ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА: СЛОЖНОСТЬ, АЛГОРИТМЫ, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ [1]

А.В.Еремеев, Л.А.Заозерская, А.А.Колоколов

Задача о наименьшем покрытии множества относится к числу широко известных задач дискретной оптимизации и имеет многочисленные приложения. В данной работе содержится обзор результатов, связанных со структурой и сложностью этой задачи, алгоритмами ее решения и результатами вычислительных экспериментов. Особое внимание уделяется последним достижениям. Краткий вариант этого обзора приводится в [8].

1. Введение

Приведем комбинаторную постановку задачи о наименьшем покрытии множества (ЗНП). Пусть даны множество $M = \{1, ..., m\}$ и набор его подмножеств $M_j \subseteq M$, где $j \in \{1, ..., n\}$. Совокупность $\{M_j\}, j \in J \subseteq \{1, ..., n\}$ называется *покрытием* M, если $\bigcup_{j \in J} M_j = M$. Каждому M_j приписан вес $c_j \geq 0$. Требуется найти покрытие минимального суммарного веса. Задачу будем называть *невзвешенной*, если все подмножества M_j имеют веса, равные единице. Не теряя общности, далее будем предполагать, что покрытие существует.

Часто ЗНП формулируется как задача целочисленного программирования (ЦП): найти
$$f^*(c, A) = \min\{(c, x) | Ax \geq e, x \in \{0, 1\}^n\}. \quad (1)$$

Здесь A – $(m \times n)$-матрица, причем $a_{ij} = 1$, если $i \in M_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае; e обозначает m-вектор из единиц; $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$; $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор, где $x_j = 1$, если M_j входит в покрытие, иначе $x_j = 0$.

Кроме того, в литературе рассматриваются обобщенные задачи о покрытии, в которых вместо e используется вектор натуральных чисел [4, 81, 98], и специальные классы задач (см., например, [22, 32, 37, 72]).

Значительное внимание уделяется задачам о покрытии на графах, в частности, задаче о вершинном покрытии (ЗВП), которая может быть сформулирована следующим образом. Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Для каждой $v \in V$ определен вес $w_v > 0$. Подмножество $C \subseteq V$ называется *вершинным покрытием*, если каждое ребро из E инцидентно хотя бы одной вершине из C. Требуется найти вершинное покрытие минимального веса. Рассматриваются также задачи о покрытии вершин графа его вершинами или ребрами (задача о доминирующем множестве вершин и о реберном покрытии) [18].

ЗНП относится к числу NP-трудных задач. В частности, NP-трудной является даже невзвешенная ЗВП, когда G – планарный граф и степени всех вершин равны трем [5]. Один из первых результатов относительно сложности ЗНП был получен Ю.И.Журавлевым [9], который установил, что в классе локальных алгоритмов конечного индекса задача о вхождении подмножества M_j в какое-либо оптимальное покрытие не разрешима. К ЗНП сводятся многие другие известные задачи дискретной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 96-0820) и ФЦП "Интеграция".

оптимизации: задачи стандартизации, упаковки и разбиения множества [84], задача о наибольшей клике [5], задача минимизации полинома от булевых переменных [1] и др. Известна также и обратная сводимость ЗНП к этим задачам [2, 5, 84].

На практике ЗНП возникает при размещении пунктов обслуживания [18, 25], в системах информационного поиска, при назначении экипажей на транспорте [17, 18, 56, 57], проектировании интегральных схем [11] и конвейерных линий [55] и т.д. ЗВП может использоваться при разработке систем контроля и наблюдения [25], в построении помехоустойчивых алгоритмов передачи информации [3, 53, 78], при диагностике оборудования [53, 78] и в других областях.

Значительное внимание в данной работе уделяется алгоритмическим вопросам, связанным с точным и приближенным решением ЗНП. В п.2 обсуждаются свойства релаксационных многогранников задачи, рассматриваются некоторые задачи специальной структуры и вопросы сложности приближенного решения ЗНП и ее частных случаев. В п.3 излагаются основные идеи, используемые в алгоритмах решения ЗНП, приводятся гарантированные оценки точности приближенных алгоритмов и результаты вероятностных исследований. Информация о тестовых примерах, применяемых для сравнения и экспериментального исследования алгоритмов содержится в п.4. Из-за ограниченности объема в данном обзоре доказательства опущены, а на многие важные результаты приведены лишь ссылки.

Необходимо отметить, что в обзоре не затрагиваются вопросы упрощения дизъюнктивных нормальных форм и их связь с ЗНП. Материал по этой проблематике может быть найден в [10, 11, 29, 32]. Кроме того, в обзоре не рассматриваются задачи о покрытии, возникающие в теории кодирования [23], а также задачи о покрытии шарами и другими телами в евклидовом пространстве (см., например, [14, 30]). Далее не обсуждаются и практические приложения ЗНП.

2. Некоторые свойства задачи о наименьшем покрытии

2.1 Многогранники задачи

Многие работы посвящены исследованию релаксационных многогранных множеств $\Omega = \{x|Ax \geq e, \mathbf{0} \leq x \leq e\}$ и $\Omega' = \{x|Ax \geq e, x \geq \mathbf{0}\}$ задачи о наименьшем покрытии. Легко видеть, что при любом векторе $c \geq 0$ целевой функции выполнено

$$\min_{x\in\Omega}(c,x) = \min_{x\in\Omega'}(c,x).$$

Кроме того, многогранник Ω является целочисленным (т.е. все вершины имеют целочисленные координаты) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает и многогранник Ω'. Матрица A, для которой многогранник Ω' является целочисленным называется *идеальной*. Целочисленные многогранники ЗНП представляют большой интерес, т.к. задача в этом случае сводится к решению ЛП-релаксации $\min\{(c,x)|x \in \Omega'\}$, и, следовательно, полиномиально разрешима. Вес оптимального решения ЛП-релаксациии далее будем обозначать через $\bar{f}(c, A)$.

Установлено [71], что для целочисленности Ω' достаточно, чтобы матрица A была уравновешенной, т.е. не содержала квадратных подматриц нечетной размерности, в которых сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна 2 (см. также [6, 33, 54]). Заметим, что любая абсолютно унимодулярная (0,1)-матрица является уравновешенной (см., например, [6]).

Большой вклад в исследование идеальных матриц внесли работы А.Лехмана, в частности, им получена следующая теорема. Пусть B обозначает квадратную подматрицу матрицы A, и $\bar{B}$ – подматрицу, полученную пересечением столбцов, образующих подматрицу B, со всеми оставшимися строками матрицы A (подматрица $\bar{B}$ может быть пуста). Предположим, что вектор-столбец из единиц $\hat{e}$ и вектор-строка из единиц $\bar{e}$ имеют размерности, равные соответственно числу столбцов B и числу строк $\bar{B}$.

Теорема 1 [85] *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Всякая квадратная невырожденная подматрица B матрицы A такая, что $B^{-1}\hat{e} > 0$, и $\bar{B}B^{-1}\hat{e} \geq \bar{e}$, содержит в каждом столбце и каждой строке ровно одну единицу.

(2) Для всяких $c \in R^n_+$ и $y \in R^n_+$ таких, что $Ay \geq e$, и $f^*(c, A) \geq 1$, имеет место неравенство $(c, y) \geq 1$.

(3) $\bar{f}(c, A) = f^*(c, A)$ при любом $c \in R^n_+$.

Легко видеть, что последнее утверждение эквивалентно идеальности матрицы. Пусть $N_i = \{j | 1 \leq j \leq n, i \in M_j\}$, $i = 1, ..., m$. Будем говорить, что строка i *доминирует* строку $k, k \neq i$, если $N_k \subseteq N_i$.

