5. Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Пример 8.5. Пусть функция распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид $F_{\xi,\eta}(x,y) = (0.5 + \operatorname{arctg}(2x)/\pi)(0.5 + \operatorname{arctg}(5y)/\pi)$. Тогда
1) $\mathsf{P}(\xi < 1, \eta < 2) = (0.5 + \operatorname{arctg}(2)/\pi)(0.5 + \operatorname{arctg}(10)/\pi) = 0.825$.
2) $\mathsf{P}(\xi < 1, -3 < \eta < 2) = 0.807$.
3) $\mathsf{P}(0.5 < \xi < 1, -3 < \eta < 2) = 0.097$.

8.3. Дискретные случайные векторы

Определение. Случайный вектор $\bar{\xi}$ называется дискретным, если множество его возможных значений не более чем счетно.

Распределение двумерного дискретного случайного вектора (ξ, η) удобно записывать в виде таблицы

$\eta \setminus \xi$	x_1	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	$\dots$	p_{n1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	$\dots$	p_{nm}

, где x_i — возможные значения первой компоненты, а y_i — второй. Эта таблица очевидно должна удовлетворять условию согласования $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$.

Замечание. Если $g(x,y)$ — некоторая функция, то $\mathsf{M}g(\xi,\eta) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\, p_{i,j}$. В частности, $\mathsf{M}(\xi\eta) = \sum x_i y_j\, p_{i,j}$.

Пример 8.6. Пусть случайный вектор (ξ, η) задан таблицей

$\eta \setminus \xi$	1	2	3	η
-1	0.2	0.3	0	0.5
1	0	0.3	0.2	0.5
ξ	0.2	0.6	0.2	1

Тогда:
1) $\mathsf{P}(\xi = 3) = 0 + 0.2 = 0.2$, $\mathsf{P}(\xi + \eta \geqslant 2) = 0.3 + 0 + 0.2 = 0.5$,
2) $\mathsf{M}\xi = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.2 = 2$, $\mathsf{M}\eta = (-1) \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0$,
3) $\mathsf{M}(\xi\eta) = 1{\cdot}(-1){\cdot}0.2 + 2{\cdot}(-1){\cdot}0.3 + 3{\cdot}(-1){\cdot}0 + 1{\cdot}1{\cdot}0 + 2{\cdot}1{\cdot}0.3 + 3{\cdot}1{\cdot}0.2 = 0.4$,
3) $\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta = 0.4 - 2 \cdot 0 = 0.4$,
4) $\mathsf{D}\xi = 0.4$, $\mathsf{D}\eta = 1$, $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta - 2\mathsf{cov}(\xi,\eta) = 0.4 + 1 - 0.8 = 0.6$,
5) $\rho(\xi,\eta) = \frac{0.4}{\sqrt{0.4{\cdot}1}} = 0.632$, что свидетельствует о том, что связь между ξ и η существует и довольно близка к линейной.

8.4. Непрерывные случайные векторы. Плотность распределения и ее свойства

Определение. Случайный вектор (ξ, η) называется *непрерывным*, если его функция распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$ непрерывна и существует смешанная производная $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}}{\partial x \partial y}(x,y)$, которая называется *плотностью распределения* вектора (ξ, η).

Пример 8.7 (Продолжение 8.3)**.** Тогда $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{6}$, если $(x,y) \in (0;2) \times (0;3)$, и $f_{\xi,\eta}(x,y) = 0$, если $(x,y) \notin [0;2] \times [0;3]$.

Пример 8.8. Случайный вектор (ξ,η) задан функцией распределения $F_{\xi,\eta}(x,y) = \sin(x)\sin(y/2)$ при $(x,y) \in [0,\pi/2) \times [0,\pi)$. Тогда его плотность равна $f_{\xi,\eta}(x,y) = \cos(x)\cos(y/2)/2$, если $(x,y) \in (0,\pi/2) \times (0,\pi)$, и $f_{\xi,\eta}(x,y) = 0$, если $(x,y) \notin [0,\pi/2] \times [0,\pi]$.

Теорема 28 (Свойства совместной плотности). Пусть (ξ,η) — некоторый случайный вектор. Тогда:

1. $f_{\xi,\eta}(x,y) \geqslant 0$ для всех x и y.

2. Условие согласования: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt = 1$.

3. Пусть A — некоторое множество на плоскости. Тогда $\mathsf{P}((\xi,\eta) \in A) = \iint\limits_A f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$. В частности, $\mathsf{P}(x_1 \leqslant \xi < x_2,\ y_1 \leqslant \eta < y_2) = \int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$.

4. $F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$.

5. Если $g(x,y)$ — некоторая функция, то $\mathsf{M}g(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s,t)f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$. В частности, $\mathsf{M}(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} st\, f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$, $\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s\, f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt$.

6. $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,t)dt$ и $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(s,y)ds$ — плотности случайных величин ξ и η по отдельности (*маргинальные плотности*).

Пример 8.9. Случайный вектор (ξ,η) задан плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y) = 6e^{-2x-3y}$, если $x > 0$ и $y > 0$, и $f_{\xi,\eta}(x,y) = 0$, если $x < 0$ или $y < 0$. Тогда

1) $\mathsf{P}(-1 \leqslant \xi < 1,\ 1 \leqslant \eta < 2) = \int\limits_1^2\int\limits_{-1}^1 f_{\xi,\eta}(s,t)ds\,dt = \int\limits_1^2\int\limits_0^1 6e^{-2s-3t}ds\,dt = (-e^{-2s}\big|_0^1)(-e^{-3t}\big|_1^2) = 0.0409$;

2) Пусть $x > 0$ и $y > 0$, тогда: $F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_0^x 6e^{-2s-3t}ds\,dt = (1-e^{-2x})(1-e^{-3y})$.

3) $\mathsf{M}(\xi+\eta) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (s+t)6e^{-2s-3t}ds\,dt = 5/6$.

Раздел 3

Математическая статистика

§ 1. Предмет и задачи математической статистики

Основной задачей теории вероятностей является вычисление параметров случайных величин (случайных экспериментов), если известны их функции распределения. Ее основные понятия — пространство элементарных исходов, случайные события, вероятность, случайная величина — это чисто математические объекты, а значит, лишь модельно описывают действительность. Кроме того, в жизни мы редко встречаемся со случайными экспериментами, в которых точно известны все параметры, например, вероятности тех или иных событий. Эксперименты, все параметры которых известны точно, обычно созданы искусственно: бросание монеты, вытягивание шара из корзины и т.д.. Если же речь идет о производительности станка, или, например, о вероятности попадания стрелком в цель, но надо еще учесть, что ни один стрелок физически не сможет выстрелить бесконечное число раз. В таких задачах мы можем лишь предполагать существование подходящей вероятностной модели, но точные параметры этой вероятностной модели нам не известны.

