Пичугин Борис Юрьевич

644077, Омск, пр. Мира 55А, Омский государственный университет, математический факультет, кафедра математического моделирования.

тел.: (3812) 69 61 07
e-mail: boris@pich.omsk.ru

УДК 519.2+501.574

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИКИ ИЗОЛИРОВАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ С СЕЗОННЫМ РАЗМНОЖЕНИЕМ

Б.Ю. Пичугин

Аннотация

Исследована вероятностная модель изолированной популяции, учитывающая сезонность размножения, случайность продолжительности жизни особей и эффект самолимитирования. Получены необходимые условия устойчивости, которые являются и достаточными в случае, когда гибель особей вследствие старения может осуществляться в моменты, отличные от моментов их размножения. Представлены результаты численных расчетов, демонстрирующих необходимость полученных условий.

1. Введение. Особенностью развития многих популяций является сезонный характер размножения особей. Такая особенность присуща, например, обитателям средних и высоких широт и обусловлена влиянием ряда факторов. К ним относятся длина светового дня, температура воздуха, наличие пищи и т.д. Все эти факторы опосредовано влияют на репродуктивную систему особей, определяя сроки их размножения. В частности, у подавляющего большинства млекопитающих появление потомства приурочено к наиболее благоприятному периоду — концу весны и началу лета.

Для исследования динамики популяций с сезонным размножением используется аппарат разностных уравнений, дифференциальных уравнений с разрывными траекториями и марковских случайных процессов (см., например, [1], [2], [3], [4], [5]). Динамика численности популяций может существенно различаться в стохастическом и детерминированном вариантах модели [2]. Одним из важных факторов, определяющих развитие популяции, является не только сезонность размножения и численность производимого потомства, но и продолжительность жизни особей. При отсутствии взаимодействия между особями динамика их численности может быть описана с позиций общих ветвящихся процессов. В этом случае свойства численности популяции напрямую связаны с репродуктивной функцией особей [6, ч.6]. Взаимодействие между особями может носить сложный характер и зависеть от ряда таких факторов, как возраст особей, стадия или этап их развития, масса, размер, положение в пространстве и т.д. Учет этих факторов значительно усложняет построение моделей и анализ свойств их решений. В настоящей работе рассматривается модель, в которой взаимодействие особей осуществляется по принципу самолимитирования. Самолимитирование проявляется в снижении численности особей за счет нехватки ресурсов, необходимых для их жизнедеятельности. Целью работы является построение и изучение устойчивости вероятностной модели, описывающей динамику изолированной популяции, особи которой могут давать потомство только в фиксированные моменты времени, имеют случайную продолжительность жизни и подвержены самолимитированию.

2. Описание модели. Пусть размножение особей происходит в моменты kT, $k = 1, 2, \ldots$, $T = \mathrm{const} > 0$. Положим, что каждая дожившая до момента kT особь независимо от остальных особей и предыстории развития популяции с вероятностью p_n порождает n особей нулевого возраста. В промежутках между последовательными моментами размножения численность популяции монотонно снижается под воздействием естественной смертности особей и эффекта самолимитирования. Примем, что в условиях отсутствия самолимитирования продолжительность жизни (естественная продолжительность жизни) каждой особи есть

случайная величина ℓ с функцией распределения

$$L(t) = \mathbf{P}\{\ell \geqslant t\}, \quad \tau = \sup\{t \geqslant 0 : L(t) > 0\}, \quad T \leqslant \tau < \infty,$$

где τ — максимальная продолжительность жизни. Гибель особи по истечении ее времени жизни будем называть гибелью вследствие старения или естественной гибелью.

Эффект самолимитирования без учета естественной смертности опишем процессом чистой гибели [7, с.104]. Пусть в момент времени $t \geqslant 0$ популяция насчитывает x особей и отрезок времени $[t; t+h] \subset [kT; kT+T)$ не содержит моментов естественной гибели особей. Положим, что независимо от предшествующих событий вероятность гибели одной, наудачу выбранной, особи вследствие самолимитирования за время $[t; t+h]$ равна $\lambda(x)h + o(h)$; вероятность гибели двух и более особей равна $o(h)$; вероятность отсутствия изменений равна $1-\lambda(x)h+o(h)$. Предполагается, что функция $\lambda(x)$ определена на множестве неотрицательных целых чисел, тождественно не равна нулю, не убывает с ростом x и $\lambda(0) = 0$. Функцию $\lambda(x)$ будем называть интенсивностью самолимитирования.

3. Конструкция случайного процесса. Используя приведенную выше формализацию модели, можно определить случайный процесс x_t, где x_t— это численность популяции в момент $t \geqslant 0$. Такое описание модели является недостаточным, так как x_t не содержит информации о возрастной структуре популяции. Кроме того, x_t обладает последействием. Поэтому применим более удобную для анализа конструкцию. Будем рассматривать марковский случайный процесс, определенный в пространстве точечных распределений [8, с.81].

Пусть $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра на $[0; \infty)$ и функция $L(\cdot)$ $\mathfrak{B}$-измерима. Обозначим $\mathcal{M}$ — множество всех конечных мер на $([0; \infty), \mathfrak{B})$, принимающих только целые значения и равных нулю на множестве $\{t : L(t) = 0\} \in \mathfrak{B}$. Функция $L(\cdot)$ не убывает и неотрицательна, поэтому $\{t : L(t) = 0\} = (\tau; \infty)$, если $L(\tau) > 0$, и $\{t : L(t) = 0\} = [\tau; \infty)$ в противном случае. Через $\mathfrak{F}$ обозначим σ-алгебру цилиндрических множеств в $\mathcal{M}$ [8, с.88], то есть наименьшую σ-алгебру на $\mathcal{M}$, содержащую множества вида

$$\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(G_1) = r_1, \ldots, \mu(G_m) = r_m\},$$
$$m = 1, 2, \ldots, \quad G_i \in \mathfrak{B}, \quad \bigcup_{i=1}^{m} G_i = [0; \infty), \quad G_i G_j = \emptyset, \ i \neq j,$$
$$r_i = 0, 1, \ldots, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Каждой мере $\mu \in \mathcal{M}$ поставим в соответствие неотрицательную и целочисленную функцию $\mu(t) = \mu([t; \infty))$. Меру одноточечного множества будем обозначать $\mu(\{t\})$, поэтому функцию $\mu(\cdot)$ можно будет отличить от меры $\mu(\cdot)$ по виду аргумента в скобках. Функция $\mu(t)$ не возрастает, ограничена, непрерывна слева, равна нулю на промежутке $\{t : L(t) = 0\}$, кусочно постоянна (так как принимает только целые значения) и имеет не более чем $\mu(0)$ точек разрыва. Для любого $t \geqslant 0$ можно записать $\mu(\{t\}) = \mu(t+0) - \mu(t)$, следовательно, существует не более $\mu(0)$ точек t таких, что $t \geqslant 0$ и $\mu(\{t\}) > 0$.

Обозначим через ϵ^t, $t \geqslant 0$, элементарную меру, определенную соотношением

$$\epsilon^t(G) = \chi_G(t), \quad G \in \mathfrak{B},$$

где $\chi_G(\cdot)$ — характеристическая функция множества G.