Установлено [85], что свойством идеальности обладают также и подматрицы, полученные из идеальной матрицы под действием следующих двух процедур:

(1) *Удаление столбца* (операция исключения из матрицы столбца j вместе со всеми строками с индексами из M_j);

(2) *Сжатие столбца* (исключение столбца с последующим вычеркиванием всех строк, которые доминируют какие-то другие строки).

Таким образом, естественно рассмотреть *минимальные неидеальные* матрицы, т.е. матрицы, которые не являются идеальными, но любые их подматрицы, полученные удалением и сжатием столбцов – идеальны. В работе [86] формулируются условия, необходимые для того, чтобы матрица была минимальной неидеальной. Установлено, что к числу таких матриц, в частности, относятся $(n \times n)$-матрицы *вырожденной проективной плоскости* F_{n-1}, отвечающие задаче о покрытии, в которой $M_1 = \{2, ..., n\}, M_j = \{1, j\}, j = 2, ..., n$. Одним из следствий результата А.Лехмана [86] является наличие единственной дробной вершины у полиэдра ЗНП с минимальной неидеальной матрицей. Множество новых примеров минимальных неидеальных матриц приводится в работе [61].

В [40] Э.Балашем получена нижняя оценка величины $\bar{f}(e, A)$ для невзвешенных ЗНП с фиксированным значением оптимального целочисленного решения. Через $B(n, p)$ обозначим ЗНП с матрицами A, имеющими C_n^{p-1} различных строк, в каждой из которых содержится ровно p-1 нулей. Очевидно, что для $B(n, p)$ мощность минимального покрытия равна p.

Теорема 2 [40] *Пусть $1 \leq p \leq n$. Тогда для ЛП-релаксаций задач о покрытии, таких что $f^*(e, A) = p$, имеет место оценка:*

$$\bar{f}(e, A) \geq \frac{n}{n - p + 1},$$

причем равенство достигается для ЛП-релаксации задачи $B(n, p)$.

Там же получена верхняя оценка отношения оптимальных значений задач и их линейных релаксаций.

Теорема 3 [40] *Для любой задачи о покрытии с не более чем n переменными выполнено соотношение:*

$$\frac{f^*(e,A)}{\bar{f}(e,A)} \le \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{4}+\frac{1}{2}, & \textit{если } n \textit{ четное,} \\ \frac{n}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}, & \textit{если } n \textit{ нечетное,} \end{cases}$$

и эта оценка достижима при любом n.

В [88] найдена верхняя оценка этого отношения как функция от m. Для общего случая ЗНП аналогичный результат следует из оценки, полученной В.Хваталом [58] при анализе жадного алгоритма. Позднее Н.Н.Кузюриным данная оценка была распространена на задачу с более общей постановкой [21]. Пусть элементы матрицы A – неотрицательные целые числа, и $b \in Z_+^m$. Тогда отношение оптимальных значений целевой функции задачи $\min\{(c,x)|Ax \ge b, x \in Z_+^n\}$ и ЛП-релаксации $\min\{(c,x)|Ax \ge b, x \ge 0\}$ не превышает $(1+\ln(b,e))\max\limits_{i,j} a_{ij}$.

Особую роль многогранник ЛП-релаксации играет при анализе ЗВП. В данном случае ЛП-релаксация обладает свойством *полуцелочисленности*, т.е. у нее существует оптимальное решение $\check{x}$ с компонентами $0, \frac{1}{2}, 1$ (см., например, [81]). Такое решение может быть найдено, в частности, потоковым алгоритмом на вспомогательной сети, состоящей из $2(n+1)$ вершин и $2(m+n)$ дуг. Кроме того, в [91] установлено, что в целочисленных компонентах вектор $\check{x}$ совпадает с некоторым оптимальным решением этой задачи в постановке ЦП вида (1). Таким образом, размерность ЗВП во многих случаях может быть понижена с помощью процедуры предварительной обработки, состоящей в поиске $\check{x}$ и фиксации его целочисленных компонент.

Наряду с Ω и Ω' ведутся исследования многогранника $\mathrm{conv}(\Omega \cap Z^n)$ [44, 45, 54, 62]. В [44] описан класс фасет многогранника задачи о покрытии, определяемых неравенствами вида $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \ge 2$, где $\alpha_j \in \{0,1,2\}$, $j = 1, ..., n$. Позднее те же авторы доказали [45], что любая такая фасета может быть получена путем подъема некоторых неравенств, имеющих только три ненулевых коэффициента. В [62] описан класс фасет вида $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \ge \beta$, где $\alpha_j \in \{0,1\}, j = 1, ..., n, \beta > 0$ – целое.

В последние годы для исследования задач ЦП, анализа и построения алгоритмов их решения развивается метод регулярных разбиений [13]. Многие результаты, в том числе для ЗНП при $c \in Z_+^m$, получены на основе *L-разбиения*, которое определяется следующим образом: точки x, y из R^n $(x \succ y)$ эквивалентны, если не существует $z \in Z^n$ такой, что $x \succeq z \succeq y$. Здесь $\succ, \succeq$ – символы лексикографического сравнения. Элементы данного разбиения называются *L-классами*. L-разбиение обладает свойством согласованности с лексикографическим порядком, т.е. элементы R^n/L могут быть лексикографически упорядочены. Пусть $V_1, V_2 \in R^n/L$. Множество V_1 лексикографически больше V_2 $(V_1 \succ V_2)$, если $x \succ x'$ для всех $x \in V_1$, $x' \in V_2$. Так как для ограниченного множества S фактор-множество S/L конечно, то оно может быть представлено в виде $S/L = \{V_1, V_2, \ldots, V_\theta\}$, где $V_k \succ V_{k+1}$, $k = 1, \ldots, \theta - 1$. Установлено, что многогранник ЗНП Ω обладает *альтернирующей L-структурой*, т.е. в Ω/L допустимые целочисленные точки и дробные L-классы чередуются при их лексикографическом упорядочении, причем $V_1, V_\theta \in Z^n$.

В этом методе рассматривается также релаксационный многогранник

$$\tilde{\Omega} = \{(x_0, x_1, ..., x_n)^T \in R^{n+1} \mid x_0 - (c, x) = 0, x \in \Omega\}.$$

Заметим, что решение *лексикографической задачи* $\mathrm{lexmin}\left(\tilde{\Omega} \cap Z^{n+1}\right)$ равносильно нахождению лексикографически минимального оптимального решения исходной ЗНП. Введем множество $\tilde{\Omega}_*$, называемое *дробным накрытием:*

$$\tilde{\Omega}_* = \{x \in \tilde{\Omega} \mid x \prec z \text{ для всех } z \in \tilde{\Omega} \cap Z^{n+1}\}.$$

Оно соответствует части многогранника $\tilde{\Omega}$, последовательно исключаемой в различных методах решения задач ЦП, основанных на аппарате непрерывной оптимизации. Фактор-множество $\tilde{\Omega}_*/L$ называется *L-накрытием*. Мощность L-накрытия может рассматриваться как обобщение разрыва двойственности $f^*(c, A) - \bar{f}(c, A)$.

С помощью данного подхода получены верхние и нижние оценки числа итераций хорошо известного двойственного дробного процесса отсечения (см., например, [13]) при использовании *L-регулярных* отсечений. Отсечение называется L-регулярным, если оно исключает элемент L-разбиения, содержащий лексикографический минимум текущего многогранника (например, L-регуярными являются некоторые отсечения Гомори). С помощью L-разбиения вводится понятие *глубины отсечения*, под которой понимается число L-классов, полностью исключаемых и из L-накрытия текущей задачи.