Математическая статистика позволяет получать обоснованные выводы о параметрах, видах распределений и других свойствах случайных величин по *конечной* совокупности наблюдений за ними — выборке.

Две основные задачи математической статистики:

1. Задача об оценивании параметров.
2. Задача о проверке статистических гипотез.

Так как статистика судит о распределении случайной величины лишь

по конечной совокупности наблюдений за ней, то она не может давать абсолютно точных ответов. Тем не менее если ответы математической статистики нельзя назвать абсолютно точными, то их можно назвать совершенно строгими. Дело в том, что, давая приблизительные ответы, математическая статистика одновременно сообщает степень уверенности в них.

§ 2. Выборка

2.1. Основные определения

Определение. Пусть случайный эксперимент, в котором наблюдается случайная величина ξ, повторили с соблюдением всех условий n раз. При этом получили n чисел $x_1, \ldots, x_n$ — значений случайной величины ξ. Распределение наблюдаемой случайной величины ξ (функцию распределения $F_\xi(x)$) называют *генеральным распределением* (генеральной функцией распределения). Кортеж чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ называют *выборкой* объема n.

Определение. *Вариационным рядом* выборки $(x_1, \ldots, x_n)$ называют способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине от меньшего к большему. Разность $\omega = x_{\max} - x_{\min}$ между максимальным ($x_{\max} = \max\limits_i x_i$) и минимальным ($x_{\min} = \min\limits_i x_i$) элементом выборки называется *размахом* выборки.

Пример 2.1. Выборка $(3, 0, 3, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 3)$.
Вариационный ряд $(0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$. $\omega = 3 - 0 = 3$ — размах.

Определение. Пусть выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит k различных чисел $z_1, \ldots, z_k$, причем число z_i встречается в выборке n_i раз. Тогда числа $z_1, \ldots, z_k$ называют *вариантами*, а числа $n_1, \ldots, n_k$ — *частотами* соответствующих вариант. Таблицу $\begin{array}{c|ccc} z_i & z_1 & \cdots & z_k \\ \hline n_i & n_1 & \cdots & n_k \end{array}$ называют *распределением частот* (статистическим рядом).

Пример 2.2 (Продолжение 2.1). $\begin{array}{c|cccc} z_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline n_i & 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}$

Замечание. Для всякого распределения частот очевидно должно быть выполнено условие согласования: $n_1 + \cdots + n_k = n$.

Определение. *Эмпирическим распределением* выборки $(x_1, \ldots, x_n)$ называют дискретное распределение $\begin{array}{c|ccc} \xi_n^* & z_1 & \cdots & z_k \\ \hline \mathsf{P} & \frac{n_1}{n} & \cdots & \frac{n_k}{n} \end{array}$. Функцию распределения

$F_n^*(x)$ случайной величины ξ_n^* называют *эмпирической функцией распределения* (или *кумулятивным распределением*, или *выборочным распределением*).

Пример 2.3 (Продолжение 2.1).

ξ_n^*	0	1	2	3
P	2/11	3/11	2/11	4/11

Замечание. Если все элементы выборки различны, то эмпирическая функция распределения примет вид

ξ_n^*	x_1	$\cdots$	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

.

Теорема 29 (Гливенко–Капелли). С ростом n эмпирическая функция распределения стремится к генеральной функции распределения.

2.2. Гистограмма

Если объем выборки велик и в ней большое количество вариант, то такую выборку можно наглядно изобразить в виде *гистограммы*.

Построение гистограммы.

1) Разобьем отрезок $[x_{\min}; x_{\max}]$ на m равных отрезков длины $h = \frac{1}{m}(x_{\max} - x_{\min})$. Эти отрезки называются (*частотными интервалами*)

2) Найдем количество n_i элементов выборки, попадающих в соответствующий частотный интервал (если элемент выборки оказался на границе двух частотных интервалов, то этот элемент отнесем к левому интервалу).

3) Полученные частоты попадания в частотные интервалы изобразим в виде столбиков высоты $\frac{n_i}{n\,h}$.

Количество m частотных интервалов подбирается так, чтобы в каждый частотный интервал попадало около пяти или более элементов выборки. Полученный ступенчатый полигон и есть гистограмма.

Замечание. Если генеральное распределение непрерывно, то, согласно теореме Гливенко–Капелли, с ростом объема выборки и количества частотных интервалов, гистограмма стремится к плотности генерального распределения.

§ 3. Задача об оценивании параметров

3.1. Точечные оценки

Задача о точечной оценке параметра: Предположим, что нас интересует числовой параметр θ, как-то характеризующий генеральное

распределение. Требуется по выборке найти приближенное значение θ^* этого параметра.

Часто в качестве параметра θ выступают математическое ожидание $a = \mathsf{M}\xi$ или дисперсия $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi$.

Определение. Правило, с помощью которого обрабатывается выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ и вычисляется примерное значение θ^* параметра θ, называется *оценкой* θ (или *точечной оценкой*). Таким образом точечная оценка, это некоторая функция $\theta^* = \theta^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Замечание. Точечная оценка θ^* на самом деле тоже является случайной величиной. Поэтому какой бы замечательной оценкой не являлась функция θ^*, все равно нельзя гарантировать, что $\theta^*(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с θ.

Определение. Оценка $\theta^*(x_1, \ldots, x_n)$ называется *несмещенной* (без систематических ошибок), если $\mathsf{M}\theta^* = \theta$.

Определение. Оценка $\theta^*(x_1, \ldots, x_n)$ называется *состоятельной*, если для всякого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ вероятность $\mathsf{P}(|\theta^* - \theta| \geqslant \varepsilon)$ стремиться к 0 при $n \to +\infty$.

Замечание. Если оценка $\theta^*(x_1, \ldots, x_n)$ несмещена и ее дисперсия стремится к нулю с ростом n, то, в силу неравенства Чебышева, такая оценка состоятельна.

3.2. Получение точечных оценок

В рамках нашего курса мы разберем только один метод получения точечных оценок — метод подстановки (или метод моментов). Идея этого метода проста и следует из теоремы Гливенко–Капелли.

Метод подстановки. Если параметр θ каким либо образом выражается через генеральное распределение, то, подставив вместо генерального распределения эмпирическое, получим точечную оценку θ^* этого параметра.

Замечание. Так как справедлива теорема Гливенко–Капелли, то оценки, полученные методом подстановки, как правило, состоятельны.

3.3. Некоторые точечные оценки

3.3.1. Точечная оценка математического ожидания (выборочное среднее)

Задача: Найти точечную оценку a^* параметра $a = \mathsf{M}\xi$.