Если $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, то $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{F}$-измеримое отображение $\mu : \Omega \mapsto \mathcal{M}$ будем называть случайной конечной целочисленной мерой или просто случайной мерой [8, с.83], [9, с.393].

Опишем динамику популяции на промежутках времени между последовательными моментами размножения. Рассмотрим скачкообразный марковский случайный процесс μ_t, $t \geqslant 0$, в фазовом пространстве $\mathcal{M}$. Значение $\mu_t(G)$ для любого $G \in \mathfrak{B}$ будем интерпретировать как число особей, момент естественной гибели которых принадлежит множеству G, при этом учитываются только те особи, которые существовали в момент $t = 0$ и не погибли вследствие самолимитирования на отрезке времени $[0; t]$. Тогда $\mu_t(t)$ равно численности популяции в момент $t \geqslant 0$, а разность $\mu_{t_1}(0) - \mu_{t_2}(0)$, $0 \leqslant t_1 < t_2$, равна количеству особей, погибших вследствие самолимитирования за время $(t_1; t_2]$. Случайный процесс μ_t меняет свое состояние только в моменты гибели особей вследствие самолимитирования. Пусть в момент $t \geqslant 0$ процесс μ_t находится в состоянии $\mu \in \mathcal{M}$. Обозначим $\theta(t, \mu)$ момент первой смены состояния, считая от момента t. Используя описание эффекта самолимитирования, можно показать, что распределение случайной величины $\theta(t, \mu)$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\theta(t,\mu) \geqslant s\} = e^{-\int\limits_t^s \lambda(\mu(u))du}, \quad s \geqslant t. \tag{1}$$

В момент $s = \theta(t, \mu)$ осуществляется скачок и μ_t меняет свое состояние в соответствии с распределением

$$\mathbf{P}\{\mu_s = \mu - \epsilon^u \mid \mu_t = \mu,\ \theta(t,\mu) = s\} = \tfrac{\mu(\{u\})}{\mu(s)}, \quad u \geqslant s, \quad \mu(\{u\}) > 0. \tag{2}$$

Существует лишь конечное число точек u, для которых $\mu(\{u\}) > 0$, поэтому распределение (2) дискретно. Для всех $u \geqslant s$ таких, что $\mu(\{u\}) > 0$, разность $\mu - \epsilon^u$ является зарядом и на любом множестве $G \in \mathfrak{B}$ принимает неотрицательное целое значение, следовательно, $\mu - \epsilon^u \in \mathcal{M}$.

Перейдем к описанию процесса размножения особей. Потомство одной особи задает случайная мера $\eta = \epsilon^{\ell_1} + \cdots + \epsilon^{\ell_\xi}$, где ξ — дискретная случайная величина с распределением $\mathbf{P}\{\xi = n\} = p_n$, $n = 0, 1, \ldots$, равная числу потомков, а $\ell_1, \ldots, \ell_\xi$ — независимые случайные величины с функцией распределения $L(\cdot)$, определяющие естественную продолжительность жизни каждого потомка.

Введем оператор сдвига H^t, $t \geqslant 0$, отображающий $\mathcal{M}$ на себя, по формуле

$$\mathrm{H}^t\mu(G) = \mu(G + t), \quad G \in \mathfrak{B}, \quad G + t = \{u : u - t \in G\} \in \mathfrak{B}.$$

По построению оператор H^t $\mathfrak{F}$-измерим для любого $t \geqslant 0$. Используя случайный процесс μ_t, случайную меру η и оператор сдвига H^T, определим последовательность случайных мер $\zeta_k \in \mathcal{M}$, $k = 0, 1, \ldots$, описывающих состояние популяции в моменты kT, следующим образом:

$$\begin{gathered} \zeta_0 = \zeta \in \mathcal{M}, \\ \zeta_k = \zeta_k^\circ + \eta_k^1 + \cdots + \eta_k^{\zeta_k^\circ(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ \mathbf{P}\{\zeta_k^\circ \in U \mid \zeta_{k-1}\} = \mathbf{P}\{\mathrm{H}^T\mu_T \in U \mid \mu_0 = \zeta_{k-1}\}, \quad U \in \mathfrak{F}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ \{\eta_k^n\}_{n,\,k=1}^{\infty} - i.i.d., \quad \eta_1^1 \stackrel{d}{=} \eta, \end{gathered} \tag{3}$$

где равенство между случайными мерами понимается как равенство почти наверное (п.н.), а символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению. Последовательность

ζ_k будет цепью Маркова. Для каждого $G \in \mathfrak{B}$ значение меры ζ_k на множестве G равно числу особей, существующих в момент kT и оставшаяся продолжительность жизни которых (в условиях отсутствия самолимитирования) принадлежит множеству G. Поэтому численность популяции в момент kT равна $\zeta_k(0)$. Мера ζ_k° описывает состояние популяции непосредственно перед моментом репродукции kT, поэтому $\zeta_k^\circ(0)$ есть число особей, доживших до момента kT.

4. Неустойчивость. Следуя [2], последовательность случайных мер $\zeta_k \in \mathcal{M}$, $k = 0, 1, \ldots$ назовем неустойчивой, если для любого натурального x

$$\mathbf{P}\{\zeta_k(0) = x \text{ для бесконечно большого числа значений } k\} = 0.$$

Для неустойчивой случайной последовательности $\zeta_k \in \mathcal{M}$, $k = 0, 1, \ldots$, очевидно выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_k(0) \to \infty \text{ при } k \to \infty\} + \mathbf{P}\{\zeta_k(0) \to 0 \text{ при } k \to \infty\} = 1.$$

В качестве основного инструмента при доказательстве неустойчивости будем применять следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть ζ_k, $k = 0, 1, \ldots$, — цепь Маркова, определенная в пространстве состояний $\mathcal{M}$, $Z \in \mathfrak{F}$ — поглощающее множество для цепи ζ_k, и множество $M \in \mathfrak{F}$ таково, что $M \cap Z = \emptyset$. Тогда, если существуют натуральное r и положительное q такие, что для любой меры $\mu \in M$ выполнено неравенство*

$$Q(r, Z, \mu) = \mathbf{P}\{\zeta_r \in Z \mid \zeta_0 = \mu\} \geqslant q,$$

то $\mathbf{P}\{\zeta_k \in M$ для бесконечно большого числа значений $k\} = 0$.

