О СЛОЖНОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМА ЭЛЕКТОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ РЫНКА

А.В. Еремеев

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: eremeev@iitam.omsk.net.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации режима электроэнергетической системы, возникающая при расчете аукциона для полностью конкурентного оптового рынка электроэнергии [1]. Установлено, что поиск допустимого решения данной задачи в общем случае является NP-трудной в сильном смысле задачей. Показана NP-трудность некоторых частных случаев.

Ключевые слова: сложность, оптимизация режима, электроэнергетическая система, рынок.

Введение

Настоящая работа посвящена анализу сложности задачи оптимизации режима электроэнергетической системы (ЭЭС), возникающей при расчете аукциона для полностью конкурентного оптового рынка электроэнергии в соответствии с моделью, предложенной в [1]. Данная модель, в отличие от упрощенных аналогов [2, 3], включает в себя невыпуклые ограничения, усложняющие поиск оптимального решения (оптимальной диспетчеризации). В то время, как задачи оптимальной диспетчеризации [2, 3] эффективно разрешимы, рассматриваемая задача, как показано ниже, не является полиномиально разрешимой, если верна гипотеза $P \neq NP$.

1. Постановка задачи оптимальной диспетчеризации

Для анализа сложности задачи оптимальной диспетчеризации, возникающей при расчете аукциона [1], рассмотрим частный случай данной задачи с одним генератором и линейными функциями издержек и полезности. Исследуемая модель основывается на описании ЭЭС, находящейся в установившемся режиме, соответствующем одному интервалу планирования (например, часу).

Пусть имеется генераторный узел N_0, узлы потребителей $N_1, \dots, N_n$ и n ЛЭП, соединяющих генераторный узел с каждым из узлов потребителей. В узле N_0 находится один генератор, вырабатывающий активную мощность $P_0 \geq 0$, реактивную мощность Q_0 и имеющий нижний и верхний пределы регулирования по активной мощности $P_0^{\min} \leq P_0 \leq P_0^{\max}$.

Потребитель узла $N_i, i = 1, \dots, n$, получает активную мощность $P_i \geq 0$ и реактивную мощность Q_i. При этом для каждого $i = 1, \dots, n$ задан верхний предел потребляемой активной мощности $P_i^{\max}$, а реактивная мощность $Q_i = Q_i^{\Phi}$ фиксирована.

Для генератора задана линейная функция издержек $C_0(P_0) = c_0 P_0$, $c_0 \geq 0$, а для потребителя узла $N_i, i = 1, \dots, n$, задана линейная функция полезности $B_i(P_i) = b_i P_i$, $b_i \geq 0$. На практике коэффициенты наклона функций издержек и полезности определяются ценовыми компонентами в заявках по продаже и покупке на аукционе электроэнергии.

Каждая ЛЭП описывается аналогично [1], но в данном случае в модели отсутствуют трансформаторы и используется более компактная комплексная запись уравнений установившегося режима (см. §6.2 в [5]). Для ветви из узла N_0 в узел N_i, $i = 1, \dots, n$, обозначим активное сопротивление ветви через R_i, а реактивное – через X_i. Для шины узла N_i, $i = 0, \dots, n$, запишем комплексное напряжение как $U'_i + jU''_i$, где j – мнимая единица.

Предположим, что узел N_0 является балансирующим: в нем задано напряжение U'_0 и нулевой угол фазы, то есть, $U''_0 = 0$. В других узлах задано потребление реактивной мощности $Q_i = Q_i^{\Phi}, i = 1, \dots, n$. С учетом закона Ома для переменного тока [6], имеем:

$$U'_i + jU''_i - U'_0 = \frac{(R_i + jX_i)(-P_i + jQ_i)}{U'_i - jU''_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Обозначим через p_{0i} и q_{0i}, соответственно, активную и реактивную составляющие мощности потока, вытекающего из узла N_0 в узел $N_i, i = 1, \dots, n$. Тогда аналогично (1),

$$p_{0i} - jq_{0i} = \frac{U'_0(U'_0 - U'_i - jU''_i)}{R_i + jX_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