Методом подстановки получаем

$$a^* = \mathsf{M}\xi_n^* = z_1\tfrac{n_1}{n} + \cdots + z_k\tfrac{n_k}{n} = \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}.$$

Величина $\bar{x}$ называется *выборочным средним*. Выборочное среднее — несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания a.

3.3.2. Точечная оценка дисперсии (выборочная дисперсия)

Задача: Найти точечную оценку параметра $d = \mathsf{D}\xi$.

Применим метод подстановки к формуле $d = \mathsf{D}\xi$. Получим оценку

$$d^* = \mathsf{D}\xi_n^* = \mathsf{M}(\xi_n^*)^2 - (\mathsf{M}\xi_n^*)^2 = \tfrac{1}{n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Оценка d^* является состоятельной, но она смещена! Вычисления показывают, что $\mathsf{M}d^* = \frac{n-1}{n}\mathsf{D}\xi$. Поэтому положение можно исправить, просто домножив оценку d^* на дробь $\frac{n}{n-1}$. В итоге получаем *исправленную оценку дисперсии* или *выборочную дисперсию*

$$s^2 = \tfrac{n}{n-1}d^* = \tfrac{n}{n-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \tfrac{1}{n-1}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - \tfrac{n}{n-1}\bar{x}^2.$$

Замечание. Используя оценку для дисперсии, можно получить оценку для стандартного отклонения $\sigma(\xi)$: $\sigma^* = \sqrt{s^2} = s$ (эта оценка будет смещенной, но величина смещение пренебрежимо мала, так как оценка состоятельна).

3.3.3. Оценки параметров распределений стандартных классов

Нормальное распределение.
Если $\xi \sim N(a, \sigma)$, то $a^* = \bar{x}$ и $\sigma^* = \sqrt{s^2}$. Оценка σ^* смещена, но состоятельна.

Экспоненциальное распределение.
Если $\xi \sim E(\lambda)$, то $\lambda^* = 1/\bar{x}$. Оценка λ^* смещена, но состоятельна.

Равномерное распределение.
Если $\xi \sim U(\alpha;\beta)$, то $\alpha^* = \frac{1}{n-1}(n\,x_{\min} - x_{\max})$, $\beta^* = \frac{1}{n-1}(n\,x_{\max} - x_{\min})$. Оценки α^* и β^* не смещены и состоятельны. Для получения оценок α^* и β^* применялся метод *наибольшего правдоподобия*. Метод подстановки в этом случае дает смещенные оценки.

3.4. Интервальные оценки

3.4.1. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Точечные оценки дают приближенное значение θ^* параметра θ, но они не отвечают на вопрос: на сколько θ^* отличается от θ? Поэтому более корректно сформулировать задачу об оценивании параметра θ в следующем виде.

Задача об интервальной оценке параметра: для заданной вероятности δ найти, по возможности, наименьший интервал (θ_1, θ_2), в котором с вероятностью δ лежит неизвестный параметр θ. Вероятность δ называется *доверительной вероятностью* или *уровнем доверия*, вероятность $\alpha = 1 - \delta$ называется *уровнем значимости*, интервал (θ_1, θ_2) называется *доверительным интервалом*.

Основное уравнение для поиска доверительного интервала имеет вид

$$\mathsf{P}(\theta_1 < \theta < \theta_1) = \delta.$$

Замечание. Из одного уравнения очень тяжело найти сразу две неизвестных величины θ_1 и θ_2. Поэтому часто доверительный интервал ищут в симметричном виде $(\theta^* - \varepsilon; \theta^* + \varepsilon)$, где θ^* — точечная оценка параметра θ. Основное уравнение для поиска доверительного интервала в этом случае принимает вид:

$$\mathsf{P}(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon) = \delta \quad \text{или} \quad \mathsf{P}(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = \delta.$$

Последнее уравнение решать проще, так как в нем меньше неизвестных и обычно известен закон распределения случайной величины θ^* (или хоть что-нибудь об этом законе).

3.4.2. Доверительный интервал для математического ожидания (общий случай)

Задача: Построить доверительный интервал для параметра $a = \mathsf{M}\xi$,

если генеральное распределение не является нормальным ($\xi \not\sim \mathrm{N}(a,\sigma)$).

Пусть $a = \mathsf{M}\xi$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi$. Уравнение на доверительный интервал в этом случае имеет вид: $\mathsf{P}(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \delta$. Согласно центральной предельной теореме имеем, что $\bar{x} \sim \mathrm{N}(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Поэтому

$$\mathsf{P}(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = F_{\bar{x}}(a+\varepsilon) - F_{\bar{x}}(a-\varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = \delta.$$

По таблице находим величину v_δ такую, что $2\Phi(v_\delta) - 1 = \delta$, и находим $\varepsilon = v_\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Следовательно, доверительный интервал имеет вид $(\bar{x} - v_\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + v_\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Если σ не известна, то $(\bar{x} - v_\delta\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + v_\delta\frac{s}{\sqrt{n}})$.

Определение. Число v_δ такое, что $2\Phi(v_\delta) - 1 = \delta$, называется *двусторонней квантилью* нормального распределения. Число u_δ такое, что $\Phi(u_\delta) = \delta$, называется *односторонней квантилью* нормального распределения.

Замечание. Односторонняя и двусторонняя квантили связаны равенством $v_{1-\alpha} = u_{1-\alpha/2}$. Используя одностороннюю квантиль, доверительный интервал для мат. ожидания можно записать в виде $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$.

3.4.3. Доверительный интервал для математического ожидания (случай нормального генерального распределения)

Задача: Построить доверительный интервал для $\mathsf{M}\xi$, если известно, что генеральное распределение нормально ($\xi \sim \mathrm{N}(a,\sigma)$). Например, ξ — это результат измерений или гипотеза о нормальности распределения согласуется с выборкой.

Если генеральное распределение нормально, то случайная величина $\frac{\bar{x}-a}{s/\sqrt{n}}$ имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы. Поэтому доверительный интервал принимает вид:

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\delta,n-1};\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\delta,n-1}\right).$$

Здесь $t_{\delta,n-1}$ — двусторонняя квантиль распределения Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы.

Замечание. Так как распределение величины $\frac{\bar{x}-a}{s/\sqrt{n}}$ известно точно, а не приближенно как в ЦПТ, то полученную формулу для доверительного интервала можно использовать при малых объемах выборки. При объемах

выборки, превышающих 100, квантили $t_{\delta,n-1}$ и v_δ практически совпадают, следовательно, обе формулы (общий и нормальный случаи) дают одинаковые ответы (начинает работать ЦПТ).