Доказательство. Зафиксируем r и q. Введем события

$$A_m = \{\zeta_k \in M \text{ для бесконечно большого числа значений } k \geqslant m\}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

$$B_m = \{\zeta_k \notin M,\ r \leqslant k < m,\ \zeta_m \in M\}, \quad m = r, r+1, \ldots.$$

Все события A_m равны между собой, так как наступление одного из них влечет наступление остальных. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_k \in M \text{ для бесконечно большого числа значений } k\} = \mathbf{P}\{A_0\} = \mathbf{P}\{A_r\}. \quad (4)$$

Обозначим $R(r, M, \mu) = \sum\limits_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\} = \mathbf{P}\{\exists k \geqslant r\ \zeta_k \in M \mid \zeta_0 = \mu\}$. Так как Z — поглощающее множество и $Z \cap M = \emptyset$, то для любой меры $\mu \in M$

$$R(r, M, \mu) \leqslant 1 - Q(r, Z, \mu) \leqslant 1 - q < 1.$$

Покажем, что $p(\mu) = \mathbf{P}\{A_r \mid \zeta_0 = \mu\} \leqslant (1-q)^n$ для всех $\mu \in M$ и $n = 1, 2, \ldots$. Доказательство проведем индукцией по n. База индукции очевидна: $p(\mu) = \mathbf{P}\{A_r \mid \zeta_0 = \mu\} \leqslant R(r, M, \mu) \leqslant 1 - q$. Предположим $p(\mu) \leqslant (1-q)^n$, $\mu \in M$. По определению, событие A_r можно разложить в сумму несовместных событий $A_r = \sum\limits_{m=r}^{\infty} B_m A_{m+1}$. Следовательно,

$$p(\mu) = \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m A_{m+1} \mid \zeta_0 = \mu\}$$

$$= \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\}\, \mathbf{MP}\{A_{m+1} \mid \zeta_0 = \mu, B_m, \zeta_m\}$$

$$= \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{P}\{A_{m+1} \mid \zeta_m = \nu\}\, \mathbf{P}\{\zeta_m \in d\nu \mid \zeta_0 = \mu, B_m\}$$

$$= \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\} \int_{M} p(\nu)\, \mathbf{P}\{\zeta_m \in d\nu \mid \zeta_0 = \mu, B_m\}$$

$$\leqslant (1-q)^n \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\}\, \mathbf{P}\{\zeta_m \in M \mid \zeta_0 = \mu, B_m\}$$

$$= (1-q)^n \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_0 = \mu\} = (1-q)^n R(r, M, \mu) \leqslant (1-q)^{n+1}.$$

Поскольку $q > 0$, то $p(\mu) \leqslant (1-q)^n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $p(\mu) = 0$ для всех $\mu \in M$ и

$$\mathbf{P}\{A_r\} = \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{MP}\{B_m A_{m+1} \mid \zeta_m\} = \sum_{m=r}^{\infty} \int_M p(\mu)\, \mathbf{P}\{B_m \mid \zeta_m = \mu\}\, \mathbf{P}\{\zeta_m \in d\mu\} = 0.$$

Полученное равенство в совокупности с (4) завершает доказательство.

Исследуем на устойчивость цепь Маркова ζ_k, определенную формулами (3). Зададим уровень $x^* = \max\{x \in \mathbb{Z}_+ : \lambda(x) = 0\}$ как наибольшую возможную численность популяции, при которой не проявляется эффект самолимитирования. Так как $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(x) \not\equiv 0$, то $0 \leqslant x^* < \infty$.

Лемма 2. *Пусть $0 \leqslant t < s \leqslant T$ — произвольные моменты времени, $G \subset [s; \infty)$, $G \in \mathfrak{B}$, и мера $\mu \in \mathcal{M}$ такова, что $\mu(s) \geqslant x^*$ и $\mu(G) \geqslant y^*$, где $0 \leqslant y^* \leqslant x^*$ — некоторое целое число. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\mu_s(s) = x^*,\ \mu_s(G) \geqslant y^* \mid \mu_t = \mu\} \geqslant \tfrac{x^*!}{x!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{s-t}{x-x^*}\big)^{x-x^*} e^{-\lambda(x)(s-t)},$$

если $x > x^*$, и $\mathbf{P}\{\mu_s(s) = x^*,\ \mu_s(G) \geqslant y^* \mid \mu_t = \mu\} = 1$, если $x = x^*$, где $x = \mu(t)$, а случайный процесс μ_t описывается формулами (1), (2).

Доказательство. Если $\mu(s) = x^*$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_s(s) = x^*,\ \mu_s(G) \geqslant y^* \mid \mu_t = \mu\}$$

$$\geqslant \mathbf{P}\{\mu_s = \mu \mid \mu_t = \mu\} = e^{-\int_t^s \lambda(\mu(u))du} \geqslant e^{-\lambda(x)(s-t)}$$

и лемма верна. Пусть $\mu(s) > x^*$. Обозначим $y = \mu(s) > x^*$, $z = y - x^* > 0$ и определим последовательность мер $\nu_0, \ldots, \nu_z \in \mathcal{M}$ при помощи рекуррентных соотношений

$$\nu_0 = \mu, \quad \nu_{i+1} = \nu_i - \epsilon^{t_i}, \quad i = 0, \ldots, z-1,$$

где t_i выбирается так, что $t_i \geqslant s$, $\nu_i(\{t_i\}) > 0$ и $\nu_{i+1}(G) \geqslant y^*$. Для меры ν_z можно записать $\nu_z(s) = \mu(s) - \epsilon^{t_0}(s) - \cdots - \epsilon^{t_{z-1}}(s) = y - z = x^*$ и $\nu_z(G) \geqslant y^*$, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_s(s) = x^*,\ \mu_s(G) \geqslant y^* \mid \mu_t = \mu\} \geqslant \mathbf{P}\{\mu_s = \nu_z \mid \mu_t = \mu\}.$$

Разобьем полуинтервал $[t;s)$ на z равных частей: $u_i = t + i\,\delta$, $\delta = (s-t)/z$, $i = 0, \ldots, z$, и оценим

$$\mathbf{P}\{\mu_s = \nu_z \mid \mu_t = \mu\}$$
$$\geqslant \mathbf{P}\{\mu_{u_1} = \nu_1, \ldots, \mu_{u_z} = \nu_z \mid \mu_t = \mu\} = \prod_{i=0}^{z-1} \mathbf{P}\{\mu_{u_{i+1}} = \nu_{i+1} \mid \mu_{u_i} = \nu_i\}.$$

Каждый из сомножителей полученного произведения рассмотрим отдельно. Для краткости введем случайные величины $\theta_{i1} \stackrel{d}{=} \theta(u_i, \nu_i)$ и $\theta_{i2} \stackrel{d}{=} \theta(\theta_{i1}, \nu_{i+1})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\mu_{u_{i+1}} = \nu_{i+1} \mid \mu_{u_i} = \nu_i\} &= \mathbf{P}\{\theta_{i1} \leqslant u_{i+1},\ \mu_{\theta_{i1}} = \nu_{i+1},\ \theta_{i2} > u_{i+1} \mid \mu_{u_i} = \nu_i\} \\ &= \mathbf{MP}\{\theta_{i1} \leqslant u_{i+1},\ \mu_{\theta_{i1}} = \nu_{i+1},\ \theta_{i2} > u_{i+1} \mid \mu_{u_i} = \nu_i,\ \theta_{i1}\} \\ &= \int_{u_i}^{u_{i+1}} \tfrac{\nu_i(\{t_i\})}{\nu_i(v)}\, e^{-\int_v^{u_{i+1}} \lambda(\nu_{i+1}(u))du} \lambda(\nu_i(v))\, e^{-\int_{u_i}^{v} \lambda(\nu_i(u))du}\, dv. \quad (5)\end{aligned}$$