и, используя первый закон Кирхгофа (см., например, [6]), получаем:

$$P_0 - jQ_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{U'_0(U'_0 - U'_i - jU''_i)}{R_i + jX_i}. \tag{3}$$

Будем называть контролируемым сечением S набор линий с заданными направлениями, по которым ограничивается суммарный поток активной мощности:

$$\sum_{(i,k)\in S} p_{ik} \le p_S^{\max}. \tag{4}$$

Здесь и далее $p_S^{\max}$ – пропускная способность контролируемого сечения S. Множество всех контролируемых сечений ЭЭС обозначим через $\mathcal{S}$.

Задача оптимальной диспетчеризации в случае одного генератора формулируется следующим образом: найти объемы генерации и потребления $P_i, i = 0, \dots, n$, а также значения переменных Q_0, U'_i, U''_i, $i = 1, \dots, n$, максимизирующие функцию благосостояния

$$-C_0(P_0) + \sum_{i=1}^{n} B_i(P_i) \to \max$$

с учетом указанных выше ограничений на генерацию и потребление активной и реактивной мощности в узлах, уравнений установившегося режима (1),(3) и ограничений на пропускную способность (4) всех контролируемых сечений из $\mathcal{S}$.

2. Сложность задачи оптимальной диспетчеризации

Далее предполагаем, что исходные данные задачи являются рациональными числами.

Утверждение 1. *Для задачи оптимальной диспетчеризации в случае одного генератора задача поиска допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной в сильном смысле задачи НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО (см., например, [4]): дан граф $G = (V, E)$ и целое число K; требуется установить, существует ли такое подмножество $I \subseteq V$, любые две вершины из которого несмежны в G и $|I| \ge K$.

По данному графу G строим индивидуальную задачу оптимальной диспетчеризации с одним генератором и $n = |V|$ потребителями, где

$$U'_0 = 1, \quad P_0^{\min} = K/2,$$

$$R_i = X_i = 1, \quad P_i^{\max} = Q_i^{\Phi} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, определяем $|E|$ контролируемых сечений, сопоставляя каждому ребру $e = \{v_i, v_k\} \in E$ контролируемое сечение из двух линий $S_e = \{(0,i),(0,k)\}$ с пропускной способностью $p_{S_e}^{\max} = 1/2$. Функции полезности и издержек полагаем равными нулю.

Построенная индивидуальная задача соответствует гипотетической ситуации, когда спрос на электроэнергию равен нулю, а активная мощность генератора ограничена снизу величиной K. Набор контролируемых сечений отражает структуру заданного графа.

Из (1) следует, что для данной сети $U'_i = \{0, 1\}$, $U''_i = 0, i = 1, \ldots, n$. Кроме того, из (3) имеем $P_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1 - U'_i)$. Однако, ввиду условия $P_0 \geq \frac{K}{2}$ и (2), задача оптимальной диспетчеризации имеет допустимое решение в том и только том случае, когда существует набор $(U'_1, \ldots, U'_n) \in \{0,1\}^n$, такой что $\sum_{i=1}^{n}(1 - U'_i) \geq K$, и для каждого $S_e \in \mathcal{S}$ выполнено

$$p_{0i} + p_{0k} = \frac{1 - U'_i}{2} + \frac{1 - U'_k}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{где } v_i, v_k \text{ – концы ребра } e \in E.$$

Иначе говоря, в графе G найдется подмножество $I = \{v_i : U'_i = 0\}$ из не менее, чем K попарно несмежных вершин. Следовательно, ввиду того, что числовые параметры построенной задачи ограничены сверху числом вершин графа, задача получения допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле.

Как видно из доказательства, утверждение 1 также справедливо в частном случае, когда ограничение $P_0 \leq P_0^{\max}$ отсутствует.