Замечание. Часто в таблицах указывают односторонние квантили. Односторонняя и двусторонняя квантили связаны соотношением $t_{1-\alpha,n-1} = t^{\text{одн}}_{1-\alpha/2,n-1}$. Доверительный интервал имеет вид

$$\left(\bar{x} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t^{\text{одн}}_{1-\alpha/2,n-1};\ \bar{x} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t^{\text{одн}}_{1-\alpha/2,n-1}\right).$$

3.4.4. Доверительный интервал для дисперсии (общий случай)

Задача: Построить доверительный интервал для $\mathsf{D}\xi$, если $\xi \not\sim \mathrm{N}(a,\sigma)$.

$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$. Доверительный интервал для дисперсии построим как доверительный интервал для мат. ожидания величины $(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$, т.е. доверительный интервал для $\mathsf{D}\xi$ имеет вид $(s^2 - v_\delta \frac{s_y}{\sqrt{n}}; s^2 + v_\delta \frac{s_y}{\sqrt{n}})$, где s_y — оценка стандартного отклонения для выборки $y_1 = (x_1 - \bar{x})^2, \ldots, y_n = (x_n - \bar{x})^2$.

Замечание. Эта формула начинает работать лишь для выборок большого объема, состоящих не менее, чем из 100 элементов.

3.4.5. Доверительный интервал для дисперсии (случай нормального генерального распределения)

Задача: Построить доверительный интервал для $\mathsf{D}\xi$, если $\xi \sim \mathrm{N}(a,\sigma)$.

Если генеральное распределение нормально, то случайная величина $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 с $k = n-1$ степенями свободы. Доверительный интервал для $\mathsf{D}\xi$ имеет вид

$$\left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}};\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right),$$

где $\chi^2_{\gamma,k}$ — квантили распределения χ^2 с k степенями свободы уровня γ.

Замечание. Для распределения χ^2 не существует двусторонних квантилей.

Замечание. Полученную формулу для доверительного интервала можно использовать при малых объемах выборки.

§ 4. Задача о проверке статистических гипотез

4.1. Общий подход

Проверить статистическую гипотезу означает дать ответ «да» или «нет», верна гипотеза или нет. В качестве гипотез обычно выступают предположения относительно генерального распределения. Ответ, полученный в результате обработки статистических данных, не может быть абсолютно точным, поэтому статистика дает ответ «да» или «нет», указывая вероятность правильности такого ответа. Гипотезу обычно обозначают буквой H.

Определение. Способ проверки гипотезы называется *критерием*.

Ошибки при принятии решения делят на:
Ошибка 1 *рода*: отвергнуть гипотезу H, когда она верна;
Ошибка 2 *рода*: принять гипотезу H, когда она не верна.

Вероятность ошибки первого рода фиксируют и называют уровнем значимости α того критерия, при помощи которого проверяют гипотезу.

Определение. *Статистикой* называется любая функция $Z = Z(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 4.1. Любая точечная оценка — статистика;
$Z(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}$ — статистика;
$Z(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\bar{x}-a}{s/\sqrt{n}}$ статистика, имеющая стандартное нормальное распределение, если генеральное распределение произвольно и n — велико, или распределение Стьюдента, если генеральное распределение нормально.
$Z(x_1, \ldots, x_n) = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ — статистика, имеющая распределение χ^2, если генеральное распределение нормально.

Общий подход к проверке гипотез (построению критериев):
1) Сформулировать гипотезу H;
2) выбрать подходящую статистику Z;
3) назначить уровень значимости α и найти квантили $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$;
4) по выборке вычислить выборочное значение статистики $z_{\text{в}}$;

5) принять статистическое решение: если $z_{\alpha/2} < z_{\text{в}} < z_{1-\alpha/2}$, то гипотезу H принимают как согласующуюся с выборкой, в противном случае — не принимают, так как она не согласуется с выборкой.

Замечание. Иногда, в зависимости от задачи (обычно, когда статистика имеет распределение χ^2), находят только одну квантиль z_α или $z_{1-\alpha}$ и проверяют либо неравенство $z_\alpha < z_{\text{в}}$, либо неравенство $z_{\text{в}} < z_{1-\alpha}$.

Замечание. Любой статистический критерий состоит в выборе статистики и способа принятия решения.

4.2. Проверка гипотезы о виде генерального распределения. Критерий χ^2

Задача: Для заданной функции распределения $F(x)$ проверить гипотезу H: генеральная функция распределения $F_\xi(x)$ совпадает с $F(x)$.

Схема проверки гипотезы H по критерию χ^2:
1) По выборке найти точечные оценки всех параметров предполагаемого распределения. Запомнить количество l оцененных параметров;
2) область возможных значений случайной величины ξ разбить на r частотных интервалов $[s_0; s_1)$, …, $[s_{r-1}; s_r]$;
3) вычислить частоты n_1, …, n_r попадания элементов выборки в частотные интервалы. Контроль: $n_1 + \cdots + n_r = n$;
4) используя предполагаемую функцию распределения $F(x)$, найти вероятности $p_1 = F(s_1) - F(s_0)$, …, $p_r = F(s_r + 0) - F(s_{r-1})$, попадания случайной величины ξ в частотные интервалы. Контроль: $p_1 + \cdots + p_r = 1$. Полученные результаты можно оформить в виде таблицы:

	Частотные интервалы				Всего
	1	2	$\cdots$	r	
Наблюдаемое	n_1	n_2	$\cdots$	n_r	n
Ожидаемое	np_1	np_2	$\cdots$	np_r	n

5) Вычислить выборочное значение статистики критерия χ^2 по формуле:

$$\chi^2_{\text{в}} = \frac{n_1^2}{np_1} + \cdots + \frac{n_r^2}{np_r} - n.$$

6) Зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $\chi^2_{1-\alpha,r-l-1}$, где r — это количество частотных интервалов, а l — количество оцененных в

пункте 1) параметров;
7) принять решение: Если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha,r-l-1}$, то гипотеза о виде распределения принимается, как согласующаяся с выборкой; если же $\chi^2_{\text{в}} \geqslant \chi^2_{1-\alpha,r-l-1}$, то отклоняется, как не согласующаяся с выборкой.

Замечание. Чтобы этот критерий был достаточно точным, необходимо, чтобы для всех частотных интервалов выполнялось условие $np_k \geqslant 5$. Если в некоторых интервалах это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними. Число r частотных интервалов должно быть больше 4 и меньше 30.

4.2.1. Проверка гипотезы о равномерном распределении

Задача: Проверить гипотезу H, утверждающую, что $\xi \sim \mathrm{U}(\alpha;\beta)$, то есть что $F_\xi(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$, если $\alpha < x \leqslant \beta$.