В силу выбора последовательности ν_i для $i = 0, \ldots, z$ справедливы неравенства

$$x \geqslant x - i = \nu_i(t) \geqslant \nu_i(v) \geqslant \nu_i(s) = y - i \geqslant x^* + 1, \quad v \in [t, s]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая монотонность функции $\lambda(\cdot)$, приходим к

$$\mathbf{P}\{\mu_{u_{i+1}} = \nu_{i+1} \mid \mu_{u_i} = \nu_i\} \geqslant \tfrac{1}{x-i}\lambda(x^*+1)\tfrac{s-t}{z}\, e^{-\lambda(x)\frac{s-t}{z}},$$

откуда получаем требуемое неравенство

$$\mathbf{P}\{\mu_s = \nu_z \mid \mu_t = \mu\}$$
$$\geqslant \tfrac{(x-z)!}{x!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{s-t}{z}\, e^{-\lambda(x)\frac{s-t}{z}}\big)^z \geqslant \tfrac{x^*!}{x!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{s-t}{x-x^*}\big)^{x-x^*} e^{-\lambda(x)(s-t)}.$$

Лемма 3. *Пусть κ, n — натуральные числа, $G \subset [0;T)$, $G \in \mathfrak{B}$, $\mu \in \mathcal{M}$, и последовательности y_k, z_k°, z_k неотрицательных целых чисел удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\begin{gathered} y_0 = 0,\ \ldots,\ y_\kappa = 0, \quad z_0 = \mu(0), \\ z_k^\circ = \mu(kT) + y_k + \cdots + y_{k+\kappa-1}, \quad y_{k+\kappa} = n\, z_k^\circ, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ z_k = z_k^\circ + y_{k+\kappa}, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \quad (7)$$

Тогда для любого $r = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r, \mu, G, \kappa, n) \mid \zeta_0 = \mu\} \geqslant \prod_{m=1}^{r} e^{-\lambda(z_{m-1})T}\big(p_n \rho^n\big)^{z_m^\circ}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U(r, \mu, G, \kappa, n) = \{\nu \in \mathcal{M} : \nu = \mathrm{H}^{rT}\mu + \nu_\circ, \quad \nu_\circ(0) = y_r + \cdots + y_{r+\kappa}, \\ \nu_\circ(G + kT) = y_{r+k},\ k = 0, \ldots, \kappa\} \in \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

где $\rho = \mathbf{P}\{\epsilon^\ell(G + \kappa T) = 1\} = \mathbf{P}\{\ell \in G + \kappa T\}$, а ℓ — случайная величина с функцией распределения $L(\cdot)$; при $r = 0$ правая часть (8) *принимается равной* 1.

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по r. Очевидно, что выполнено включение $\mu \in U(0,\mu,G,\kappa,n)$, следовательно, справедлива база индукции

$$\mathbf{P}\{\zeta_0 \in U(0,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_0 = \mu\} = 1.$$

Предположим, что неравенство (8) справедливо для $r-1$, $r = 1,2,\ldots$. Докажем (8) для r. Имеем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_0 = \mu\} \\
&\quad \geqslant \mathbf{MP}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n),\ \zeta_{r-1} \in U(r-1,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_0 = \mu,\ \zeta_{r-1}\} \\
&\quad = \int_{U(r-1,\mu,G,\kappa,n)} \mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_{r-1} = \nu\}\, \mathbf{P}\{\zeta_{r-1} \in d\nu \mid \zeta_0 = \mu\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Оценим выражение, стоящее под знаком интеграла. Пусть $\nu \in U(r-1,\mu,G,\kappa,n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\nu(0) &= \mathrm{H}^{(r-1)T}\mu(0) + \nu_\circ(0) = \mu((r-1)T) + y_{r-1} + \cdots + y_{r+\kappa-1} = z_{r-1}, \\
\nu(T) &= \mathrm{H}^{(r-1)T}\mu(T) + \nu_\circ(T) = \mu(rT) + y_r + \cdots + y_{r+\kappa-1} = z_r^\circ.
\end{aligned}$$

Если $\zeta_{r-1} = \nu$ и на протяжении отрезка времени $[(r-1)T; rT]$ ни одна особь не погибнет вследствие самолимитирования, то п.н. будет выполнено равенство $\zeta_r^\circ = \mathrm{H}^T\nu$, а в момент rT в репродукции будут участвовать $\zeta_r^\circ(0) = \nu(T) = z_r^\circ$ особей. Если при этом каждая особь произведет ровно n потомков, причем естественная продолжительность жизни каждого потомка будет принадлежать множеству $G + \kappa T$, то всего появится $nz_r^\circ = y_{r+\kappa}$ потомков и п.н. будут выполнены равенства

$$\eta_r^1(0) = \eta_r^1(G+\kappa T) = n,\ \ldots,\ \eta_r^{z_r^\circ}(0) = \eta_r^{z_r^\circ}(G+\kappa T) = n,$$

$$\zeta_r = \mathrm{H}^T\nu + \eta_r^1 + \cdots + \eta_r^{z_r^\circ} \in U(r,\mu,G,\kappa,n).$$

Вероятность того, что в момент репродукции отдельно взятая особь произведет ровно n потомков, естественная продолжительность жизни которых будут принадлежать множеству $G + \kappa T$, равна $\mathbf{P}\{\eta(0) = \eta(G+\kappa T) = n\} = p_n\,\rho^n$. Значит,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_{r-1} = \nu\} \\
&\qquad \geqslant \mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n),\ \theta(0,\nu) > T \mid \zeta_{r-1} = \nu\} \\
&\qquad = e^{-\int_0^T \lambda(\nu(u))du}\mathbf{P}\{\zeta_r \in U(r,\mu,G,\kappa,n) \mid \zeta_{r-1} = \nu,\ \theta(0,\nu) > T\} \\
&\geqslant e^{-\lambda(\nu(0))T}\mathbf{P}\{\eta_r^k(0) = \eta_r^k(G+\kappa T) = n,\ k = 1,\ldots,\zeta_r^\circ(0) \mid \zeta_{r-1} = \nu,\ \theta(0,\nu) > T\} \\
&= e^{-\lambda(z_{r-1})T}\mathbf{P}\{\eta_r^k(0) = \eta_r^k(G+\kappa T) = n,\ k = 1,\ldots,z_r^\circ\} = e^{-\lambda(z_{r-1})T}\big(p_n\,\rho^n\big)^{z_r^\circ}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и используя предположение индукции, завершаем доказательство леммы.

Для удобства дальнейшего изложения функцию распределения $L(t)$ будем называть T-решетчатой, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(L(kT+0) - L(kT+T-0)) = 0$. T-решетчатая функция распределения определяет дискретную случайную величину, все возможные значения которой кратны T.