Утверждение 1 можно распространить и на частный случай, когда каждая линия входит только в одно контролируемое сечение. Для этого достаточно для каждой вершины v_i графа G дополнить указанную в доказательстве ЛЭП еще $\deg(v_i)$ последовательными линиями нулевого сопротивления со стороны узла N_0 (при этом каждому ребру графа G сопоставляется пара дополнительных ЛЭП). Контролируемые сечения достаточно задать для каждого $e \in E$ только на той паре дополнительных ЛЭП, которая сопоставлена e.

Предложенная сводимость дает индивидуальные задачи, где допустимые решения имеют широкий диапазон напряжений на шинах потребительских узлов. На практике же, как правило, допускаются лишь те режимы, в которых отклонение модулей напряжений от номинальных значений относительно мало: $(1 - \varepsilon_i)U_i^{\text{НОМ}} \leq |U'_i + jU''_i| \leq (1 + \varepsilon_i)U_i^{\text{НОМ}}, i = 1, \ldots, n$. При таких дополнительных ограничениях данная сводимость неприменима. Однако, и в этом случае результат, аналогичный утверждению 1 будет справедлив, если в модель будут введены потребители с нерегулируемой мощностью нагрузки или с ограничением снизу на P_i.

Утверждение 2. *Для задачи оптимальной диспетчеризации в случае одного генератора и $\mathcal{S} = \emptyset$ задача поиска допустимого решения является NP-трудной.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ [4]: дан набор натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m$ и требуется установить, существует ли в нем такое подмножество J, что $\sum_{i \in J} a_i = \frac{A}{2}$, где $A = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

По данному набору $a_1, \dots, a_m$ эффективно строится индивидуальная задача оптимальной диспетчеризации с одним генератором и $n = m$ потребителями, где

$$U_0' = 1, \quad P_0^{\min} = P_0^{\max} = A/4,$$

$$R_i = X_i = 1/a_i, \quad P_i^{\max} = Q_i^{\Phi} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функции полезности и издержек определяем произвольным образом.

Из (1) следует, что для данной сети $U_i' = \{0, 1\}$, $U_i'' = 0, i = 1, \dots, n$. Кроме того, согласно (3) имеем $P_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i(1 - U_i')$. Однако, требуется, чтобы $P_0 = \frac{A}{4}$, поэтому задача оптимальной диспетчеризации имеет допустимое решение в том и только том случае, когда искомое подмножество J существует. Следовательно, задача получения допустимого решения является NP-трудной.

Утверждение 3. *Задача оптимальной диспетчеризации в случае одного генератора и $\mathcal{S} = \emptyset$ является NP-трудной и при отсутствии ограничения $P_0 \le P_0^{\max}$.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудной является задача распознавания, существует ли допустимое решение со значением функции благосостояния не менее K. Для этого изменим сводимость, описанную в утверждении 2, положив

$$U_0' = 1, \quad P_0^{\min} = 6A + \frac{A}{2},$$

$$R_i = X_i = \frac{1}{34a_i}, \quad P_i^{\max} = 2a_i, \quad Q_i^{\Phi} = 6a_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Функции издержек и полезности определяем равными объему потребляемой мощности: $C_0(P_0) = P_0$, $B_i(P_i) = P_i$, $i = 1, \dots, n$.

Из (1) следует, что если каждый потребитель получает свою максимально возможную прибыль, то есть, $P_i = P_i^{\max} = 2a_i$, $i = 1, \dots, n$, то для допустимого решения выполнены равенства $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0, 1\}$ и $U_i'' = \frac{2}{17}$, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, из (3) имеем:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i(7 - y_i) = 6A + \sum_{i=1}^{n} a_i(1 - y_i).$$

Пусть существует такое J, что $\sum_{i \in J} a_i = \frac{A}{2}$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $y_i = 0$, если $i \in J$, если же $i \notin J$, то $y_i = 1$. В результате полученный набор напряжений дает решение задачи оптимальной диспетчеризации, так как оно допустимо, издержки $C_0(P_0) = P_0 = 6A + \frac{A}{2}$ минимальны, а суммарная прибыль потребителей максимальна и равна $2A$. Оптимум целевой функции составляет $-\frac{9A}{2}$.