1) Оценить параметры: $\alpha^* = \frac{1}{n-1}(n\,x_{\min} - x_{\max})$, $\beta^* = \frac{1}{n-1}(n\,x_{\max} - x_{\min})$ $(l = 2)$;
2) отрезок $[\alpha^*;\beta^*]$ разбить на $r = [n/5]$ равных частотных интервалов $[z_0;z_1)$, …, $[z_{r-1};z_r]$ длины $h = \frac{\beta^*-\alpha^*}{r}$: $z_0 = \alpha^*$, $z_1 = \alpha^* + h$, $z_2 = \alpha^* + 2\,h$, …, $z_r = \alpha^* + r\,h = \beta^*$;
3) вычислить частоты $n_1, \ldots, n_r$ попадания в интервалы $[z_0;z_1)$, …, $[z_{r-1};z_r]$;
4) вычислить $\chi^2_{\text{в}} = \frac{r}{n}(n_1^2 + \cdots + n_r^2) - n$;
5) зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $\chi^2_{1-\alpha,r-l-1} = \chi^2_{1-\alpha,r-3}$;
6) если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha,r-3}$, то генеральное распределение равномерно.

4.2.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении

Задача: Проверить гипотезу H, утверждающую, что $\xi \sim \mathrm{N}(a;\sigma)$, то есть что $F_\xi(x) = \Phi\big(\frac{x-a}{\sigma}\big)$.

Полный критерий (для больших выборок):
1) Оценить параметры распределения $a^* = \bar{x}$ и $\sigma^* = s$ $(l = 2)$;
2) числовую прямую разбить на r частотных интервалов точками $-\infty = z_0 < z_1 < \cdots < z_{r-1} < z_r = +\infty$;
3) вычислить частоты $n_1, \ldots, n_r$ попадания в интервалы

$(z_0; z_1), [z_1; z_2), \ldots, [z_{r-1}; z_r)$;
4) по таблице значений функции Лапласа найти $\Phi_0 = \Phi(-\infty) = 0$, $\Phi_1 = \Phi\left(\frac{z_1-\bar{x}}{s}\right)$, $\ldots$, $\Phi_{r-1} = \Phi\left(\frac{z_{r-1}-\bar{x}}{s}\right)$, $\Phi_r = \Phi(\infty) = 1$ и вычислить вероятности $p_1 = \Phi_1 - \Phi_0$, $\ldots$, $p_r = \Phi_r - \Phi_{r-1}$;
5) вычислить $\chi^2_{\text{в}} = \frac{n_1^2}{np_1} + \cdots + \frac{n_r^2}{np_r} - n$;
6) зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $\chi^2_{1-\alpha,r-3}$;
7) если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha,r-3}$, то генеральное распределение нормально.

Упрощенный критерий (для малых выборок $25 \leqslant n \leqslant 100$)
Упрощенный критерий отличается от полного специальным выбором частотных интервалов. Поэтому изменяются только пункты 2) и 4) полного критерия:
2) Числовую прямую разбить на 6 промежутков: $(-\infty; \bar{x}-s)$, $[\bar{x}-s; \bar{x}-\frac{1}{2}s)$, $[\bar{x}-\frac{1}{2}s; \bar{x})$, $[\bar{x}; \bar{x}+\frac{1}{2}s)$, $[\bar{x}+\frac{1}{2}s; \bar{x}+s)$, $[\bar{x}+s; +\infty)$;
4) $p_1 = p_6 = 0.1587$, $p_2 = p_5 = 0.1498$, $p_3 = p_4 = 0.1915$.

4.3. Проверка гипотезы о совпадении математических ожиданий

Задача: Даны две независимые случайные величины ξ и η, представленные выборками $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_k)$. Требуется проверить гипотезу о том, что математические ожидания случайных величин ξ и η совпадают, то есть проверить равенство $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta$.

4.3.1. Общий случай

Следует применять, когда известно, что либо $\xi \not\sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$, либо $\eta \not\sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$.
1) Вычислить статистику $Z_{\text{в}} = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n}+\frac{s_y^2}{k}}}$;
2) зафиксировать уровень значимости α и для уровня доверия $\delta = 1-\alpha$ найти квантиль v_δ нормального распределения: $2\Phi(v_\delta) - 1 = \delta$;
3) если $Z_{\text{в}} < v_\delta$, то считаем, что математические ожидания совпадают.

4.3.2. Случай нормальных генеральных распределений

Следует применять, когда известно, что $\xi \sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$ и $\eta \sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$.
1) Зафиксировать уровень значимости α и найти двусторонние квантили распределения Стьюдента $t_x = t_{1-\alpha,n-1}$ и $t_y = t_{1-\alpha,k-1}$;

2) вычислить величину $T_{\text{в}} = \frac{\frac{s_x^2}{n}t_x + \frac{s_y^2}{k}t_y}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n}+\frac{s_y^2}{k}}}$;
3) если $|\bar{x}-\bar{y}| < T_{\text{в}}$, то считаем, что математические ожидания совпадают.

4.4. Проверка гипотезы о совпадении дисперсий

Задача: Даны две независимые случайные величины ξ и η, представленные выборками $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_k)$. Требуется проверить гипотезу H, утверждающую, что $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta$.

4.4.1. Общий случай

Следует применять, когда известно, что либо $\xi \not\sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$, либо $\eta \not\sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$.
1) Зафиксировать уровень значимости α и вычислить $\alpha_1 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$;
2) по выборкам X и Y построить доверительные интервалы для дисперсий, используя уровень значимости α_1;
3) если доверительные интервалы пересекаются, то считаем, что дисперсии совпадают.

4.4.2. Случай нормального распределения

Следует применять, когда известно, что $\xi \sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$ и $\eta \sim \mathrm{N}(\cdot,\cdot)$.
1) Вычислить s_x^2 и s_y^2. Будем считать, что $s_x^2 > s_y^2$;
2) зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $F_{1-\alpha/2}(n-1, k-$
1) распределения Фишера, уровня $1-\alpha/2$ с $f_1 = n-1$ и $f_2 = k-1$ степенями свободы;
3) если $\frac{s_x^2}{s_y^2} < F_{1-\alpha/2}(n-1, k-1)$, то считаем, что дисперсии совпадают.

4.5. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерий χ^2

Задача: Даны две независимые случайные величины ξ и η, представленные выборками $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_k)$. Требуется проверить гипотезу H, утверждающую, что случайные величины ξ и η имеют одинаковый закон распределения.

1) Найти отрезок $[\alpha;\beta]$, содержащий все элементы выборок X и Y;
2) отрезок $[\alpha;\beta]$ разбить на r частотных интервалов числами $\alpha = z_0 <$

$\cdots < z_r = \beta$;

3) вычислить частоты $n_1, \ldots, n_r$ попадания в частотные интервалы для выборки X;

4) вычислить частоты $k_1, \ldots, k_r$ попадания в частотные интервалы для выборки Y.