Перейдем к формулировке основных результатов относительно неустойчивости ζ_k. Если считать, что при отсутствии самолимитирования продолжительность жизни каждой особи постоянна и равна T, то для неустойчивости процесса достаточно выполнение любого из неравенств $\lambda(1) > 0$ или $p_0 > 0$ [2]. Если естественная продолжительность жизни особей имеет произвольное распределение, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий*
(a) $\lambda(1) > 0$ $(x^* = 0)$*;*
(b) $p_0 > 0$ *или* $L(T) < 1$*;*
(c) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $p_1 < 1$*;*
(d) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $\lambda(2) > 0$ $(x^* \leqslant 1)$*;*
(e) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $L(2T) > 0$ $(\tau \geqslant 2T)$.
Тогда цепь Маркова ζ_k*, определенная формулами* (3)*, неустойчива.*

Доказательство. Обозначим $M_x = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(0) = x\}$, $x = 0, 1, \ldots$. Множество M_0 состоит всего из одной тождественно нулевой меры, следовательно, является поглощающим для цепи ζ_k. Поэтому, согласно лемме 1, для любого натурального x необходимо указать такие номер r_x и положительное число q_x, что неравенство $Q(r_x, M_0, \mu) \geqslant q_x$ будет выполняться при всех $\mu \in M_x$. Зафиксируем натуральное x и меру $\mu \in M_x$. Если $\mu(T) = 0$, то до момента T первой репродукции не доживет ни одна особь и, следовательно,

$$1 \geqslant Q(1, M_0, \mu) = \mathbf{P}\{\zeta_1 = 0 \mid \zeta_0 = \mu\} \\ \geqslant \mathbf{P}\{\zeta_1^\circ = 0 \mid \zeta_0 = \mu\} = \mathbf{P}\{\mathrm{H}^T \mu_T = 0 \mid \mu_0 = \mu\} = 1.$$

Значит, неравенство $Q(r, M_0, \mu) \geqslant q_x$ будет выполнено для любого натурального r и любого $q_x \in (0; 1]$. Поэтому выберем меру $\mu \in M_x$ так, что $\mu(T) \geqslant 1$.

Пусть выполнено условие (a), тогда $x^* = 0$. Выбрав $y^* = 0$ и применив лемму 2, получаем

$$Q(1, M_0, \mu) \geqslant \mathbf{P}\{\mu_T(T) = 0 \mid \mu_0 = \mu\} \geqslant \tfrac{1}{x!}\big(\lambda(1)\tfrac{T}{x}\big)^x e^{-\lambda(x)\,T} = q_x > 0.$$

Предположим, выполнено (b). Любая особь может давать потомство не более чем $\bar\tau = \max\{k \in \mathbb{N} : L(kT) > 0\} \leqslant \tau$ раз. Значит, если ни одна из особей, рожденных в моменты T, $2\,T$, $\ldots$, $\bar\tau\,T$, не доживет до момента своей первой репродукции $(\eta_k^i(T) = 0,\ k = 1, \ldots, \bar\tau,\ i = 1, \ldots, \zeta_k^\circ(0))$ и, следовательно, не даст ни одного потомка за всю свою жизнь, то численность особей будет монотонно снижаться и популяция п.н. выродится к моменту τ. При таком условии для всех $k = 1, \ldots, \bar\tau$ будет п.н. выполнено неравенство $\zeta_k^\circ(0) \leqslant x$ и, полагая $r_x = \bar\tau + 1$, получаем

$$Q(r_x, M_0, \mu) = \mathbf{P}\{\zeta_{\bar\tau+1} = 0 \mid \zeta_0 = \mu\} \\ \geqslant \mathbf{P}\{\eta_k^i(T) = 0,\ k = 1, \ldots, \bar\tau,\ i = 1, \ldots, x \mid \zeta_0 = \mu\} \\ \geqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n (1 - L(T))^n\right)^{\bar\tau x} = q_x > 0.$$

Далее будем считать, что $\lambda(1) = 0$ $(x^* \geqslant 1)$, $p_0 = 0$, $L(T) = 1$, и функция $L(\cdot)$ не является T-решетчатой. Тогда существуют $n, \kappa \in \mathbb{N}$ и $h \in (0; T)$ такие, что

$p_n > 0$ и $L(\kappa T + h) - L(\kappa T + T) = \rho > 0$. Причем, если выполнено условие (c), то будем считать, что $n \geqslant 2$.

Рассмотрим последовательности y_k, z_k°, z_k, построенные по формулам (7) с использованием указанных κ, n и меры μ. Из (7) и неравенства $\mu(T) \geqslant 1$, следует, что

$$n^k \leqslant y_{\kappa+k}, \quad z_k^\circ \leqslant x(n+1)^{k-1}, \quad z_k \leqslant z_{k+1}^\circ \leqslant x(n+1)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

а при $\kappa \geqslant 2$ также справедливы неравенства

$$a_k \leqslant y_{\kappa+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ — последовательность Фибоначчи. Верхнюю оценку для z_k° обозначим через $\hat{z}_k = x(n+1)^{k-1}$.

Если верно условие (c), то положим $r_x = \lceil \log_n x^* \rceil + 1$, где $\lceil \cdot \rceil$ — округление до ближайшего целого справа. Если (c) не верно, но выполнено (d), то примем $r_x = \kappa + 2$. А если условия (c) и (d) не выполнены, но справедливо условие (e) и $\kappa \geqslant 2$, то в качестве r_x возьмем такой номер, что $a_{r_x-1} \geqslant x^*$. Во всех трех случаях $x^* \leqslant y_{r_x-1}$.

Пусть $\nu \in U(r_x - 1, \mu, [h; T), \kappa, n)$. Тогда $\nu(0) = z_{r_x-1} \leqslant \hat{z}_{r_x}$ и $\nu([h; T)) \geqslant y_{r_x-1} \geqslant x^*$. Следовательно, в силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_{r_x-1} = \nu\} &\geqslant \mathbf{P}\{\mu_T(T) = 0 \mid \mu_0 = \nu\} \\
&\geqslant \mathbf{P}\{\mu_h(h) = x^*,\ \mu_h([h; T)) \geqslant x^* \mid \mu_0 = \nu\} \\
&\geqslant \tfrac{x^*!}{\nu(0)!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{h}{\nu(0)-x^*}\big)^{\nu(0)-x^*} e^{-\lambda(\nu(0))\,h} \\
&\geqslant \tfrac{x^*!}{\hat{z}_{r_x}!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{h}{\hat{z}_{r_x}-x^*}\big)^{\hat{z}_{r_x}-x^*} e^{-\lambda(\hat{z}_{r_x})\,h} = q'_x > 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Второе неравенство в цепочке справедливо потому, что из соотношений $\mu_h(h) = x^*$, $\mu_h([h; T)) \geqslant x^*$ следует $0 \leqslant \mu_h(T) = \mu_h(h) - \mu_h([h; T)) \leqslant 0$, откуда $\mu_T(T) = \mu_h(T) = 0$. Используя оценку (13) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
Q(r_x, M_0, \mu) &= \mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_0 = \mu\} \\
&\geqslant \mathbf{MP}\{\zeta_{r_x} = 0,\ \zeta_{r_x-1} \in U(r_x - 1, \mu, [h; T), \kappa, n) \mid \zeta_0 = \mu,\ \zeta_{r_x-1}\} \\
&= \int_{U(r_x-1,\mu,[h;T),\kappa,n)} \mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_{r_x-1} = \nu\}\, \mathbf{P}\{\zeta_{r_x-1} \in d\nu \mid \zeta_0 = \mu\} \\
&\qquad \geqslant q'_x\, \mathbf{P}\{\zeta_{r_x-1} \in U(r_x - 1, \mu, [h; T), \kappa, n) \mid \zeta_0 = \mu\} \\
&\geqslant q'_x \prod_{m=1}^{r_x-1} e^{-\lambda(z_{m-1})T}\big(p_n\rho^n\big)^{z_m^\circ} \geqslant q'_x \prod_{m=1}^{r_x-1} e^{-\lambda(\hat{z}_m)T}\big(p_n\rho^n\big)^{\hat{z}_m} = q_x > 0.
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что выполнено условие (e) и $\kappa = 1$. Используя $\bar{\tau}$ вместо κ, построим по формулам (7) последовательности $\bar{y}_k$, $\bar{z}_k^\circ$, $\bar{z}_k$. Для последовательностей $\bar{y}_k$, $\bar{z}_k^\circ$ и $\bar{z}_k$ также будут справедливы оценки (11) и (12), а так как $\bar{\tau} \geqslant 2$, то найдется $r_x \geqslant 2$ такое, что $x^*/n \leqslant \bar{y}_{r_x-1}$. Для каждой меры $\nu \in U(r_x - 2, \mu, [0; T), \bar{\tau}, n)$ можно записать

$$\nu(0) = \bar{z}_{r_x-2} \leqslant \hat{z}_{r_x-1},$$

$$x^*/n \leqslant \bar{y}_{r_x-1} \leqslant \nu([T; 2T)) \leqslant \nu(T) = \bar{z}_{r_x-1}^\circ \leqslant \hat{z}_{r_x-1}.$$

Для всех $\upsilon \in U(1,\nu,[h,T),\kappa,n)$ верно $\upsilon([h,T)) \geqslant n\nu(T) \geqslant x^*$, $\upsilon(0) \leqslant \nu(T) + n\nu(T) \leqslant \hat{z}_{r_x}$. Поэтому для υ справедлива оценка (13) $\mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_{r_x-1} = \upsilon\} \geqslant q'_x > 0$. Далее, используя лемму 3,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_{r_x-2} = \nu\} &\geqslant \mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0,\ \zeta_{r_x-1} \in U(1,\nu,[h,T),\kappa,n) \mid \zeta_{r_x-2} = \nu\} \\ &\geqslant q'_x\, \mathbf{P}\{\zeta_{r_x-1} \in U(1,\nu,[h,T),\kappa,n) \mid \zeta_{r_x-2} = \nu\} \\ &\geqslant q'_x\, e^{-\lambda(\nu(0))T}\left(p_n\rho^n\right)^{\nu(T)} \geqslant q'_x\, e^{-\lambda(\hat{z}_{r_x-1})T}\left(p_n\rho^n\right)^{\hat{z}_{r_x-1}} = q''_x > 0.\end{aligned}$$

Обозначим $\bar{\rho} = L(\bar{\tau}T) > 0$, и, повторно применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}Q(r_x, M_0, \mu) &= \mathbf{P}\{\zeta_{r_x} = 0 \mid \zeta_0 = \mu\} \\ &\geqslant q''_x\, \mathbf{P}\{\zeta_{r_x-2} \in U(r_x-2,\mu,[0,T),\bar{\tau},n) \mid \zeta_0 = \mu\} \\ &\geqslant q''_x \prod_{m=1}^{r_x-2} e^{-\lambda(\bar{z}_{m-1})T}\left(p_n\bar{\rho}^n\right)^{\bar{z}^\circ_m} \geqslant q''_x \prod_{m=1}^{r_x-2} e^{-\lambda(\hat{z}_m)T}\left(p_n\bar{\rho}^n\right)^{\hat{z}_m} = q_x > 0.\end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что если функция распределения $L(\cdot)$ не является T-решетчатой, например, если она непрерывна, то для устойчивости ζ_k необходимо выполнение равенств $p_1 = 1$, $\lambda(2) = 0$ ($x^* \geqslant 2$), $L(T) = 1$ и $L(2T) = 0$. В этом случае справедлива следующая

Теорема 2. *Если функция $L(\cdot)$ не является T-решетчатой, $p_1 = 1$, $\lambda(2) = 0$, $L(T) = 1$ и $L(2T) = 0$, то для цепи Маркова ζ_k, определенной формулами* (3)*, справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\zeta_k(0) \to \infty \text{ при } k \to \infty\} + \sum_{y=0}^{[x^*/2]} \mathbf{P}\{\zeta_k(0) = 2y, \text{ начиная с некоторого } k\} = 1, \tag{14}$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть.

Доказательство. Так как $L(2T) = 0$, то $\mu(2T) = 0$ для всех $\mu \in \mathcal{M}$. Поэтому $\zeta^\circ_k(T) = 0$ п.н. для всех $k = 1, 2, \ldots$. В силу равенства $L(T) = 1$ имеем, что естественная продолжительность жизни каждой особи п.н. будет не меньше T. Из $p_1 = 1$ вытекает, что в каждый момент репродукции число $\zeta_k([T;2T))$ появившихся особей п.н. будет равно числу $\zeta_k([0;T))$ особей, доживших до этого момента. Следовательно,

$$\zeta_k \in \mathcal{V} = \bigcup_{y=0}^{\infty} V_y,$$

$$V_y = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu([0;T)) = \mu([T;2T)) = y\} \subset M_{2y}, \quad y = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\mathbf{P}\{\zeta_k(0) = 2y+1 \text{ для некоторого } k \geqslant 1\} = 0, \quad y = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\zeta_0 \in \mathcal{V}$.

Пусть $0 \leqslant y \leqslant x^*/2$ и $\zeta_0 = \mu \in V_y$. Тогда $\zeta_0(0) = 2y \leqslant x^*$. Следовательно, на промежутке времени $[0;T)$ не будет проявляться эффект самолимитирования, откуда п.н. $\zeta^\circ_1 = \mathrm{H}^T\mu$ и $\zeta_1([0;T)) = \zeta_1([T;2T)) = \mu([T;2T)) = y$. Значит, $\zeta_1 \in V_y$. По индукции получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_k \in V_y,\ k = 1, 2, \ldots \mid \zeta_0 = \mu\} = 1, \quad \mu \in V_y,$$

то есть V_y является поглощающим множеством при $0 \leqslant y \leqslant x^*/2$. Докажем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_k \in V_y \text{ для бесконечно большого числа значений } k\} = 0, \quad \text{если } y > x^*/2. \tag{16}$$

Предположим $\zeta_0 = \mu \in V_y$, где $y > x^*/2$. Функция $L(\cdot)$ не является T-решетчатой, следовательно, существует $h \in (0;T)$ такое, что $L(T+h) - L(2T) = \rho > 0$. Применяя лемму 3, имеем

$$\mathbf{P}\{\zeta_2 \in U(2,\mu,[h;T),1,1) \mid \zeta_0 = \mu\} \geqslant e^{-2\lambda(2y)T}\rho^{2y}. \tag{17}$$

Положим $y^* = \max\{0, x^* - y\} \leqslant x^*/2$. Пусть $\nu \in U(2,\mu,[h;T),1,1)$. Для меры ν справедливы соотношения $\nu(0) = 2y$, $\nu([h;T)) = \nu([T+h;2T)) = y$, $\nu(h) = 2y \geqslant x^*$ и $\nu([h;T)) = y \geqslant x^* - y^*$. Применим лемму 2.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\zeta_3 \in V_{y^*} \mid \zeta_2 = \nu\} &= \mathbf{P}\{\zeta_3^\circ(0) = y^* \mid \zeta_2 = \nu\} = \mathbf{P}\{\mu_T(T) = y^* \mid \mu_0 = \nu\} \\ &\geqslant \mathbf{P}\{\mu_h(h) = x^*,\ \mu_h([h;T)) \geqslant x^* - y^* \mid \mu_0 = \nu\} \\ &\geqslant \tfrac{x^*!}{(2y)!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{h}{2y-x^*}\big)^{2y-x^*}e^{-\lambda(2y)\,h}. \end{aligned} \tag{18}$$

Поясним первое неравенство в цепочке. Пусть $\mu_h(h) = x^*$ и $\mu_h([h;T)) \geqslant x^* - y^*$. Тогда $\mu_h(T) = \mu_h(h) - \mu_h([h;T)) \leqslant y^*$. Если $y^* = 0$, то $\mu_h(T) = y^*$. Если $y^* = x^* - y$, то из $\mu_h \leqslant \mu_0 = \nu$ получаем, что $y = x^* - y^* \leqslant \mu_h([h;T)) \leqslant \nu([h;T)) = y$. Следовательно, $\mu_h([h;T)) = x^* - y^*$ и $\mu_h(T) = y^*$. При условии $\mu_h(h) = x^*$ на промежутке $[h;T)$ не будет проявляться эффект самолимитирования, поэтому $\mu_T(T) = \mu_h(T) = y^*$. Значит, событие $\{\mu_h(h) = x^*,\ \mu_h([h;T)) \geqslant x^* - y^* \mid \mu_0 = \nu\}$ влечет событие $\{\mu_T(T) = y^* \mid \mu_0 = \nu\}$.

Объединяя (17) и (18), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\{\zeta_3 \in V_{y^*} \mid \zeta_0 = \mu\} \geqslant e^{-2\lambda(2y)T}\rho^{2y}\tfrac{x^*!}{(2y)!}\big(\lambda(x^*+1)\tfrac{h}{2y-x^*}\big)^{2y-x^*}e^{-\lambda(2y)\,h} > 0.$$

Так как $y^* \leqslant x^*/2$, то множество V_{y^*} поглощающее. Применяя лемму 1, получаем (16), а из (16) и (15) вытекает (14).

5. Вычислительный эксперимент. Для иллюстрации теорем 1 и 2 приведем результаты вычислительных экспериментов по оценке математического ожидания численности популяции методом Монте-Карло [10]. Для каждого набора параметров проводилось $N = 1000$ запусков модели и на уровне значимости $\alpha = 0.05$ строились интервальные оценки математического ожидания численности популяции в выделенные моменты времени. Отдельные реализации находились алгоритмом прямого моделирования, вытекающим непосредственно из формул (1), (2), (3). Алгоритм построен на основе работ [11], [12]. Результаты расчетов представлены на рис. 1–7. Всюду на графиках по оси абсцисс отложено время $t = kT$, а по оси ординат — интервальная оценка математического ожидания $\mathbf{M}\zeta_k(0)$ численности популяции в момент $t = kT$, $k = 0, 1, \ldots$.

В каждом эксперименте принято, что $T = 1$, средняя продолжительность жизни особей при отсутствии самолимитирования одинакова и равна 1.8. В экспериментах 1, 2, 3, 7 среднее число потомков от одной особи $\mathbf{M}\eta(0) = 1.5$, а в экспериментах 4, 5, 6 — $\mathbf{M}\eta(0) = 1$. Интенсивность самолимитирования задавалась в виде $\lambda(0) = \cdots = \lambda(x^*) = 0$, $\lambda(x) = \gamma x^2$, $x > x^*$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Используя результаты работы [2], можно показать, что при выбранной $\lambda(x)$ неограниченный рост численности популяции невозможен для любого набора параметров модели.

Следовательно, если последовательность ζ_k неустойчива, то она п.н. будет вырождаться. Поведение такой цепи ζ_k представлено на рис. 1–5. Случаи устойчивости ζ_k отражены на рис. 6, 7.

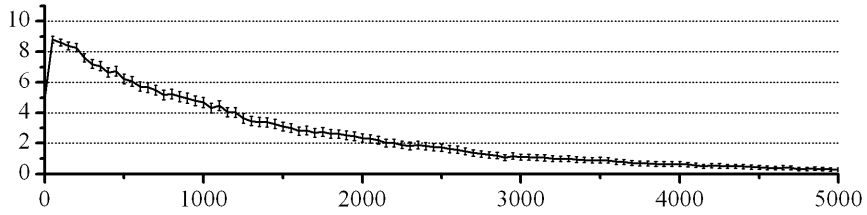


Рис. 1: Функция $L(\cdot)$ 1-решетчатая, выполнено условие (a) теоремы 1, цепь ζ_k неустойчива; $L(1+0)-L(1)=0.4$, $L(2+0)-L(2)=0.4$, $L(3+0)-L(3)=0.2$, $\lambda(x)=0.1x^2$, $x\geqslant 0$, $p_1=p_2=0.5$

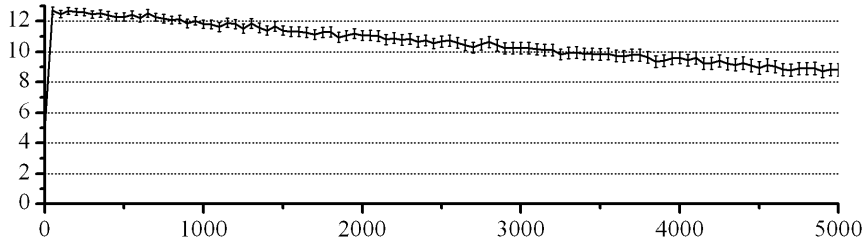


Рис. 2: Функция $L(\cdot)$ 1-решетчатая, выполнено условие (b) теоремы 1, цепь ζ_k неустойчива; $L(1+0)-L(1)=0.4$, $L(2+0)-L(2)=0.4$, $L(3+0)-L(3)=0.2$, $\lambda(6)=0$, $\lambda(x)=0.1x^2$, $x\geqslant 7$, $p_0=0.3$, $p_1=0.15$, $p_2=0.3$, $p_3=0.25$

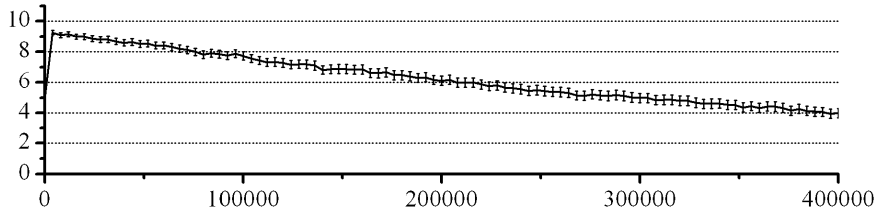


Рис. 3: Функция $L(\cdot)$ непрерывна, выполнено условие (c) теоремы 1, цепь ζ_k неустойчива; $L(t)=1$, $t<1.6$, $L(t)=2.5(2-t)$, $1.6\leqslant t<2$, $L(t)=0$, $2\leqslant t$, $\lambda(6)=0$, $\lambda(x)=0.1x^2$, $x\geqslant 7$, $p_1=p_2=0.5$

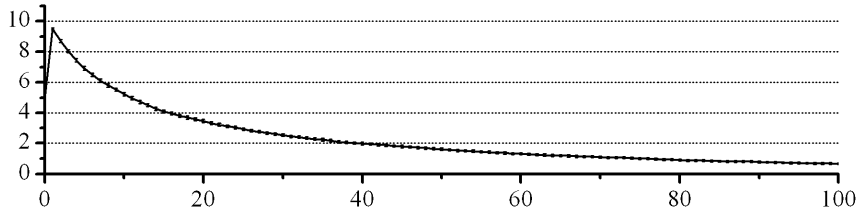


Рис. 4: Функция $L(\cdot)$ непрерывна, выполнено условие (d) теоремы 1, цепь ζ_k неустойчива; $L(t)=1$, $t<1.6$, $L(t)=2.5(2-t)$, $1.6\leqslant t<2$, $L(t)=0$, $2\leqslant t$, $\lambda(1)=0$, $\lambda(x)=0.1x^2$, $x\geqslant 2$, $p_1=1$

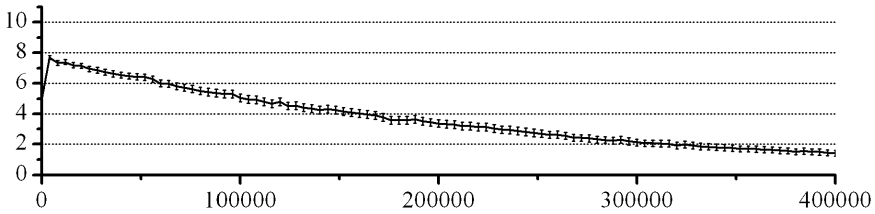


Рис. 5: Функция $L(\cdot)$ непрерывна, выполнено условие (e) теоремы 1, цепь ζ_k неустойчива; $L(t) = 1, \ t < 1, \quad L(t) = 0.625(2.6 - t), \ 1 \leqslant t < 2.6,$ $L(t) = 0, \ 2.6 \leqslant t, \quad \lambda(6) = 0, \ \lambda(x) = 0.1x^2, \ x \geqslant 7, \quad p_1 = 1$

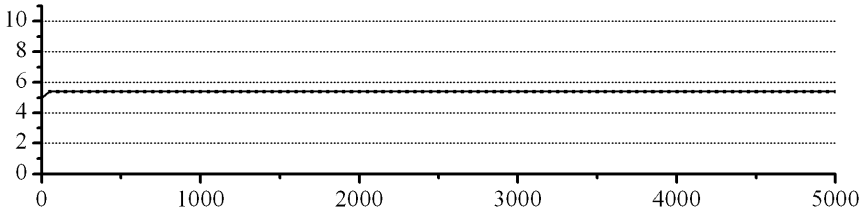


Рис. 6: Функция $L(\cdot)$ непрерывна, выполнены условия теоремы 2, математическое ожидание и дисперсия численности популяции постоянны начиная с некоторого t, цепь ζ_k устойчива; $L(t) = 1, \ t < 1.6,$ $L(t) = 2.5(2 - t), \ 1.6 \leqslant t < 2, \quad L(t) = 0, \ 2 \leqslant t,$ $\lambda(6) = 0, \ \lambda(x) = 0.1x^2, \ x \geqslant 7, \quad p_1 = 1$

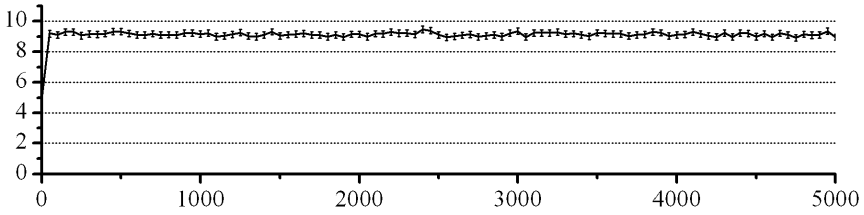


Рис. 7: Функция $L(\cdot)$ 1-решетчатая, условия теорем 1 и 2 не выполнены, математическое ожидание и дисперсия численности популяции вышли на стационарный уровень, цепь ζ_k устойчива; $L(1 + 0) - L(1) = 0.4,$ $L(2 + 0) - L(2) = 0.4, \ L(3 + 0) - L(3) = 0.2, \quad \lambda(1) = 0, \ \lambda(x) = 0.1x^2, \ x \geqslant 2,$ $p_1 = p_2 = 0.5$

6. Заключение. Результаты аналитического и численного исследования указывают на необходимые условия устойчивости процесса ζ_k, определенного формулами (3). Если функция $L(\cdot)$ не является T-решетчатой, то для устойчивости ζ_k необходимо и, согласно теореме 2, достаточно выполнения следующих ограничений: 1) каждая особь в момент репродукции дает ровно одного потомка ($p_1 = 1$); 2) в популяции, состоящей из двух и менее особей, отсутствует самолимитирование ($\lambda(2) = 0, \ x^* \geqslant 2$); 3) естественная продолжительность жизни особей п.н. принадлежит промежутку $[T; 2T)$ ($L(T) = 1, \ L(2T) = 0$). Для T-решетчатых функций $L(\cdot)$ необходимыми условиями устойчивости будут: 1) в популяции, состоящей из одной особи, не проявляется эффект самолимитирования ($\lambda(1) = 0$); 2) каждая дожившая до очередного момента репродукции особь п.н. даст хотя бы одного потомка ($p_0 = 0$); 3) естественная гибель особей п.н. наступает не ранее, чем через время T ($L(T) = 1$). Численный эксперимент показал (см. рис. 7), что

эти три условия, по-видимому, являются и достаточными, но здесь требуются дополнительные исследования.

Литература

[1] Недорезов Л.В., Назаров И.Н. *Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов* // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ, 1998. Вып. 2. С. 77–91.

[2] Нагаев С.В., Недорезов Л.В., Вахтель В.И. *Вероятностная непрерывно-дискретная модель динамики численности изолированной популяции* // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т. II. Вып. 2(4). С. 147–152.

[3] Родионов А.М. *О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 12. С. 122–129.

[4] Добрынский В.А. *Об условиях устойчивого существования двух популяций одного вида организмов* // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1680–1685.

[5] Логофет Д.О., Клочкова И.Н. *Математика модели Лефковича: репродуктивный потенциал и асимптотические циклы* // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 10. С. 116–126.

[6] Jagers P. *Branching processes with biological applications*. London: Wiley and Sons, 1975.

[7] Баруча–Рид А.Т. *Элементы теории марковских случайных процессов и их приложения*. М.: Наука, 1969.

[8] Харрис Т.Е. *Теория ветвящихся случайных процессов*. М.: Мир, 1966.

[9] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. М.: Наука, 1971.

[10] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Курс статистического моделирования*. М.: Наука, 1976.

[11] Пичугин Б.Ю., Перцев Н.В. *Статистическое моделирование популяций взаимодействующих частиц с произвольным распределением времени жизни* // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ, 2001. Вып. 7. С. 67–78.

[12] Pertsev N.V., Pichugin B.J. *Stochastic modeling of the individual's community with their transformation and interaction* // Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2002. Part I. P. 249–253.

г. Омск,
e-mail: `boris@pich.omsk.ru`