С другой стороны, если оптимальное значение функции благосостояния меньше, чем $K = -\frac{9A}{2}$, из этого следует, что не существует такого набора булевых переменных $y_1, \dots, y_n$, при которых $P_0 = 6A + \frac{A}{2}$ и $P_i = P_i^{\max}$, $i = 1, \dots, n$, а значит, не существует и подмножества J, обеспечивающего равенство $\sum_{i \in J} a_i = \frac{A}{2}$.

Таким образом, распознавание индивидуальных задач оптимальной диспетчеризации, где существует допустимое решение со значением функции благосостояния не менее $-\frac{9A}{2}$ эквивалентно решению NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ. Утверждение доказано.

Заметим, что полагая $C_0(P_0) = \frac{4}{13}P_0$ в сводимости из доказательства утверждения 3, получаем ноль в качестве оптимума целевой функции в случаях, когда искомое разбиение J существует. Таким образом, при $\mathcal{S} = \emptyset$ и без ограничения $P_0 \leq P_0^{\max}$ поиск приближенного решения с какой-либо гарантированной константной относительной погрешностью является NP-трудной задачей.

В предложенных сводимостях выбор числовых значений параметров задач оптимальной диспетчеризации мотивирован удобством доказательства, а не близостью к величинам, возникающим на практике. Многие величины могли бы быть приближены к реальным соответствующим масштабированием в сводимости.

3. Заключение

Полученные результаты показывают, что в общей постановке рассмотренный вариант задачи оптимальной диспетчеризации может представлять существенную сложность комбинаторного характера. В таких случаях получение оптимального решения стандартными методами (например, методами линейного программирования или Ньютона [2, 5]) не может быть гарантировано. Тем не менее, задачи, возникающие на практике, как правило, значительно отличаются по структуре от семейств, построенных с помощью сводимостей в данной работе. В связи с этим, вопросы вычислительной сложности практических задач оптимальной диспетчеризации требуют дальнейшего исследования.

Список литературы

[1] М.Р. Давидсон, Ю.В. Догадушкина, Е.М. Крейнес, Н.М. Новикова, Ю.А. Удальцов, Л.В. Ширяева *Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России.* - Известия Академии Наук. Теория и системы управления, 2004, N3, с. 72-83.

[2] A.B. Philpott *Experiments with load flow pricing models.* Proc. of CRNEC Policy Conference, Centre for Research in Network Economics and Communications. - University of Auckland, New Zealand, 1999.

[3] F. C. Schweppe, M. C. Caramanis, R. D. Tabors, R. E. Bohn. *Spot pricing in electricity.* Norwell, MA: Kluwer Acad. Pbs., 1988. Appendices A and D.

[4] М. Гэри, Д. Джонсон *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* –М.: Мир, 1982.

[5] В. М. Горнштейн, Б. П. Мирошниченко, А. В. Пономарев и др. *Методы оптимизации режимов энергосистем* / В. М. Горнштейн ред. – М.: Энергия, 1981.

[6] Г. И. Атабеков. *Теоретические основы электротехники.* ч. 1. –М.: Энергия, 1978.

ON COMPLEXITY OF ONE PROBLEM OF POWER SYSTEM OPTIMIZATION

A.V. Eremeev

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk
e-mail: eremeev@iitam.omsk.net.ru

Abstract. In this paper, we consider the economic dispatch problem arising in auction clearing model proposed for the competitive wholesale electricity market of Russia. The formulation of this problem, unlike the well-known DC-load model formulations, includes non-convex constraints increasing its complexity. It is shown that in the general case finding a feasible solution to this problem is NP-hard in the strong sense. Hardness of some special cases is established as well.

Key words: complexity, power flow optimization, power system, electricity market.