Контроль: $n_1 + \cdots + n_r = n, \quad k_1 + \cdots + k_r = k$;

4) вычислить $\chi^2_{\text{в}} = nk\big(\frac{1}{n_1+k_1}\big(\frac{n_1}{n} - \frac{k_1}{k}\big)^2 + \cdots + \frac{1}{n_r+k_r}\big(\frac{n_r}{n} - \frac{k_r}{k}\big)^2\big)$;

5) зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $\chi^2_{1-\alpha,r-1}$;

7) если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha,r-1}$, то гипотеза о совпадении законов распределения принимается.

§ 5. Линейный регрессионный анализ

Пусть в случайном эксперименте наблюдается пара случайных величин (ξ, η). Этот случайный эксперимент повторили с соблюдением всех условий n раз и получили n пар чисел (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) — значений случайных величин ξ и η в каждом из экспериментов.

Задача: Проверить существует ли между ξ и η линейная зависимость, и если да, то найти коэффициенты этой зависимости.

Итак, предположим, что между ξ и η существует связь в виде:

$$\eta = b_0 + b_1\xi + \varepsilon,$$

здесь b_0, b_1 — параметры линейной зависимости (линейной регрессии), а ε — случайная ошибка наблюдений, причем $\mathsf{M}\varepsilon = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon = \text{const} > 0$. Таким образом выборка $((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ должна быть устроена так, что

$$y_1 = b_0 + b_1x_1 + \varepsilon_1, \;\; y_2 = b_0 + b_1x_2 + \varepsilon_2, \;\; \ldots, \;\; y_n = b_0 + b_1x_n + \varepsilon_n.$$

Замечание. Если $b_1 \neq 0$, то между ξ и η существует зависимость. Если же $b_1 = 0$, то между ξ и η нет линейной зависимости, но может существовать более сложная зависимость.

Определение. Линейная зависимость называется *незначимой*, если $b_1 = 0$.

5.1. Точечные оценки параметров линейной регрессии

Задача: Необходимо найти точечные оценки b_0^* и b_1^* параметров b_0 и b_1.

1) Вычислить $Q_{xx} = (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$;
2) вычислить $Q_{xy} = (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})$;
3) найти точечные оценки по формулам:

$$b_1^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}, \quad b_0^* = \bar{y} - b_1^* \bar{x}.$$

5.2. Проверка гипотезы о незначимости линейной зависимости по критерию Фишера

Задача: Проверить гипотезу H о *незначимости* линейной зависимости между ξ и η.
1) Вычислить остаточную сумму квадратов по формуле:

$$Q_{ee} = (y_1 - (b_0^* + b_1^* x_1))^2 + \cdots + (y_n - (b_0^* + b_1^* x_n))^2.$$

2) вычислить выборочную статистику критерия Фишера $F_{\text{в}} = (n-2)(b_1^*)^2 \frac{Q_{xx}}{Q_{ee}}$;
3) зафиксировать уровень значимости α и найти квантиль $F_{1-\alpha}(1, n-2)$ распределения Фишера, уровня $1-\alpha$ с $f_1 = 1$ и $f_2 = n-2$ степенями свободы;
4) если $F_{\text{в}} < F_{1-\alpha}(1, n-2)$, то гипотезу принимаем, то есть линейную связь считаем незначимой. В противном случае линейная связь значима.

5.3. Проверка гипотезы о незначимости линейной зависимости через доверительный интервал для коэффициента b_1.

Задача: Смотри предыдущий пункт.
1) Зафиксировать уровень значимости α и найти двустороннюю квантиль распределения Стьюдента $t_{1-\alpha,n-2}$;
2) построить доверительный интервал для b_1 по формуле:

$$\left(b_1^* - t_{1-\alpha,n-2}\sqrt{\tfrac{Q_{ee}}{(n-2)Q_{xx}}};\ b_1^* + t_{1-\alpha,n-2}\sqrt{\tfrac{Q_{ee}}{(n-2)Q_{xx}}}\right)$$

3) если построенный доверительный интервал содержит ноль, то гипотезу принимаем, то есть линейную связь считаем незначимой. В противном случае линейная связь значима.

Справочные таблицы

Таблица 1: Значения функции распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\, ds$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.30	0.6179	0.60	0.7257	0.90	0.8159	1.20	0.8849	1.50	0.9332
0.01	0.5040	0.31	0.6217	0.61	0.7291	0.91	0.8186	1.21	0.8869	1.51	0.9345
0.02	0.5080	0.32	0.6255	0.62	0.7324	0.92	0.8212	1.22	0.8888	1.52	0.9357
0.03	0.5120	0.33	0.6293	0.63	0.7357	0.93	0.8238	1.23	0.8907	1.53	0.9370
0.04	0.5160	0.34	0.6331	0.64	0.7389	0.94	0.8264	1.24	0.8925	1.54	0.9382
0.05	0.5199	0.35	0.6368	0.65	0.7422	0.95	0.8289	1.25	0.8944	1.55	0.9394
0.06	0.5239	0.36	0.6406	0.66	0.7454	0.96	0.8315	1.26	0.8962	1.56	0.9406
0.07	0.5279	0.37	0.6443	0.67	0.7486	0.97	0.8340	1.27	0.8980	1.57	0.9418
0.08	0.5319	0.38	0.6480	0.68	0.7517	0.98	0.8365	1.28	0.8997	1.58	0.9429
0.09	0.5359	0.39	0.6517	0.69	0.7549	0.99	0.8389	1.29	0.9015	1.59	0.9441
0.10	0.5398	0.40	0.6554	0.70	0.7580	1.00	0.8413	1.30	0.9032	1.60	0.9452
0.11	0.5438	0.41	0.6591	0.71	0.7611	1.01	0.8438	1.31	0.9049	1.61	0.9463
0.12	0.5478	0.42	0.6628	0.72	0.7642	1.02	0.8461	1.32	0.9066	1.62	0.9474
0.13	0.5517	0.43	0.6664	0.73	0.7673	1.03	0.8485	1.33	0.9082	1.63	0.9484
0.14	0.5557	0.44	0.6700	0.74	0.7704	1.04	0.8508	1.34	0.9099	1.64	0.9495
0.15	0.5596	0.45	0.6736	0.75	0.7734	1.05	0.8531	1.35	0.9115	1.65	0.9505
0.16	0.5636	0.46	0.6772	0.76	0.7764	1.06	0.8554	1.36	0.9131	1.66	0.9515
0.17	0.5675	0.47	0.6808	0.77	0.7794	1.07	0.8577	1.37	0.9147	1.67	0.9525
0.18	0.5714	0.48	0.6844	0.78	0.7823	1.08	0.8599	1.38	0.9162	1.68	0.9535
0.19	0.5753	0.49	0.6879	0.79	0.7852	1.09	0.8621	1.39	0.9177	1.69	0.9545
0.20	0.5793	0.50	0.6915	0.80	0.7881	1.10	0.8643	1.40	0.9192	1.70	0.9554
0.21	0.5832	0.51	0.6950	0.81	0.7910	1.11	0.8665	1.41	0.9207	1.71	0.9564
0.22	0.5871	0.52	0.6985	0.82	0.7939	1.12	0.8686	1.42	0.9222	1.72	0.9573
0.23	0.5910	0.53	0.7019	0.83	0.7967	1.13	0.8708	1.43	0.9236	1.73	0.9582
0.24	0.5948	0.54	0.7054	0.84	0.7995	1.14	0.8729	1.44	0.9251	1.74	0.9591
0.25	0.5987	0.55	0.7088	0.85	0.8023	1.15	0.8749	1.45	0.9265	1.75	0.9599
0.26	0.6026	0.56	0.7123	0.86	0.8051	1.16	0.8770	1.46	0.9279	1.76	0.9608
0.27	0.6064	0.57	0.7157	0.87	0.8078	1.17	0.8790	1.47	0.9292	1.77	0.9616
0.28	0.6103	0.58	0.7190	0.88	0.8106	1.18	0.8810	1.48	0.9306	1.78	0.9625
0.29	0.6141	0.59	0.7224	0.89	0.8133	1.19	0.8830	1.49	0.9319	1.79	0.9633