Пусть $I(\tilde{\Omega})$ – число отсечений, используемых при решении ЗНП, $H(\tilde{\Omega})$ – верхняя оценка глубины отсечений. Тогда имеют место оценки [13]:

$$\frac{1}{H(\tilde{\Omega})}|\tilde{\Omega}_*/L| \leq I(\tilde{\Omega}) \leq |\tilde{\Omega}_*/L|.$$

В частности, для класса так называемых вполне регулярных отсечений, в котором содержатся отсечения B-алгоритма [15] и алгоритма [36], показано, что $H(\tilde{\Omega}) = n+1$ (см., например, [13]).

2.2 Некоторые специальные классы задач

Пусть $B^N = \{(x_1, \ldots, x_N) | x \in \{0,1\}^N\}$ – единичный N-мерный куб. Под q-м слоем B^N понимается множество $B_q^N = \{x \in B^N | \sum_{j=1}^N x_j = q\}$. Пусть $l < k, \zeta \in B_l^N$ и $\xi \in B_k^N$. Вершина ξ покрывает вершину ζ, если $\zeta_j \leq \xi_j, j = 1, \ldots, N$. Требуется найти мощность минимального покрытия вершин l-го слоя B^N вершинами k-го слоя, которая обозначается через $M(N, k, l)$. Данная задача о покрытии имеет матрицу A размера $C_N^l \times C_N^k$, которая в каждой строке содержит ровно C_{N-l}^{k-l} единиц, а в каждом столбце ровно C_k^l единиц. Семейства таких задач имеют большое значение в комбинаторике. Очевидно, справедлива оценка $M(N, k, l) \geq C_N^l / C_k^l$. При фиксированных k и l, $l < k$ для семейства задач о покрытии l-го слоя B^N вершинами k-го слоя предложен эффективный алгоритм [22], позволяющий строить *асимптотически хорошие* покрытия $J_N(k, l)$, для которых $|J_N(k, l)| \cdot C_k^l / C_N^l \underset{N \to \infty}{\to} 1$. Оценки и точные значения $M(N, k, l)$ для некоторых значений параметров N, k, l даны в [19, 32, 37]. С помощью этих результатов могут быть получены оценки оптимальных решений и для более широкого класса задач (см., например, [19]).

Пусть U – N-элементное множество, l, k – целые числа ($l < k < N$). Подножество множества U, состоящее из q элементов назовем q-подмножеством. *Системой Штейнера* называется семейство S k-подмножеств из U такое, что любое l-подмножество из U содержится ровно в одном k-подмножестве. Вопрос о существовании систем Штейнера для параметров N, k, l связан с определением $M(N, k, l)$. Очевидно, что мощность систем Штейнера, если они существуют, равна C_N^l / C_k^l. Для соответствующей ЗНП в целочисленной постановке это означает, что разрыв двойственности равен 0. С поиском некоторых систем Штейнера связан вопрос о существовании проективных плоскостей заданного порядка (см., например, [19, 37]). Системы Штейнера имеют и прикладное значение, в частности, в области планирования экспериментов.

При экспериментальном исследовании различных алгоритмов решения ЗНП в качестве тестовых задач используются так называемые задачи Штейнера. Это задачи о покрытии с размерностью $m = C_N^2/3$, $n = N$, в которых строки матрицы A составляют систему троек Штейнера, т.е. набор троек N-элементного множества такой, что любая пара его элементов содержится ровно в одной тройке. Необходимым и достаточным условием существования систем троек Штейнера является условие $N \equiv 1, 3 (mod\ 6)$ [35]. Для любого из этих значений N система Штейнера может быть построена рекурсивным методом из некоторых систем троек Штейнера меньшего порядка.

В [31] исследуется L-структура невзвешенных задач о покрытии $B(n, p)$ из семейства, предложенного Э.Балашем [40]. Обозначим через $K(n, p)$ лексикографическую задачу, соответствующую $B(n, p)$. В [31] из семейства [40] выделены задачи, у которых мощность L-накрытия растет экспоненциально с увеличением числа переменных.

Теорема 4 [31] *Для задачи* $K(n, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$ $(n \geq 4)$ *имеет место оценка:*

$$\left| \tilde{\Omega}_* / L \right| \geq \frac{2^{n-4}}{n-3}.$$

Число ограничений в указанных задачах также экспоненциально зависит от n. Легко показать, что эти задачи являются трудными для метода ветвей и границ Лэнд и Дойг. Там же рассмотрены задачи $G(k)$ с $n = 3k$ и матрицей, на диагонали которой расположены блоки размера 3×3 с двумя единицами в каждой строке и столбце.

Теорема 5 [31] *Для задачи* $G(k)$ *имеет место оценка:*

$$|\tilde{\Omega}_* / L| \geq \frac{3^{\frac{n}{3}} - 3}{8}.$$

При решении этих задач одним из известных вариантов 1-го алгоритма Гомори число используемых L-регулярных отсечений не превосходит n, в то время как методу Лэнд и Дойг требуется 2^{k+1} итераций.

2.3 Сложность приближенного решения

Ввиду того, что рассматриваемая задача NP-трудна, естественно искать эффективные приближенные алгоритмы, доставляющие решения со значениями целевой функции, которые "близки" к оптимальным. Далее в качестве приближенных алгоритмов будем рассматривать только полиномиальные алгоритмы. Принято говорить, что приближенный алгоритм для задачи минимизации имеет *мультипликативную* оценку точности δ, если для произвольной индивидуальной задачи получаемое им решение превышает оптимум не более, чем в δ раз (здесь и далее имеется ввиду априорная оценка точности). Для краткости в дальнейшем слово "мультипликативная" будет опускаться.

Интересные результаты по сложности приближенного решения NP-трудных задач получены с использованием вероятностных методов и, в частности, новой вероятностной характеризации класса NP. Установлено [96], что для некоторой константы $\alpha > 0$ существование полиномиального алгоритма, который гарантированно находит решение ЗНП не более, чем в $\alpha \ln m$ раз превышающее оптимум, влечет $P = NP$. Кроме того, в [69] доказано: если справедлива гипотеза $NP \neq DTIME(n^{O(\log\log n)})$, то не существует полиномиального алгоритма с гарантированной оценкой точности $(1-\varepsilon)\ln m$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Известная сводимость ЗНП к задаче о доминирующем множестве вершин сохраняет отношение веса приближенного решения к весу точного. Таким образом, обе задачи одинаково трудны с точки зрения приближенного решения с гарантированной оценкой точности.

В отличие от ЗНП для задачи вершинного покрытия за полиномиальное время может быть получено приближенное решение, не более чем в константу раз превышающее оптимум (известен приближенный алгоритм [46] с оценкой точности $\delta = 2$). Тем не менее, как показано в [79], для ЗВП не существует полиномиального приближенного алгоритма с оценкой точности $\delta < 7/6$ при условии, что $NP \neq P$. Нижние границы точности приближенного решения получены и для некоторых частных случаев этой задачи. Например, в [67] установлено, что на всюду ε-плотном графе решение ЗВП с оценкой точности $\delta < \frac{7+\varepsilon}{6+2\varepsilon}$ является также NP-трудной задачей (при $\varepsilon \in (0,1)$ граф называется *всюду ε-плотным*, если $\min_{v\in V} \deg v \geq \varepsilon|V|$). В [59] найдена нижняя граница точности при ограничении степени вершин сверху.

Одна из первых оценок сложности приближенного решения ЗВП была получена Р.Г.Нигматуллиным в терминах аддитивной точности [28]. Из результатов этой работы для невзвешенной ЗВП следует NP-трудность задачи отыскания покрытия, в котором число вершин превосходит оптимальное значение целевой функции не более, чем на $|V|^{1-\varepsilon}$ при любом заданном $\varepsilon > 0$.

