Численный анализ одной стохастической модели изолированной популяции с сезонным размножением

Пичугин Б. Ю.*

Рассмотрим стохастическую модель изолированной популяции, особи которой дают потомство только в фиксированные моменты времени, имеют случайную продолжительность жизни и могут погибать вследствие самолимитирования.

Размножение особей при отсутствии самолимитирования описывается ветвящимся процессом [1]. Начальная численность популяции Z_0 не случайна. Каждая особь x рождается в момент $\sigma_x \geqslant 0$ и живет случайное время ℓ_x с распределением $\mathbf{P}\{\ell_x \geqslant t\} = L(t)$, если $\sigma_x > 0$, или $\mathbf{P}\{\ell_x \geqslant t\} = L^\circ(t)$, если $\sigma_x = 0$. Число потомков, произведенных особью x по достижении ею возраста t, задается считающим процессом $\xi_x(t)$ вида: $\xi_x(\cdot)$ терпит скачки только в моменты $kT \leqslant \ell_x$, $k = 1, 2, \ldots$, $T = \mathrm{const} > 0$, величины скачков независимы и имеют распределение $\mathbf{P}\{\xi_x(kT) - \xi_x(kT - 0) = n\} = p_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Все пары $\{(\ell_x, \xi_x(\cdot))\}_x$ независимы в совокупности, $L^\circ(0) = L(0) = 1$, $L^\circ(T) > 0$, $L(T) > 0$, и для некоторого $\tau > 0$ выполнены соотношения: $L^\circ(t) \geqslant 0$, $L(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \tau$ и $L^\circ(\tau + 0) = L(\tau + 0) = 0$. Величину ℓ_x назовем естественной продолжительностью жизни особи x.

Самолимитирование опишем процессом чистой гибели. Для любой особи x, существующей в момент t, вероятность ее гибели вследствие самолимитирования за время $[t; t + h)$, $h \to +0$, не зависит от остальных особей и равна $\lambda(z)h + o(h)$, где z — численность популяции в момент t. Полагается, что интенсивность самолимитирования $\lambda(z)$ не убывает. Обозначим $\tilde{\ell}_x$ реальную продолжительность жизни особи x с учетом самолимитирования. Тогда численность популяции в момент $t \geqslant 0$ будет равна $Z_t = \sum_x \mathbf{1}\{\sigma_x \leqslant t < \sigma_x + \tilde{\ell}_x\}$, где $\mathbf{1}\{\cdot\}$ — индикаторная функция.

Если $\lambda(z) \equiv \gamma$, $\gamma = \mathrm{const} \geqslant 0$, то Z_t будет ветвящимся. В этом случае Z_t будет докритическим при $\gamma > \gamma^*$, критическим при $\gamma = \gamma^*$ и надкритическим при $\gamma < \gamma^*$, где γ^* — единственный корень уравнения $m \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma kT} L(kT) = 1$, $m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$.

Если $\lambda(z)$ отлична от константы, то для Z_t нарушается условие ветвления. В этом случае исследование свойств Z_t производилось численно методом Монте–Карло. Установлено, что если $\lim\limits_{z \to +\infty} \lambda(z) > \gamma^*$ и выполнено хотя бы одно из пяти условий a) $\lambda(1) > 0$; b) $p_0 > 0$ или $L(T) < 1$; c) $L(\cdot)$ не является T-решетчатой и $p_1 < 1$; d) $L(\cdot)$ не является T-решетчатой и $\lambda(2) > 0$; e) $L(\cdot)$ не является T-решетчатой и $L(2T) > 0$, то Z_t вырождается почти наверное. Функция распределения $L(\cdot)$ называется T-решетчатой, когда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (L(kT) - L(kT + 0)) = 1$. Если $\lim\limits_{z \to +\infty} \lambda(z) < \gamma^*$, то вероятность вырождения Z_t строго меньше 1.

Литература

[1] Jagers P. *Branching processes with biological applications.* London: Wiley and Sons, 1975.

* boris@pich.omsk.ru