Продолжение таблицы 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.80	0.9641	2.00	0.9772	2.20	0.9861	2.40	0.9918	2.60	0.9953	2.80	0.9974
1.81	0.9649	2.01	0.9778	2.21	0.9864	2.41	0.9920	2.61	0.9955	2.82	0.9976
1.82	0.9656	2.02	0.9783	2.22	0.9868	2.42	0.9922	2.62	0.9956	2.84	0.9977
1.83	0.9664	2.03	0.9788	2.23	0.9871	2.43	0.9925	2.63	0.9957	2.86	0.9979
1.84	0.9671	2.04	0.9793	2.24	0.9875	2.44	0.9927	2.64	0.9959	2.88	0.9980
1.85	0.9678	2.05	0.9798	2.25	0.9878	2.45	0.9929	2.65	0.9960	2.90	0.9981
1.86	0.9686	2.06	0.9803	2.26	0.9881	2.46	0.9931	2.66	0.9961	2.92	0.9982
1.87	0.9693	2.07	0.9808	2.27	0.9884	2.47	0.9932	2.67	0.9962	2.94	0.9984
1.88	0.9699	2.08	0.9812	2.28	0.9887	2.48	0.9934	2.68	0.9963	2.96	0.9985
1.89	0.9706	2.09	0.9817	2.29	0.9890	2.49	0.9936	2.69	0.9964	2.98	0.9986
1.90	0.9713	2.10	0.9821	2.30	0.9893	2.50	0.9938	2.70	0.9965	3.00	0.9987
1.91	0.9719	2.11	0.9826	2.31	0.9896	2.51	0.9940	2.71	0.9966	3.20	0.9993
1.92	0.9726	2.12	0.9830	2.32	0.9898	2.52	0.9941	2.72	0.9967	3.40	0.9997
1.93	0.9732	2.13	0.9834	2.33	0.9901	2.53	0.9943	2.73	0.9968	3.60	0.9998
1.94	0.9738	2.14	0.9838	2.34	0.9904	2.54	0.9945	2.74	0.9969	3.80	0.99993
1.95	0.9744	2.15	0.9842	2.35	0.9906	2.55	0.9946	2.75	0.9970	4.00	0.99997
1.96	0.9750	2.16	0.9846	2.36	0.9909	2.56	0.9948	2.76	0.9971	4.50	0.999997
1.97	0.9756	2.17	0.9850	2.37	0.9911	2.57	0.9949	2.77	0.9972	5.00	1.000000
1.98	0.9761	2.18	0.9854	2.38	0.9913	2.58	0.9951	2.78	0.9973		
1.99	0.9767	2.19	0.9857	2.39	0.9916	2.59	0.9952	2.79	0.9974		

Таблица 2: Двусторонние квантили $t_{\delta,k}$ распределения Стьюдента.
δ — уровень доверия, k — число степеней свободы.

k	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$	$\delta = 0.99$	k	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$	$\delta = 0.99$
1	6.31	12.71	63.66	18	1.73	2.10	2.88
2	2.92	4.30	9.92	19	1.73	2.09	2.86
3	2.35	3.18	5.84	20	1.72	2.09	2.85
4	2.13	2.78	4.60	25	1.71	2.06	2.79
5	2.02	2.57	4.03	30	1.70	2.04	2.75
6	1.94	2.45	3.71	35	1.69	2.03	2.72
7	1.89	2.36	3.50	40	1.68	2.02	2.70
8	1.86	2.31	3.36	50	1.68	2.01	2.68
9	1.83	2.26	3.25	60	1.67	2.00	2.66
10	1.81	2.23	3.17	70	1.67	1.99	2.65
11	1.80	2.20	3.11	80	1.66	1.99	2.64
12	1.78	2.18	3.05	90	1.66	1.99	2.63
13	1.77	2.16	3.01	100	1.66	1.98	2.63
14	1.76	2.14	2.98	120	1.66	1.98	2.62
15	1.75	2.13	2.95	140	1.66	1.98	2.61
16	1.75	2.12	2.92	160	1.65	1.97	2.61
17	1.74	2.11	2.90	∞	1.64	1.96	2.58

Таблица 3: Левые квантили $\chi^2_{p,k}$ распределения хи-квадрат.
p — вероятность, k — число степеней свободы.

	p									
k	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65
140	100.65	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84	186.85
160	117.68	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53	209.82
180	134.88	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06	232.62
200	152.24	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45	255.26
240	187.32	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89	300.18
280	222.80	227.91	235.54	242.25	250.13	310.72	320.03	328.25	337.97	344.70
320	258.59	264.10	272.34	279.56	288.04	352.82	362.72	371.45	381.78	388.91
360	294.64	300.53	309.33	317.03	326.07	394.79	405.24	414.46	425.35	432.87
400	330.90	337.16	346.48	354.64	364.21	436.65	447.63	457.31	468.72	476.61
440	367.35	373.94	383.77	392.37	402.44	478.42	489.90	500.01	511.94	520.16
480	403.95	410.87	421.19	430.20	440.75	520.11	532.08	542.60	555.01	563.56
520	440.69	447.93	458.71	468.12	479.12	561.73	574.16	585.08	597.95	606.82
560	477.55	485.10	496.32	506.11	517.56	603.29	616.16	627.47	640.78	649.96
600	514.53	522.37	534.02	544.18	556.06	644.80	658.09	669.77	683.52	692.98

Таблица 4: Левые квантили $F_p(f_1, f_2)$ распределения Фишера.
p — вероятность, f_1 — число степеней свободы большей дисперсии, f_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии.