3. Алгоритмы

3.1 Приближенные алгоритмы

Для задач о покрытии разработано значительное число приближенных алгоритмов с априорными оценками точности получаемых решений. Одним из первых приближенных алгоритмов, предложенных для невзвешенной ЗНП, является жадный алгоритм. В этом алгоритме на каждой итерации в качестве очередного элемента покрытия выбирается подмножество, покрывающее наибольшее число элементов из M, не покрытых на предыдущих итерациях. В работе Р.Г.Нигматуллина [29] (см. также [26]) при $f^*(e,A) > 1$ для жадного алгоритма доказана следующая оценка точности:

$$\delta \leq 1 + \frac{\ln m - \ln(f^*(e,A))}{f^*(e,A)\ln(1 + 1/(f^*(e,A)-1))} \leq 1 + \ln m - \ln(f^*(e,A)).$$

Близкий результат был независимо получен в работах Д.Джонсона [82] и Л.Ловаса [88]:

$$\delta \le 1 + \ln(\max_{j=1\dots n} |M_j|). \tag{2}$$

Позднее было установлено [97], что в невзвешенном случае для жадного алгоритма имеет место оценка точности $\ln m - \ln\ln m + 0.78$, которая близка к известной нижней границе [69]. Обозначим мощность покрытия, найденного данным алгоритмом через $f_{gr}(e, A)$. В [26] показано что, если каждая строка матрицы A содержит не менее k единиц, то $f_{gr}(e, A) \le 1 + \frac{n}{k}\left(1 + \ln \frac{mk}{n}\right)$. Очевидно, это неравенство дает также верхнюю оценку мощности оптимального покрытия для указанного класса матриц. В ряде работ (см., в частности, [24, 32, 34]) для некоторых классов невзвешенных задач о покрытии получены неалгоритмические верхние оценки мощности наименьших покрытий.

Для ЗНП с произвольными весами В.Хватал предложил модификацию жадного алгоритма, где на каждой итерации в покрытие включается подмножество M_j с максимальным отношением числа покрываемых элементов, не покрытых на предыдущих итерациях, к весу c_j (в случае, если $c_j = 0$, отношение полагаем равным $+\infty$). Как показано в [58], для данного алгоритма оценка (2) справедлива при любых положительных весах.

С помощью техники рандомизированного округления для обобщенной задачи о покрытии вида $\min\{(c, x) | Ax \ge b, x \in Z_+^n\}$, где $b > 0$, предложен алгоритм с новой оценкой точности [98]:

$$\delta \le 1 + O\left(\max\left\{\ln\left(m\beta/\bar{f}\right)/\beta, \sqrt{\ln\left(2\left\lceil m\beta/\bar{f}\right\rceil\right)/\beta}\right\}\right),$$

где $\bar{f}$ – оптимальное значение целевой функции ЛП-релаксации обобщенной задачи. В основе применяемой здесь техники лежит выявление некоторого распределения вероятностей, при котором близкие к оптимуму допустимые решения появляются достаточно часто (при этом, как правило используется информация о решении ЛП-релаксации задачи). Далее с использованием полученного распределения строится детерминированный алгоритм, в котором на основе решения ЛП-релаксации происходит последовательная фиксация целочисленных значений переменных, округленных вниз или вверх. Данный подход к получению приближенных решений с гарантированными оценками точности был независимо предложен в [94] для задачи об упаковке и в [20] для обобщенной задачи о покрытии.

В случае, когда число единиц в каждой строке матрицы A ограничено сверху константой Δ, известен алгоритм (см., например, [46, 81]) с трудоемкостью $O(mn)$ и оценкой точности Δ (несколько более сильные оценки содержатся в работе [77]).

Для ЗВП вопрос о существовании эффективного алгоритма с оценкой точности меньше 2 до сих пор открыт, однако, для многих частных случаев этой задачи разработаны алгоритмы с более сильными априорными оценками. Например, при условии, что $\max_{v \in V} \deg\, v \le d$, предложен эффективный алгоритм [76] трудоемкости $O(dn^{3/2})$ с оценкой точности $2 - \frac{3}{d+2}$. Известен алгоритм [47] с оценкой $2 - \frac{\ln\ln n}{2\ln n}$ и трудоемкостью $O(n^3)$. В [77] предложен приближенный алгоритм с оценкой точности $2 - (1 - o(1))\frac{2\ln\ln d}{\ln d}$. Для невзвешенной ЗВП на планарном графе существует полиномиальная приближенная схема, а на всюду ε-плотном графе для невзвешенной задачи известен приближенный алгоритм [83] с оценкой $\frac{2}{1+\varepsilon}$ и трудоемкостью $O(mn)$. В [67] данная оценка перенесена на случай взвешенной ЗВП: если для любой $v \in V$ вес смежных с v вершин не превышает $\rho w(V)$, то за время $O(mn)$ строится решение с оценкой точности $\frac{2}{1+\rho}$.

Достаточно подробный обзор по приближенным алгоритмам содержится в [81]. Последние достижения в этой области могут быть найдены в сети Интернет по адресу http://www.nada.kth.se/nada/theory/problemlist (см. [63]).

3.2 Вероятностный анализ задач и алгоритмов

Как отмечалось выше, в худшем случае получение точного или "хорошего" приближенного решения ЗНП представляет большую трудность. В связи с этим естественно возникает вопрос о возможности эффективного решения ЗНП при определенных предположениях о распределении вероятностей исходных данных. Здесь мы рассмотрим некоторые вероятностные результаты, относящиеся к невзвешенным задачам, когда исходные данные представлены случайной матрицей или графом. Как выяснилось, для достаточно широких классов случайных задач при помощи простых эвристик обнаруживаются асимптотически точные решения.

К.Верцеллисом [99] получены асимптотические оценки мощности наименьшего покрытия, когда исходные данные задач образуют случайную последовательность матриц $\{A_{m,n}\}$, где матрица $A_{m,n}$ имеет размерность $(m \times n)$, $m \to \infty$ и $n = n(m)$. Элементы матриц здесь предлагается генерировать независимо, назначая $a_{ij} = 0$ с фиксированной вероятностью q и $a_{ij} = 1$ – в противном случае. Очевидно, в случайной матрице $A_{m,n}$ может содержаться строка из нулей, тогда соответствующая ЗНП оказывается неразрешима.

Теорема 6 [99]

1. Если $n = n(m)$ и $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \frac{n}{\ln m} < \frac{1}{\ln(1/q)}$, то с вероятностью 1 последовательность $\{A_{n,m}\}$ содержит лишь конечное число матриц, имеющих по крайней мере одну единицу в каждой строке.

2. Если $n = n(m)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{n}{\ln m} = \infty$, то с вероятностью 1 последовательность $\{A_{n,m}\}$ содержит лишь конечное число матриц, имеющих строку из нулей.

В [99] также предложен простой полиномиальный алгоритм, являющийся асимптотически точным при указанном способе генерации случайных задач. Обозначим вес решения, полученного этим алгоритмом через $f_a(e, A_{m,n(m)})$. В случае, когда $A_{m,n}$ задает неразрешимую ЗНП, величины $f_a(e, A_{m,n(m)})$ и $f^*(e, A_{m,n(m)})$ будем считать произвольными натуральными числами.

Теорема 7 [99] *Пусть $n = n(m)$, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{n}{\ln m} = \infty$, и найдется число $\alpha > 0$ такое, что $n(m) \le m^\alpha$ при $m = 1, 2, \ldots$. Тогда:*

1. $\frac{f^*(e,A_{m,n(m)})}{\ln m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(1/q)}$ почти наверное.

2. $\frac{f_a(e,A_{m,n(m)})}{f^*(e,A_{m,n(m)})} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$ почти наверное.

Исследование числа итераций одного класса точных алгоритмов при аналогичном распределении случайных матриц проводилось в [87]. В этой работе показано, что трудоемкость рассмотренных там алгоритмов, как правило, существенно ниже по сравнению с их трудоемкостью в худшем случае.

Другой подход к порождению случайных задач использован в работе Н.Н.Кузюрина [19], где случайные матрицы последовательности $\{A_{m(n),n,k(n)}\}$ выбираются с равномерным распределением из множества всех матриц с n столбцами и $m(n)$ строками, содержащих в каждой строке ровно $k(n)$ единиц. В этом случае при некоторых дополнительных предположениях о росте величин $m(n)$ и $k(n)$ для жадного алгоритма доказана сходимость по вероятности $f_{gr}(e, A_{m(n),n,k(n)})/f^*(e, A_{m(n),n,k(n)}) \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Значительное внимание в литературе уделяется задаче вершинного покрытия на случайных графах. При этом многие авторы рассматривают ЗВП на графах G_n из n вершин, где любая пара вершин соединяется ребром с фиксированной вероятностью $p \in (0, 1)$ независимо от наличия других ребер. В частном случае, когда $p = \frac{1}{2}$, данный способ генерации графов дает равномерное распределение на множестве n-вершинных помеченных графов. Следующая теорема В.Паллибланк описывает типичный вид оптимального решения ЛП-релаксации невзвешенной ЗВП.

Теорема 8 [93] *При любом $p \in (0, 1)$ для описанного выше распределения случайных графов ЛП-релаксация ЗВП имеет единственное оптимальное решение $\check{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.*

Таким образом, для почти всех случайных графов предварительная фиксация целочисленных компонент оптимального решения ЛП-релаксации ЗВП не дает понижения размерности задачи (в частности, как показано в [93], при $p = \frac{1}{2}$ и $n = 100$, вероятность присутствия в векторе $\check{x}$ целочисленных компонент не превышает 1.4×10^{-8}).

Асимптотические оценки мощности наименьшего вершинного покрытия $\alpha_0(G_n)$ в случайном графе G_n могут быть легко получены из оценок для наибольшего независимого множества или клики, найденных в целом ряде работ (см., например, [16, 52]). В частности, при любом $p > 0$ установлено существование такого $\gamma(p)$, для которого $\alpha_0(G_n) \geq n - \gamma(p)\ln(n)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, при фиксированном p с ростом n отношение $\frac{n}{\alpha_0(G_n)}$ стремится по вероятности к 1, и любой эвристический алгоритм построения вершинного покрытия является асимптотически точным.

Асимптотические оценки мощности наименьшего доминирующего множества вершин и числа тупиковых (то есть минимальных по включению) вершинных покрытий приводятся в [16]. Р.Г.Нигматуллиным в [27] получены асимптотические оценки числа тупиковых покрытий вершин графа ребрами.

3.3 Эвристики

Для поиска приближенных решений задач большой размерности широкое распространение получили эвристические алгоритмы, в частности, методы лагранжевой релаксации [41, 48, 56], генетические алгоритмы [7, 39, 50], поиск с запретами [95], алгоритмы муравьиной колонии [38], нейронные сети [75] и другие. Большинство эвристических методов основано на частичном переборе покрытий с учетом накапливаемой при этом статистической информации. Как правило, сопоставление эвристик осуществляется на основе вычислительного эксперимента, т.к. гарантированные априорные оценки точности на практике часто оказываются далеки от экспериментальных результатов, а теоретический вероятностный анализ затрудняется сложностью вычислительных схем.

Методы лагранжевой релаксации впервые были предложены для приближенного решения ЛП-релаксации задачи коммивояжера [33, 80] и широко используются для получения оценок оптимального значения целевой функции и построения приближенного решения в различных задачах целочисленного программирования. Отличительная особенность этих методов состоит в том, что они во многих случаях позволяют получать достаточно близкие к оптимуму оценки при сравнительно малых вычислительных затратах.

При решении ЗНП распространен подход, когда каждой строке матрицы A сопоставляется множитель Лагранжа $u_i, i = 1, ..., m$. Для произвольного вектора $u = (u_1, ..., u_m) \in R_+^m$ формулируется подзадача вычисления лагранжиана:

$$L(u) = ue + \min_{x \in \{0,1\}^n} (c^T - uA)x,$$

где подходящий вектор $x(u) = \arg \min_{x \in \{0,1\}^n} (c^T - uA)x$ легко отыскивается аналитически. Заметим, что $\max_{u \geq 0} L(u) = \bar{f}(c, A)$, поэтому подбором вектора u может быть получено точное значение оптимума целевой функции ЛП-релаксации или некоторая нижняя граница $z_L = L(u)$. Как правило, с целью экономии вычислительных затрат ограничиваются приближенным решением задачи максимизации $L(u)$ с помощью эвристической субградиентной процедуры. В процессе выполнения данной процедуры строится последовательность векторов $\{u^{(0)}, u^{(1)}, ..., u^{(\tau)}\}$, $u_i^{(t)} = \max\{0, u_i^{(t-1)} + \sigma_t g_i(u^{(t-1)})\}, i = 1, ..., m$, где $g(u) = e - Ax(u)$ – вектор субградиента, $\sigma_t \in R_+$ – длина шага. Для вычисления оценки z_L используется вектор $\tilde{u} = \arg \max_{t=1,...,\tau} L(u^{(t)})$. Компоненты вектора $c^T - \tilde{u}A$ содержат полезную информацию о "ценности" покрывающих множеств и могут быть использованы в жадных и других эвристиках [41, 42, 56]. Как правило, в процессе работы алгоритма на основе полученного вектора $\tilde{u}$ осуществляется фиксация некоторых переменных задачи, после чего в очередной раз выполняется процедура субградиентной оптимизации. Судя по экспериментальным данным из публикаций, вычислительная схема [56] по качеству решений представляется наиболее перспективной среди известных нам эвристик, основанных на лагранжевой релаксации.

Генетический алгоритм (ГА) представляет собой эвристический метод случайного поиска, основанный на принципе имитации эволюции биологической популяции [74]. В большинстве вариантов ГА для ЗНП в процессе работы алгоритма происходит последовательная смена популяций, каждая из которых является семейством покрытий, называемых особями популяции. Покрытия начальной популяции строятся некоторым случайным способом. Лучше других зарекомендовала себя стационарная схема ГА, в соответствии с которой очередная популяция отличается от предыдущей лишь одной или двумя новыми особями (см., например, [7, 43, 50]). При построении новой особи из текущей популяции с учетом весов покрытий выбирается пара "родительских" особей J', J'', и на их основе в процедуре *кроссинговера* (случайно или детерминировано) формируется некоторый набор покрывающих множеств J_χ. Далее J_χ подвергается *мутации* (случайному изменению), после чего из него строится особь, которая замещает в новой популяции покрытие с наибольшим весом. Обновление популяции выполняется заданное число раз, и результатом работы алгоритма является лучшее из найденных покрытий.

В процедуре кроссинговера генетического алгоритма Дж.Бисли и П.Чу [50] набор J_χ заполняется случайно выбранными элементами "родительских" покрытий. Полученный после мутации набор покрывающих множеств может не быть покрытием, в таком случае он дополняется до допустимого решения с помощью жадного алгоритма. Другой вариант ГА разработан в [7] с использованием вычислительной схемы, сохраняющей допустимость решений при кроссинговере и мутации. Заметное повышение качества получаемых решений дало здесь применение кроссинговера, в котором набор J_χ формируется из объединения "родительских" покрытий по возможности оптимальным образом. Рассматривались также варианты ГА, где элементами популяции могут быть произвольные наборы покрывающих множеств (не только покрытия), однако, судя по результатам экспериментальных исследований [39], такие вычислительные схемы уступают описанным выше. Для одного варианта ГА в [66] получены априорные оценки вероятностей появления особей заданного качества при решении задач о покрытии семейства $G(k)$ из [31] и некоторых других задач.

Принципы коллективного поиска используются также в алгоритмах муравьиной колонии [38], где многократное применение рандомизированного жадного алгоритма с учетом статистической информации имитирует поведение муравьев. Работоспособность таких алгоритмов, как и алгоритмов поиска с запретами [95] пока трудно сравнить с результатами других авторов из-за различия в способах экспериментального исследования.

3.4 Точные методы

Как было отмечено выше, точное решение ЗНП может быть получено за полиномиальное время в случае, когда матрица A идеальна. Сюда относятся, например, ЗВП на двудольном графе и на дереве. Эффективные точные алгоритмы известны и для некоторых задач о покрытии, в которых многогранник, вообще говоря, не обладает свойством целочисленности. В частности, в случае, когда каждый столбец матрицы A содержит ровно две единицы, ЗНП можно рассматривать как задачу реберного покрытия графа, которая эффективно сводится к поиску максимального паросочетания [18]. На классах задач, где n или m ограничены константой, ЗНП за полиномиальное время решается методами полного перебора. Кроме того, в [83] для невзвешенного случая установлена полиномиальная разрешимость так называемых сверхплотных ЗНП.

Для решения задач о покрытии общего вида предложено большое число точных алгоритмов, основанных на методах ветвей и границ [4, 11, 18, 41, 42, 51, 70], отсечения [42, 73], перебора L-классов [12, 68] и др. Известные верхние оценки трудоемкости точных методов в худшем случае, как правило, оказываются сопоставимы с трудоемкостью полного перебора (см., например, [13, 31, 87]). В связи с этим большую актуальность при решении практических задач приобретают различные эвристические методы сокращения перебора. Значительное внимание уделяется разработке гибридных алгоритмов, в которых переборные схемы комбинируются с отсечениями и различными эвристиками для получения верхних и нижних оценок оптимума целевой функции на вспомогательных подзадачах.

Работа [42] Э.Балаша и А.Ху – одна из первых статей, где схема ветвей и границ для ЗНП была успешно совмещена с лагранжевой эвристикой. Эта работа оказала большое влияние на последующие исследования в данном направлении. С использованием аналогичного подхода в [51] был предложен гибридный алгоритм ветвей и границ, включающий в себя отсечения Гомори, лагранжеву релаксацию и другие эвристики. Хорошие вычислительные свойства в эксперименте продемонстрировал алгоритм [41], также основанный на схеме ветвей и границ. Отличительной особенностью этого алгоритма является *динамическая субградиентная процедура*, используемая для решения подзадач лагранжевой релаксации. С помощью алгоритма [41] успешно решались тестовые задачи со случайными данными до 4000 переменных [49], а также задачи назначения экипажей с реальными данными при n, близких к 10^4. Другой перспективный подход к поиску нижних границ использован в алгоритме М.Фишера и П.Кедиа [70]. Этот алгоритм применим не только для ЗНП, но и для задач, где часть ограничений-неравенств заменена на равенства.

В [12] общий метод перебора L-классов [13] был адаптирован к решению ЗНП. Этот алгоритм основан на лексикографическом упорядочении элементов L-разбиения релаксационного многогранника и последовательном их исключении при помощи решения линейных подзадач. В гибридном алгоритме [68] перебор L-классов комбинируется с генетическим алгоритмом [7] и лагранжевой эвристикой. В разработанной здесь схеме генетический алгоритм используется для нахождения начального решения, а с помощью лагранжевой эвристики строятся нижние и верхние оценки целевой функции на подзадачах, возникающих в процессе перебора L-классов. Эксперименты показали перспективность гибридного подхода. Время решения задач гибридным алгоритмом как правило было в несколько раз меньше по сравнению с базовым алгоритмом [12].

Здесь мы не останавливаемся на точных и эвристических алгоритмах для ЗВП. Некоторые алгоритмы, разработанные для эквивалентных ей задач о клике и независимом множестве наибольшего веса могут быть найдены в [43, 53, 60, 89].

4. Тестовые задачи и экспериментальные исследования

В настоящее время имеется достаточно большой объем тестовых задач для экспериментального исследования и сравнения алгоритмов. Множество тестовых задач можно разбить на три основные группы: задачи специальной структуры [7, 31, 72, 75], прикладные задачи (см., например, [41, 56, 95]) и задачи со случайными исходными данными [38, 42, 51].

Значительная часть этих задач доступна в сети Интернет и используется многими авторами. В частности, большое количество примеров содержится в электронных библиотеках OR-Library [49] (http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html) и DIMACS Challange II [60] (ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/). В нашем институте совместно с ОмГУ также разрабатывается библиотека задач и алгоритмов дискретной оптимизации DOL, включающая задачи о покрытии (http://dol.iitam.omsk.net.ru).

4.1 Тестовые задачи специальной структуры

При сравнении алгоритмов многими авторами используются невзвешенные ЗНП, возникающие в комбинаторике. Например, представляют интерес упоминавшиеся ранее задачи на системах троек Штейнера. Как было отмечено в [72], задачи этого типа представляют большую трудность для решения с помощью точных алгоритмов. Судя по публикациям, оптимальные решения известны для таких задач с размерностью до

81 переменной [90]. Новые приближенные решения для некоторых примеров большей размерности получены в [92].

В экспериментах также используются примеры, связанные с известной задачей П.Эрдеша [37, 64] о раскраске гиперграфа: найти минимальное число $m_d(r)$ таких r-элементных подмножеств из базового d-элементного множества U, чтобы при любой раскраске элементов из U в два цвета хотя бы одно выбранное r-элементное подмножество оказывалось монохроматическим. Предполагается, что $d \geq 2r - 1$.

При данных r и d эта задача сводится к ЗНП, в которой M – множество всевозможных раскрасок базового множества, а число покрывающих подмножеств равно числу r-элементных подмножеств в U. Подмножество из r элементов покрывает раскраску множества U, если при данной раскраске это подмножество оказывается монохроматично. Легко видеть, что при фиксированном r величина $m_d(r)$ невозрастает с ростом d. Как правило, в экспериментах рассматривается случай $r = 4$. Для этого случая при $d = 9$ минимальное покрытие состоит из 26 элементов [68]. Лучшие известные покрытия для $d = 10, 11, 12, 13$ состоят, соответственно, из 25,23,23,23 элементов [7, 75], однако, нам не известно, являются ли эти значения минимальными.

Другая серия трудных комбинаторных примеров связана с вопросом П.Эрдеша [65, 75] о покрытии ребрами 4-элементных циклов в гиперкубе (считается, что ребро покрывает цикл, если цикл содержит это ребро). Перечисленные тестовые примеры содержатся в библиотеке OR-Library.

При тестировании точных и эвристических алгоритмов для ЗВП могут использоваться серии примеров специальной структуры [78], предложенных для задачи о наибольшей клике (после перехода к дополнительному графу). Задачи Штейнера также могут быть сформулированы, как ЗВП на графе специального вида (см., например, [89]). Эти примеры содержатся в библиотеке DIMACS.

4.2 Задачи со случайными данными и задачи из практики

Для сравнения алгоритмов решения ЗНП в настоящее время используется большое число задач, построенных случайным образом. Наиболее известны серии 4,5,6 с размерностью $n = 1000 \div 2000, m = 200$, предложенные в работе Э.Балаша и А.Ху [42], а также серии A,B,...,H задач большей размерности ($n = 3000 \div 10000, m = 300 \div 1000$), сгенерированные Дж.Бисли (см., например, [48]) аналогично сериям 4,5,6. Эти задачи построены с заданной разреженностью матрицы (2% единиц в сериях 4,5,A,C,G; 5% единиц в сериях 6,B,D,H; 10% и 20% единиц в сериях E и F соответственно), причем каждая строка содержит по крайней мере две единицы и каждый столбец – по крайней мере одну. Веса выбраны случайным образом в диапазоне от 1 до 100. Широкий разброс весов и небольшая плотность этих задач позволяют существенно уменьшить число анализируемых вариантов в точных алгоритмах по сравнению с полным перебором (см., например, [51]). Исходные данные описанных задач доступны в библиотеке OR-Library. Достаточно трудные случайные задачи размерности $n = 100, m = 100$ построены в [38] (серия E5). В этих задачах все веса равны единице, а матрица содержит по 5 единиц в каждой строке.

Для ЗВП также известны многочисленные тестовые примеры на графах, построенных случайным образом. Описание таких невзвешенных задач содержится в [60], где рассматриваются эквивалентные задачи о клике, исходные данные которых доступны в библиотеке DIMACS. Также в литературе приводится описание экспериментов с задачами на графах со случайными весами вершин [43]. Программы генерации взвешенных ЗВП на всюду ε-плотных графах и некоторые примеры, предложенные Ю.А.Кочетовым, доступны в библиотеке DOL.

В экспериментах также используются исходные данные, связанные с практикой. Задачи, возникающие при составлении расписания машинистов на железной дороге, используются в [56], а в [41, 95] – задачи, связанные с оптимизацией расписания водителей автобусов. Данные примеров из работы [56] содержатся в электронной библиотеке OR-Library. Они отличаются большой размерностью (до 5×10^3 ограничений и 1×10^6 переменных) и сильной разреженностью матриц. Коэффициенты целевой функции принадлежат множеству $\{1, 2\}$.

По результатам известных нам экспериментов можно сделать вывод о том, что в настоящее время достаточно устойчиво решаются ЗНП с малой зависимостью в распределении элементов матрицы A, а также в случае разреженных матриц. Значительное упрощение задачи вызывает широкий разброс коэффициентов целевой функции. Вместе с тем имеются задачи специальной структуры относительно небольшой размерности, решение которых представляет значительную трудность.

В случае задач большой размерности перспективной, на наш взгляд, является разработка лагранжевых эвристик, генетических алгоритмов, алгоритмов поиска с запретами, а также гибридных алгоритмов.

Подробные результаты экспериментальных исследований могут быть найдены в [7, 38, 41, 42, 50, 51, 56].

Авторы благодарны А.Д.Закревскому, Ю.А.Кочетову и Н.Н.Кузюрину за ряд ценных советов при подготовке этой статьи.

Список литературы

[1] **Агеев А.А.** О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 23. С. 3-11.

[2] **Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.

[3] **Берж К.** Теория графов и ее применения. М.: ИЛ, 1962.

[4] **Герман О.В., Ефремов О.В.** Алгоритм решения обобщенной задачи о покрытии // Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34, вып. 4. С. 134-140.

[5] **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[6] **Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

[7] **Еремеев А.В.** Генетический алгоритм для задачи о покрытии // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, N 1. С. 47-60.

[8] **Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А.** Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Материалы конференции "Дискретный анализ и исследование операций". Новосибирск, 2000. С. 37-41.

[9] **Журавлев Ю.И.** Теоретико-множественные методы алгебры логики. // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5-44.

[10] **Журавлев Ю.И.** Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Ред. С.В.Яблонский, О.Б.Лупанов. М.: Наука. 1974. С. 67-98.

[11] **Закревский А.Д.** Логический синтез каскадных схем. М.:Наука, 1981.

[12] **Заозерская Л.А.** Об одном алгоритме перебора L-классов для решения задачи о покрытии множества // Тр. 11-й Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 1998. Т. 1. С. 139-142.

[13] **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т.1, N 2. С. 18-39.

[14] **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.

[15] **Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.** Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.

[16] **Коршунов А.Д.** Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи мат. наук. 1985. Т.40, Вып. 1. (241) С. 107-173.

[17] **Кофман А., Анри-Лабордер А.** Методы и модели исследования операций. М: Мир, 1977.

[18] **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

[19] **Кузюрин Н.Н.** Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. 1980. Вып. 37. С. 19-57.

[20] **Кузюрин Н.Н.** Асимптотически точные полиномиальные алгоритмы в задачах целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. 1989. Т. 1, Вып. 2. С. 78-85.

[21] **Кузюрин Н.Н.** О связи оптимумов в задачах линейного и целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. 1991. Т. 3, Вып. 1. С. 100-104.

[22] **Кузюрин Н.Н.** О сложности построения асимптотически оптимальных покрытий и упаковок // Докл. РАН. 1998. Т. 363, N 1. С. 11-13.

[23] **Левенштейн В.И.** Элементы теории кодирования // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Ред. С.В.Яблонский, О.Б.Лупанов. М.: Наука. 1974. - С. 207-305.

[24] **Леонтьев В.К.** Верхняя оценка α-глубины (0,1)-матриц // Матем. заметки. 1974. Т. 15, N 3. С. 421-429.

[25] **Нечепуренко М.И., Попков В.К., Майнагашев С.М., и др.** Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск: Наука, 1990.

[26] **Нигматуллин Р.Г.** Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов (труды симпозиума). Киев, 1969. Вып. 5. С. 116-126.

[27] **Нигматуллин Р.Г.** О числе неприводимых покрытий графа ребрами // Кибернетика. 1970. N 2. С. 95-98.

[28] **Нигматуллин Р.Г.** О приближенных алгоритмах с ограниченной абсолютной погрешностью для дискретных экстремальных задач // Кибернетика. 1978. N 1. С. 95-101.

[29] **Нигматуллин Р.Г.** Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[30] **Роджерс К.** Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

[31] **Сайко Л.А.** Исследование мощности L-накрытий некоторых задач о покрытии // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем: Сб. научн. тр. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1989. С. 76-97.

[32] **Сапоженко А.А., Асратян А.С., Кузюрин Н.Н.** Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Новосибирск, 1977. Вып. 30. С.46-75.

[33] **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. Т.2. М.: Мир. 1991.

[34] **Тараканов В.Е.** Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука. 1985.

[35] **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[36] **Червак Ю.Ю.** Об одном методе отсечений для дискретных задач// Укр. мат. журн. 1971. N.6. С.839-843.

[37] **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.

[38] **Alexandrov D., Kochetov Y.** Behavior of the ant colony algorithm for the set covering problem // Proc. of Symp. on Oper. Res. (SOR'99). Springer Verlag, 2000. P.255-260.

[39] **Bäck Th., Schültz M., Khuri S.** A comparative study of a penalty function, a repair heuristic, and stochastic operators with the set-covering problem // Proc. of Artificial Evolution Conf. LNCS 1063. Springer Verlag, 1996. P. 3-20.

[40] **Balas E.** A sharp bound on the ratio between optimal integer and fractional covers // Math. Oper. Res. 1984. Vol. 9, N 1. P.1-5.

[41] **Balas E., Carrera M.C.** A dynamic subgradient-based branch and bound procedure for set covering // Oper. Res. 1996. Vol. 44, N 6. P.875-890.

[42] **Balas E., Ho A.** Set covering algorithms using cutting planes, heuristics and subgradient optimization: a computational study // Math. Prog. Study. 1980. Vol. 12. P. 37-60.

[43] **Balas E., Niehaus W.** Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // J. of Heuristics. 1998. Vol. 4, N 2, P.107-122.

[44] **Balas E. and Ng S.M.** On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in $\{0, 1, 2\}$ // Math. Prog. 1989. N 43. P. 57-69.

[45] **Balas E. and Ng S.M.** On the Set Covering Polytope: II. Lifting the facets with coefficients in {0,1,2} // Math. Prog. 1989. N 45. P. 1-20.

[46] **Bar-Yehuda R., Even S.** A linear time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem // J. of Algorithms. 1981. Vol. 2. P.198-203.

[47] **Bar-Yehuda R., Even S.** A local-ratio theorem for approximating the weighted vertex cover problem // Annals of Discr. Math. 1985. Vol. 25. P.27-45.

[48] **Beasley J.E.** A Lagrangean heuristic for set covering problems // Naval Research Logist. 1990. Vol. 37. P.151-164.

[49] **Beasley J.E.** OR-Library: distributing test problems by electronic mail // J. Oper. Res. Soc. 1990. Vol. 41, N 11. P. 1069-1072.

[50] **Beasley J.E., Chu P.C.** A genetic algorithm for the set covering problem // European J. Oper. Res. 1996. Vol. 94, N 2. P.394-404.

[51] **Beasley J.E., Jornsten K.** Enhancing an algorithm for set covering problems // European J. Oper. Res. 1992. Vol. 58. P.293-300.

[52] **Bollobás B.** Random graphs. New York: Academic Press. 1985.

[53] **Bomze I. M., Budinich M., Pardalos P. M., Pelillo M.** The maximum clique problem // Handbook of combinatorial optimization. / Ed. by D.-Z. Du and P. M. Pardalos. Vol. A. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999. P.1-74.

[54] **Borndörfer R.** Aspects of set packing, partitioning, and covering. Berlin: Shaker Verlag. 1998.

[55] **Brauner N., Dhaenens-Flipo C., Espinouse M.-L., Finke G., Gavranovic H.** Decomposition into parallel work phases with application to the sheet metal industry // Proc. of International Conference on Industrial Engineering and Production Management (IEPM'99). Glasgow, 1999. Vol. 1. P.389-396.

[56] **Caprara A., Fischetti M., Toth P.** Algorithms for the set covering problem / DEIS - Operations Research Group. 1998. Technical Rep. No. OR-98-3.

[57] **Caprara A., Fischetti M., Toth P., Vigo D.** Modeling and solving the crew rostering problem // Oper. Res. 1998. Vol. 46. P.820-830.

[58] **Chvátal V.** A greedy heuristic for the set-covering problem // Mathematics of Oper. Res. 1979. Vol. 4, N 3. P.233-235.

[59] **Clementi A.E.F., Trevisan, L.** Improved non-approximability results for vertex cover with density constraints // Proc. of 2nd Computing and Combinatorics Conference (COCOON'96). LNCS 1090. Berlin: Springer Verlag, 1996. P.333-342.

[60] **Cliques, coloring, and satisfiability.** /Ed. by D.S.Johnson, M.A.Trick. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Vol. 26. AMS, 1996.

[61] **Cornuejols G., Novick B.** Ideal 0,1 matrices // J. of Combinatorial Theory. Series B. 1994. Vol. 60. P.145-157.

[62] **Cornuejols G., Sassano A.** On the 0,1 facets of the set covering polytope // Math. Prog. 1989. Vol. 43. P.45-55.

[63] **Crescenzi P., Kann V.** How to find the best approximation results - a follow-up to Garey and Johnson // 1998. ACM SIGACT News. Vol. 29, N 4. P.90-97.

[64] **Erdös P.** On a combinatorial problem I // Nordisk Mat. Tidskrift. 1963. Vol. 11. P.5-10.

[65] **Erdös P.** On some of my favorite problems in graph theory and block designs // Le Matematishe. 1990. Vol. 45. P.61-74.

[66] **Eremeev A.V.** Modeling and Analysis of Genetic Algorithm with Tournament Selection // Proc. of The 4th Artificial Evolution Conference. Dunkerque, 1999. P.215-226.

[67] **Eremeev A.V.** On some approximation algorithms for dense vertex cover problem // Proc. of Symp. on Oper. Research (SOR'99). Springer Verlag, 2000. P.58-62.

[68] **Eremeev A.V., Kolokolov A.A., Zaozerskaya L.A.** A hybrid algorithm for set covering problem // To appear in Proc. of International Workshop on Discrete Optimization Methods in Sheduling and Computer-Aided Design. Minsk, 2000. P.123-129.

[69] **Feige U.** A threshold of $\ln n$ for approximating set cover // Proc. 28th Ann. ACM Symp. on Theory of Comp., ACM Press, 1996. P.314-318.

[70] **Fisher M.L., Kedia P.** Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics // Manag. Sci. 1990. Vol. 36. P.674-688.

[71] **Fulkerson D.R., Hoffman A.J., Oppenheim R.** On balanced matrices // Math. Prog. Study. 1974. Vol. 1. P.120-132.

[72] **Fulkerson D.R., Nemhauser G.L., Trotter L.E.** Two computationally difficult set covering problems that arise in computing the 1-width of incidence matrices of Steiner triple systems // Math. Prog. Study. 1974. Vol. 2. P.72-81.

[73] **Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.** Integer programming. Wiley, N.Y. 1972.

[74] **Goldberg D.E.** Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison Wesley. 1989.

[75] **Grossman T., Wool A.** Computational experience with approximation algorithms for the set covering problem // European J. Oper. Res. 1997. Vol. 101, N 1. P.81-92.

[76] **Halldórsson M.M., Lau H.C.** Low-degree graph partitioning via local search with applications to constraint satisfaction, max cut, and coloring // J. of Graph Algorithms and Applications. 1997. Vol. 1, N 3. P.1-13.

[77] **Halperin E.** Improved approximation algorithms for the vertex cover problem in graphs and hypergraphs // Proc. 11th Ann. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms. 2000. P.329-337.

[78] **Hasselberg J., Pardalos P.M., Vairaktarakis G.** Test case generators and computational results for the maximum clique problem// J. of Global Optimization. 1993. N 3. P.463-482.

[79] **Håstad J.** Some optimal inapproximability results / Electronic Colloquium on Computational Complexity. Trier. 1997. Technical Report No. TR-97-037.

[80] **Held M, Karp R.M.** The traveling-salesman problem and minimum spanning trees // Oper. Res. 1970. Vol. 18. P.1138-1162.

[81] **Hochbaum D.S.** Approximating covering and packing problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems // Approximation algorithms for *NP*-hard problems / Ed. by D.S.Hochbaum. PWS Publishing Company, 1995. P.94-143.

[82] **Johnson D.S.** Approximation algorithms for combinatorial problems // J. Comput. Sci. 1974. Vol. 9. P.256-278.

[83] **Karpinski M., Zelikovsky A.** Approximating dense cases of covering problems // Proc. of the DIMACS Workshop on Network Design: Connectivity and Facilities Location. Princeton, 1998. P. 169-178.

[84] **Krarup J., Pruzan P.M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. Vol. 12, N 1. P.36-81.

[85] **Lehman A.** On the width-length inequality // Math. Prog. 1979. Vol. 17. P.403-417.

[86] **Lehman A.** On the width-length inequality and degenerate projective planes // Polyhedral combinatorics. / Ed. by W.Cook and P.D.Seymour. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1990. Vol. 1. AMS. P.101-105.

[87] **Lifschitz V., Pittel B.** The worst and the most probable performance of a class of set-covering algorithms // SIAM J. Comput. 1983. Vol. 12, N 2. P.329-346.

[88] **Lovász L.** On the ratio of optimal integral and fractional covers // Discrete Math. 1975. Vol. 13. P.383-390.

[89] **Mannino C. Sassano A.** An exact algorithm for the maximum stable set problem // Computational Optimization and Applications. 1994. Vol. 3. P. 243-258.

[90] **Mannino C., Sassano A.** Solving hard set covering problems // Oper. Res. Letters. 1995. Vol. 18. P.1-5.

[91] **Nemhauser G.L., Trotter L.E.** Vertex packings: structural properties and algorithms // Math. Prog. 1975. Vol. 8. P.232-248.

[92] **Odijk M.A., van Maaren H.** Improved solutions to the Steiner triple covering problem // Inform. Processing Letters. 1998. Vol. 65. P.67-69.

[93] **Pulleyblank W.R.** Minimum node covers and 2-bicritical graphs // Math. Prog. 1979. Vol. 17. P.91-103.

[94] **Raghavan P.** Probabilistic construction of deterministic algorithms: approximating packing integer programs // