Пичугин Б.Ю. *Стохастическая модель изолированной популяции с сезонным размножением и самолимитированием* // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т.6. N.4(16). С.75–81.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОЛИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ С СЕЗОННЫМ РАЗМНОЖЕНИЕМ И САМОЛИМИТИРОВАНИЕМ

Б.Ю. Пичугин

Аннотация

Рассмотрена стохастическая модель изолированной популяции, особи которой дают потомство только в фиксированные моменты времени, имеют случайную продолжительность жизни и могут погибать вследствие самолимитирования. Размножение особей описано общим ветвящимся процессом Крампа–Мода–Ягерса, а самолимитирование — процессом чистой гибели. Получены условия вырождения рассматриваемой популяции почти наверное. Обоснование указанных условий в нелинейном случае производилось численно методом Монте–Карло.

1. Введение. Особенностью развития многих популяций является сезонный характер размножения особей. Такая особенность присуща, например, обитателям средних и высоких широт и обусловлена влиянием ряда факторов. К ним относятся длина светового дня, температура воздуха, наличие пищи и т.д. Все эти факторы опосредовано влияют на репродуктивную систему особей, определяя сроки их размножения. В частности, у подавляющего большинства млекопитающих появление потомства приурочено к наиболее благоприятному периоду — концу весны и началу лета.

Для исследования динамики популяций с сезонным размножением используется аппарат разностных уравнений, дифференциальных уравнений с разрывными траекториями и случайных процессов (см., например, [1]–[9]). Динамика численности популяций может существенно различаться в стохастическом и детерминированном вариантах модели [6], [7]. Одним из важных факторов, определяющих развитие популяции, является не только сезонность размножения и численность производимого потомства, но и продолжительность жизни особей. При отсутствии взаимодействия между особями динамика их численности может быть описана общим ветвящимся процессом [3, ч.6]. Взаимодействие между особями зачастую носит сложный характер и зависит от ряда таких факторов, как возраст особей, стадия или этап их развития, масса, размер, положение в пространстве и т.д. Учет этих факторов значительно усложняет построение моделей и анализ свойств их решений. В настоящей работе рассматривается модель, в которой взаимодействие особей осуществляется по принципу самолимитирования. Самолимитирование проявляется в снижении численности особей за счет нехватки ресурсов, необходимых для их жизнедеятельности.

Целью работы является построение и изучение стохастической модели, описывающей динамику изолированной популяции, особи которой дают потомство только в фиксированные моменты времени (сезоны), имеют случайную продолжительность жизни и подвержены гибели вследствие самолимитирования.

2. Описание модели. Предположим, что в условиях отсутствия самолимитирования динамика численности популяции описывается общим ветвящимся

процессом Крампа–Мода–Ягерса [3] со следующими параметрами. В начальный момент $t = 0$ численность популяции не случайна и равна Z_0. Каждая особь x, рожденная в момент $\sigma_x > 0$, живет случайное время ℓ_x с распределением $\mathbf{P}\{\ell_x \geqslant t\} = L(t)$. Для первоначально существующих особей положим $\sigma_x = 0$, а через ℓ_x обозначим оставшуюся продолжительность жизни, распределение которой $\mathbf{P}\{\ell_x \geqslant t\} = L^\circ(t)$. Число потомков, произведенных особью x по достижении ею возраста t, зададим считающим процессом $\xi_x(t)$ вида: $\xi_x(\cdot)$ терпит скачки только в моменты $kT \leqslant \ell_x$, $k = 1, 2, \ldots$, $T = \mathrm{const} > 0$, величины скачков независимы и имеют распределение $\mathbf{P}\{\xi_x(kT) - \xi_x(kT - 0) = n\} = p_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Обозначим $m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$ — среднее число потомков, производимых особью x за один акт размножения. Примем, что все пары $(\ell_x, \xi_x(\cdot))$ независимы в совокупности. Функции $L^\circ(\cdot)$ и $L(\cdot)$ таковы, что $L^\circ(0) = L(0) = 1$, $L^\circ(T) > 0$, $L(T) > 0$, и для некоторого $\tau > 0$ выполнены соотношения: $L^\circ(t) \geqslant 0$, $L(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \tau$ и $L^\circ(\tau + 0) = L(\tau + 0) = 0$, то есть $0 \leqslant \ell_x \leqslant \tau$ почти наверное для любой особи x. Величину ℓ_x назовем естественной продолжительностью жизни особи x. Обозначим $Z_t^\circ = \sum_x \mathbf{1}\{\sigma_x \leqslant t < \sigma_x + \ell_x\}$ — численность популяции в момент $t \geqslant 0$ в условиях отсутствия самолимитирования. Здесь $\mathbf{1}\{\cdot\}$ — индикаторная функция, равная 1, когда условие в скобках выполнено, и 0 в противном случае.