$p = 0.995$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	12.83	5.85	5.66	5.53	5.42	5.34	5.27	5.17	5.10	5.04	5.00	4.97	4.93	4.90
12	11.75	5.09	4.91	4.77	4.67	4.59	4.53	4.43	4.36	4.31	4.26	4.23	4.19	4.17
14	11.06	4.60	4.43	4.30	4.20	4.12	4.06	3.96	3.89	3.84	3.79	3.76	3.73	3.70
16	10.58	4.27	4.10	3.97	3.87	3.80	3.73	3.64	3.57	3.51	3.47	3.44	3.40	3.37
18	10.22	4.03	3.86	3.73	3.64	3.56	3.50	3.40	3.33	3.28	3.24	3.20	3.17	3.14
20	9.94	3.85	3.68	3.55	3.46	3.38	3.32	3.22	3.15	3.10	3.06	3.02	2.99	2.96
24	9.55	3.59	3.42	3.30	3.20	3.12	3.06	2.97	2.90	2.84	2.80	2.77	2.73	2.70
28	9.28	3.41	3.25	3.12	3.03	2.95	2.89	2.79	2.72	2.67	2.63	2.59	2.56	2.53
32	9.09	3.29	3.12	3.00	2.90	2.83	2.77	2.67	2.60	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40
36	8.94	3.19	3.03	2.90	2.81	2.73	2.67	2.58	2.50	2.45	2.41	2.37	2.33	2.30
40	8.83	3.12	2.95	2.83	2.74	2.66	2.60	2.50	2.43	2.38	2.33	2.30	2.26	2.23
45	8.71	3.04	2.88	2.76	2.66	2.59	2.53	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.19	2.16
50	8.63	2.99	2.82	2.70	2.61	2.53	2.47	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.10

$p = 0.975$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	6.94	3.72	3.62	3.55	3.50	3.45	3.42	3.37	3.33	3.30	3.27	3.26	3.24	3.22
12	6.55	3.37	3.28	3.21	3.15	3.11	3.07	3.02	2.98	2.95	2.93	2.91	2.89	2.87
14	6.30	3.15	3.05	2.98	2.92	2.88	2.84	2.79	2.75	2.72	2.69	2.67	2.65	2.64
16	6.12	2.99	2.89	2.82	2.76	2.72	2.68	2.63	2.58	2.55	2.53	2.51	2.49	2.47
18	5.98	2.87	2.77	2.70	2.64	2.60	2.56	2.50	2.46	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35
20	5.87	2.77	2.68	2.60	2.55	2.50	2.46	2.41	2.37	2.33	2.31	2.29	2.27	2.25
24	5.72	2.64	2.54	2.47	2.41	2.36	2.33	2.27	2.23	2.19	2.17	2.15	2.12	2.11
28	5.61	2.55	2.45	2.37	2.32	2.27	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07	2.05	2.03	2.01
32	5.53	2.48	2.38	2.31	2.25	2.20	2.16	2.10	2.06	2.02	2.00	1.98	1.95	1.93
36	5.47	2.43	2.33	2.25	2.20	2.15	2.11	2.05	2.00	1.97	1.94	1.92	1.90	1.88
40	5.42	2.39	2.29	2.21	2.15	2.11	2.07	2.01	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85	1.83
45	5.38	2.35	2.25	2.17	2.11	2.07	2.03	1.96	1.92	1.88	1.85	1.83	1.81	1.79
50	5.34	2.32	2.22	2.14	2.08	2.03	1.99	1.93	1.89	1.85	1.82	1.80	1.77	1.75

$p = 0.95$

	f_1													
f_2	1	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	45	50
10	4.96	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77	2.74	2.71	2.69	2.67	2.66	2.65	2.64
12	4.75	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40
14	4.60	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39	2.35	2.32	2.30	2.28	2.27	2.25	2.24
16	4.49	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	2.24	2.21	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12
18	4.41	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.06	2.05	2.04
20	4.35	2.35	2.28	2.22	2.18	2.15	2.12	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.98	1.97
24	4.26	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03	1.98	1.95	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86
28	4.20	2.19	2.12	2.06	2.02	1.99	1.96	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82	1.80	1.79
32	4.15	2.14	2.07	2.01	1.97	1.94	1.91	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.74
36	4.11	2.11	2.03	1.98	1.93	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76	1.74	1.73	1.71	1.69
40	4.08	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84	1.79	1.76	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66
45	4.06	2.05	1.97	1.92	1.87	1.84	1.81	1.76	1.73	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63
50	4.03	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	1.74	1.70	1.67	1.65	1.63	1.61	1.60

Таблица 5: Таблица числовых характеристик стандартных распределений

распределение	описание	$\mathsf{M}\xi$	$\mathsf{D}\xi$
Дискретные			
$\mathrm{I}(a)$ вырожденное	$\begin{array}{c\|c}\xi & a\\ \hline \mathsf{P} & 1\end{array}$	a	0
$\mathrm{U}(n)$ равномерное	$\begin{array}{c\|ccc}\xi & x_1 & \cdots & x_n\\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{array}$	$\bar{x}$	$\overline{x^2}-(\bar{x})^2$
$\mathrm{B}(p)$ бернуллиевское	$\begin{array}{c\|cc}\xi & 0 & 1\\ \hline \mathsf{P} & 1-p & p\end{array}$	p	pq
$\mathrm{B}(n,p)$ биномиальное	$\mathsf{P}(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,\ldots,n$	np	npq
$\mathrm{G}(p)$ геометрическое	$\mathsf{P}(\xi=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$\Pi(\lambda)$ Пуассона	$\mathsf{P}(\xi=k)=\frac{\Lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=1,2,\ldots$	λ	λ
Непрерывные			
$\mathrm{U}(a,b)$ равномерное	$F_\xi(x)=\frac{x-a}{b-a},\quad x\in(a;b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{N}(a,\sigma)$ нормальное	$F_\xi(x)=\Phi(\frac{x-a}{\sigma})$	a	σ^2
$\mathrm{E}(\lambda)$ экспоненциальное	$F_\xi(x)=1-e^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Принятые обозначения:

$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n),\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}(x_1^2+\cdots+x_n^2)$,

p — вероятность «успеха» в схеме Бернулли,

$q=1-p$ — вероятность «неуспеха» в схеме Бернулли,

λ — среднее число событий за единицу времени,

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\,ds$ — функция Лапласа.

Борис Юрьевич Пичугин

Теория вероятностей и математическая статистика

Курс лекций
для студентов химических специальностей

Редактор Е. В. Коськина
Дизайн обложки З. Н. Образова

Подписано в печать ??.??.2005. Формат бумаги 60 × 84 1/16.
Печ. л. 3,88. Уч.-изд. л 3,88. Тираж 100 экз. Заказ ???.

Издательство Омского государственного университета
644077, г. Омск, пр. Мира, 55А, госуниверситет