Эффект самолимитирования опишем процессом чистой гибели [2]. Отметим, что для всех существующих в момент t особей справедливо неравенство $t < \sigma_x + \ell_x$. Поэтому промежуток $[t; t + h)$ не будет содержать моментов естественной гибели при малых h. Пусть в момент t популяция насчитывает z особей и x — одна из этих особей. Положим, что независимо от остальных особей вероятность ее гибели вследствие самолимитирования за время $[t; t + h)$, $h \to +0$, равна $\lambda(z)h + o(h)$, а вероятность того, что x не погибнет вследствие самолимитирования за указанное время равна $1 - \lambda(z)h + o(h)$. Тогда вероятность гибели вследствие самолимитирования за время $[t; t+h)$ двух и более особей равна $o(h)$; вероятность гибели хотя бы одной из существующих особей равна $z\lambda(z)h + o(h)$ и вероятность отсутствия гибели особей вследствие самолимитирования равна $1 - z\lambda(z)h + o(h)$. Предполагается, что $\lambda(z)$ определена на множестве неотрицательных целых чисел и не убывает с ростом z. Функцию $\lambda(z)$ будем называть интенсивностью самолимитирования.

Таким образом, мы постулируем, что размножение особей происходит только в моменты kT, $k = 1, 2, \ldots$, а в промежутках между последовательными моментами размножения численность популяции может только снижаться под воздействием естественной смертности особей и эффекта самолимитирования.

С учетом самолимитирования обозначим: $\tilde{\ell}_x$ — реальную продолжительность жизни особи x, $\tilde{\xi}_x(t)$ — реальную численность потомства, произведенного особью x по достижении ею возраста t, и $Z_t = \sum_x \mathbf{1}\{\sigma_x \leqslant t < \sigma_x + \tilde{\ell}_x\}$ — численность популяции в момент $t \geqslant 0$. Используя сделанные предположения, можно записать, что

$$\tilde{\ell}_x = \min\{\epsilon_x, \ell_x\}, \quad \mathbf{P}\{\epsilon_x \geqslant t \mid \sigma_x,\, Z_s,\, s \in [\sigma_x, \sigma_x + t)\} = e^{-\int\limits_{\sigma_x}^{\sigma_x + t} \lambda(Z_s)ds}, \; t \geqslant 0, \quad (1)$$

а также, что $\tilde{\xi}_x(t) = \xi_x(t)$ при $t \leqslant \tilde{\ell}_x$ и $\tilde{\xi}_x(t) = \xi_x(\tilde{\ell}_x)$ при $t > \tilde{\ell}_x$.

Пусть $\lambda(z) \equiv \gamma$, $\gamma \geqslant 0$. Из (1) следует, что в этом случае ϵ_x имеет экспоненциальное распределение с параметром γ, а пары $(\tilde{\ell}_x, \tilde{\xi}_x(\cdot))$ независимы в совокупности. Следовательно, процесс Z_t будет ветвящимся. Обозначим $\tilde{\xi}_x = \tilde{\xi}_x(\infty)$

— число потомков, произведенных особью x за все время своего существования. Рассмотрим математическое ожидание $\tilde{\xi}_x$ как функцию параметра γ

$$g(\gamma) = \mathbf{M}\tilde{\xi}_x = m\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma kT} L(kT). \tag{2}$$

Так как $L(\tau + 0) = 0$, то сумма (2) содержит лишь конечное число слагаемых, поэтому $g(\gamma)$ определена для любого действительного γ. Функция $g(\gamma)$ непрерывна, монотонно убывает, $g(\gamma) \to +\infty$ при $\gamma \to -\infty$ и $g(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to +\infty$. Следовательно, уравнение

$$g(\gamma) = 1 \tag{3}$$

имеет единственный действительный корень γ^*, а процесс Z_t будет докритическим при $\gamma > \gamma^*$ $(g(\gamma) < 1)$, критическим при $\gamma = \gamma^*$ $(g(\gamma) = 1)$ и надкритическим при $\gamma < \gamma^*$ $(g(\gamma) > 1)$ [3]. Докритический процесс вырождаются почти наверное, то есть найдется такой момент $t \geqslant 0$, что $Z_t = 0$. Если выполнено неравенство $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_x = 1\} < 1$, то критический процесс также вырождается почти наверное. Если Z_t — критический и $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_x = 1\} = 1$ (что возможно только при $L(T) = 1$, $L(2T) = 0$, $p_1 = 1$ и $\gamma = 0$), то $Z_{kT-0} = Z_{T-0}$ и $Z_{T-0} \leqslant Z_{kT-0} \leqslant 2Z_{T-0}$ для любого $k = 1, 2, \dots$ почти наверное. Следовательно, вероятность вырождения Z_t будет равна $\mathbf{P}\{Z_{T-0} = 0\} = (1 - L^\circ(T))^{Z_0}$, что строго меньше 1, так как $L^\circ(T) > 0$. В надкритическом случае вероятность вырождения Z_t также будет строго меньше 1, так как он с положительной вероятностью уходит на бесконечность, то есть $\mathbf{P}\{Z_t \to \infty \text{ } при \text{ } t \to \infty\} > 0$.

Из (2) вытекает, что $g(0) = \mathbf{M}\xi_x$, где $\xi_x = \xi_x(+\infty)$ есть общее число потомков, производимых особью x при условии отсутствия самолимитирования. Следовательно, если Z_t° докритический $(g(0) < 1)$, то $\gamma^* < 0$ и Z_t также будет докритическим при любом $\gamma \geqslant 0$.

Если интенсивность самолимитирования $\lambda(z)$ отлична от константы, то для Z_t нарушается условие ветвления: пары $(\tilde{\ell}_x, \tilde{\xi}_x(\cdot))$ для различных особей становятся зависимыми. Это приводит к значительным сложностям при анализе свойств Z_t. В частности, достаточно трудно аналитически получить критерий вырождения Z_t почти наверное. Поэтому дальнейшие исследования проводились численно методом Монте–Карло [10].

3. Алгоритм моделирования. Отдельные реализации процесса Z_t находились алгоритмом прямого моделирования, который схематично можно описать следующим образом.

1. Сформировать начальный набор особей: для каждой первоначально существующей особи x положить $\sigma_x = 0$ и в соответствии с функцией распределения $L^\circ(\cdot)$ разыграть ее естественную продолжительность жизни ℓ_x.

2. Пусть в момент $t \geqslant 0$ популяция состоит из конечного набора особей X общей численностью z особей, и для каждой особи $x \in X$ известны: момент рождения σ_x и естественная продолжительность жизни ℓ_x. Тогда выполнять действия.

2.1. Вычислить очередной момент размножения $\kappa(t) = \min\{kT : t < kT,\ k = 0, 1, \dots\}$.

2.2. Найти наименьший момент естественной гибели $\delta(t) = \min\{\sigma_x + \ell_x : x \in X\}$.

2.3. Разыграть момент $\theta(t)$ первой гибели особи вследствие самолимитирова-

ния, считая от момента t, в соответствии с распределением

$$\mathbf{P}\{\theta(t) \geqslant s\} = e^{-z\lambda(z)(s-t)},\ s \geqslant t, \quad \mathbf{P}\{\theta(t) \geqslant s\} = 1,\ s < t,$$

(вид распределения $\theta(t)$ вытекает из (1), при условии, что интервал $[t; s)$ не содержит моментов естественной гибели особей).

2.4. Найти ближайший момент смены состояния $t_{\min} = \min\{\kappa(t), \delta(t), \theta(t)\}$.

2.5. Для всех $s \in [t; t_{\min})$ положить $Z_s = z$.

2.6. Если $t_{\min} = \kappa(t)$, то осуществить репродукцию новых особей: для каждой особи из набора X разыграть число ее потомков и добавить соответствующее количество новых особей к набору X; для всех новых особей положить $\sigma_x = t_{\min}$ и разыграть естественную продолжительность жизни, в соответствии с функцией распределения $L(\cdot)$.

2.7. Если $t_{\min} = \delta(t)$, то удалить из набора X всех особей, момент $\sigma_x + \ell_x$ естественной гибели которых совпадает с $\delta(t)$.

2.8. Если $t_{\min} = \theta(t)$, то выбрать наудачу одну особь из набора X и удалить ее.

2.9. Перейти к рассмотрению момента $t = t_{\min}$.

При разработке описанного алгоритма были использованы результаты работ [11], [12]. Текущий набор особей X хранился в памяти компьютера в виде сбалансированного бинарного дерева, упорядоченного по моментам естественной гибели особей, что позволило на больших численностях популяции значительно сократить время работы пункта 2.2 алгоритма. Моделирование случайных величин ℓ_x, $\theta(t)$ и числа потомков от одной особи осуществлялось стандартными методами [10]. Для получения случайной величины, равномерно распределенной на $(0; 1)$, использовался мультипликативный датчик псевдослучайных чисел с множителем 5^{17}, модулем 2^{40} и периодом 2^{38}.

4. Результаты расчетов. В ходе вычислений установлено, что при интенсивности самолимитирования, отличной от константы, характер поведения Z_t существенно различается для двух случаев: когда $L(\cdot)$ является T-решетчатой функцией или не является таковой. Функцию распределения $L(\cdot)$ назовем T-решетчатой, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\delta L(kT)| = 1$, где $\delta L(kT) = L(kT + 0) - L(kT)$ — скачок функции $L(\cdot)$ в точке kT. T-решетчатая функция $L(\cdot)$ определяет естественную продолжительность жизни как дискретную случайную величину, все возможные значения которой кратны T.

Зададим уровень $z^* = \sup\{z : z\lambda(z) = 0,\ z = 0, 1, \dots\} \geqslant 0$ как наибольшую возможную численность популяции, при которой не проявляется эффект самолимитирования.

Предположим, что $L(\cdot)$ — T-решетчатая функция. Тогда, если параметры модели удовлетворяют ограничениям

$$p_0 = 0, \quad \lambda(1) = 0\ (z^* \geqslant 1) \quad \text{и} \quad L(T) = 1, \tag{4}$$

то вероятность вырождения Z_t будет равна нулю. При таком наборе параметров между последовательными моментами размножения численность популяции не может снизится до нуля ни за счет естественной смертности (так как функция $L(\cdot)$ T-решетчатая), ни за счет самолимитирования (так как $z^* \geqslant 1$). Непосредственно в моменты размножения численность популяции не снижается в силу того, что $p_0 = 0$ и $L(T) = 1$.

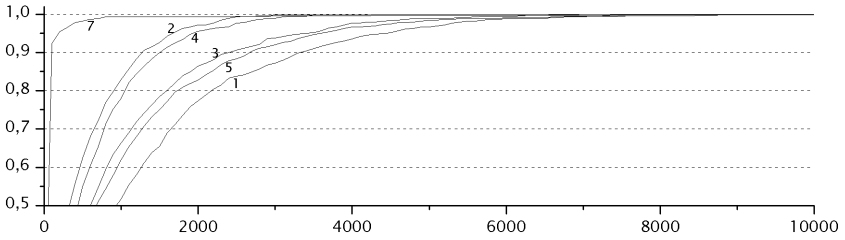


Рис. 1: Оценка P_k в случаях, когда Z_t вырождается почти наверное

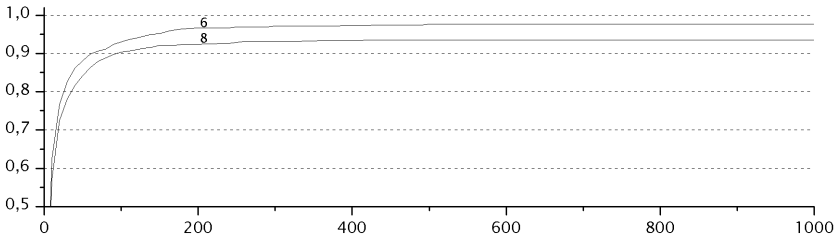


Рис. 2: Оценка P_k, если вероятность вырождения Z_t строго меньше 1

Пусть функция $L(\cdot)$ не является T-решетчатой. Тогда, если

$$p_1 = 1, \quad \lambda(2) = 0 \ (z^* \geqslant 2), \quad L(T) = 1 \text{ и } L(2T) = 0, \tag{5}$$

то вероятность вырождения Z_t будет строго меньше 1. Действительно, из равенств $p_1 = 1$, $L(T) = 1$ и $L(2T) = 0$ следует, что $Z^\circ_{kT-0} = Z^\circ_{T-0}$ и $Z^\circ_{T-0} \leqslant Z^\circ_{kT} \leqslant 2Z^\circ_{T-0}$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ почти наверное, причем неравенство $Z^\circ_{kT} < 2Z^\circ_{T-0}$ возможно только, когда $L(T+0) < 1$. Следовательно, если при некотором $k = k'$ последовательность $\{Z_{kT-0}\}$ попадет в полосу $1 \leqslant Z_{k'T-0} \leqslant \frac{1}{2}z^*$, то для всех $t \geqslant k'T$ почти наверное будет выполнено неравенство $1 \leqslant Z_t \leqslant z^*$, и Z_t не выродится. В рамках ограничений (5) вероятность попадания последовательности $\{Z_{kT-0}\}$ в указанную полосу положительна. Это противоречит вырождению Z_t почти наверное.

Таким образом для вырождения Z_t почти наверное необходимо, чтобы нарушалось любое из равенств (4), если $L(\cdot)$ — T-решетчатая, или любое из равенств (5), когда $L(\cdot)$ не является T-решетчатой. Следовательно, обязательно должен быть выполнен хотя бы один из пяти пунктов:

(a) $\lambda(1) > 0$ $(z^* = 0)$*;*
(b) $p_0 > 0$ *или* $L(T) < 1$*;*
(c) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $p_1 < 1$*;*
(d) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $\lambda(2) > 0$ $(z^* \leqslant 1)$*;*
(e) *функция* $L(\cdot)$ *не является* T*-решетчатой и* $L(2T) > 0$*.*

В свою очередь, *выполнение любого из условий* (a)–(e) *ведет к вырождению* Z_t *почти наверное, если* $\lim\limits_{z\to+\infty} \lambda(z) > \gamma^*$*, и к вырождению с вероятностью строго меньшей* 1*, если* $\lim\limits_{z\to+\infty} \lambda(z) < \gamma^*$. Здесь γ^* это корень уравнения 3.

Для обоснования этого утверждения приведем результаты расчетов по оцен-

ке вероятности вырождения Z_t к моментам $t = kT$, $k = 1, 2, \ldots$. Оценка $\bar{P}_k$ вероятности $P_k = \mathbf{P}\{Z_{kT} = 0\}$ строилась по независимым реализациям процесса Z_t, полученным с помощью описанного выше алгоритма. При построении доверительных интервалов использовалась интегральная теорема Муавра–Лапласа, а если оценка $\bar{P}_k$ была близка к 1, то применялось правило арксинуса [13, с. 242]. Во всех представленных расчетах объем выборок $N = 1000$, уровень значимости $\alpha = 0.05$. Графики полученных оценок вероятности вырождения представлены на рис. 1 и 2. По оси абсцисс здесь отложено время, а по оси ординат — оценка $\bar{P}_k$. Параметры модели для каждого из графиков приведены в таблице 1, где под $\mathrm{U}(a; b)$ понимается равномерное распределение на интервале $(a; b)$. Кроме того во всех расчетах полагалось $T = 1$ и $Z_0 = 3$.

Таблица 1: Параметры модели к рис. 1 и 2

№	$L^\circ(\cdot)$	$L(\cdot)$	p_n	$\lambda(z)$
1	$\delta L(1) = -0.5$ $\delta L(2) = -0.5$	$\delta L(1) = -0.75$ $\delta L(2) = -0.25$	$p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$	$1.55\,\gamma^*\big(1 - \frac{6}{z+6}\big)$
2	$\delta L(1) = -0.5$ $\delta L(2) = -0.5$	$\delta L(1) = -0.75$ $\delta L(2) = -0.25$	$p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.15$ $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.25$	$\mathbf{1}\{z > 2\}\,1.2\,\gamma^*\big(1 - \frac{4}{z+3}\big)$
3	$\mathrm{U}(0; 2)$	$\mathrm{U}(1.6; 2)$	$p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$	$\mathbf{1}\{z > 2\}\,1.4\,\gamma^*\big(1 - \frac{4}{z+3}\big)$
4	$\mathrm{U}(0; 2)$	$\mathrm{U}(1.6; 2)$	$p_1 = 1$	$\mathbf{1}\{z > 1\}\,0.01\,\big(1 - \frac{4}{z+3}\big)$
5	$\mathrm{U}(0; 2.9)$	$\mathrm{U}(2.7; 2.9)$	$p_1 = 1$	$\mathbf{1}\{z > 2\}\,2\,\gamma^*\big(1 - \frac{4}{z+3}\big)$
6	$\mathrm{U}(0; 3)$	$\mathrm{U}(0; 3)$	$p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.3$ $p_2 = 0.4$	$0.95\,\gamma^*\big(1 - \frac{1}{10z+1}\big)$
7	$\mathrm{U}(0; 3)$	$\mathrm{U}(0; 3)$	$p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.3$ $p_2 = 0.4$	$\gamma^*\big(1 - \frac{4}{z^2+4}\big)$
8	$\mathrm{U}(0; 3)$	$\mathrm{U}(0; 3)$	$p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.3$ $p_2 = 0.4$	$\gamma^*\big(1 - \frac{1}{2\ln(z+1)}\big)$

№	m	z^*	$\gamma^* \approx$	доверительные интервалы для P_k	
1	1.5	0	0.5413	$P_{5000} = 0,967 \pm 0,0111$	$P_{10000} \in (0,9980; 1)$
2	1.5	2	0.5413	$P_{5000} = 1 \pm 0$	$P_{10000} = 1 \pm 0$
3	1.5	2	0.4055	$P_{5000} = 0,989 \pm 0,0065$	$P_{10000} = 1 \pm 0$
4	1	1	0	$P_{5000} = 1 \pm 0$	$P_{10000} = 1 \pm 0$
5	1	2	0.4812	$P_{5000} = 0,985 \pm 0,0075$	$P_{10000} = 1 \pm 0$
6	1.1	2	0.07191	$P_{500} = 0,976 \pm 0,0095$	$P_{1000} = 0,977 \pm 0,0093$
7	1.1	2	0.07191	$P_{5000} \in (0,9963; 0,9997)$	$P_{10000} \in (0,9971; 1)$
8	1.1	2	0.07191	$P_{500} = 0,935 \pm 0,0153$	$P_{1000} = 0,935 \pm 0,0153$

Вероятность вырождения Z_t равна $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}\{Z_{kT} = 0\}$. Следовательно, стремление оценки $\bar{P}_k$ к единице, наблюдаемое на графиках №№ 1–5, подтверждает сделанное утверждение, если $\lim\limits_{z\to+\infty} \lambda(z) > \gamma^*$. Случай $\lim\limits_{z\to+\infty} \lambda(z) < \gamma^*$ является трудоемким для вычислений, так как в некоторых реализациях численность популяции превосходит несколько сотен тысяч особей. Поэтому этот случай иллюстрирует всего один график №6, на котором оценка $\bar{P}_k$ не стремится к единице.

Если $\lim\limits_{z\to+\infty} \lambda(z) = \gamma^*$, то для вырождения Z_t почти наверное, видимо, необ-

ходима сходимость ряда $\sum_{z=1}^{\infty}(\gamma^* - \lambda(z))$. На графиках № 7 и № 8 показана оценка вероятности вырождения для случаев, когда указанный ряд сходится и расходится соответственно.

В заключение автор выражает признательность В. А. Топчему за полезное обсуждение работы.

Литература

[1] Харрис Т.Е. *Теория ветвящихся случайных процессов.* М.: Мир, 1966.

[2] Баруча–Рид А.Т. *Элементы теории марковских случайных процессов и их приложения.* М.: Наука, 1969.

[3] Jagers P. *Branching processes with biological applications.* London: Wiley and Sons, 1975.

[4] Kostitzin V.A. *La Biologie Mathematique.* Paris: A. Colin, 1937.

[5] Aagaard–Hansen H., Yeo G.F. *A stochastic discrete generation birth, continuous death population growth model and its approximate solution* // J. Math. Biol. 1984. V. 20. P. 69–90.

[6] Недорезов Л.В., Назаров И.Н. *Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов* // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ, 1998. Вып. 2. С. 77–91.

[7] Нагаев С.В., Недорезов Л.В., Вахтель В.И. *Вероятностная непрерывно-дискретная модель динамики численности изолированной популяции* // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т. II. Вып. 2(4). С. 147–152.

[8] Родионов А.М. *О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 12. С. 122–129.

[9] Добрынский В.А. *Об условиях устойчивого существования двух популяций одного вида организмов* // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1680–1685.

[10] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Курс статистического моделирования.* М.: Наука, 1976.

[11] Пичугин Б.Ю., Перцев Н.В. *Статистическое моделирование популяций взаимодействующих частиц с произвольным распределением времени жизни* // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ, 2001. Вып. 7. С. 67–78.

[12] Pertsev N.V., Pichugin B.J. *Stochastic modeling of the individual's community with their transformation and interaction* // Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2002. Part I. P. 249–253.

[13] Козлов М.В., Прохоров А.В. *Введение в математическую статистику.* М.: Изд-во МГУ, 1987.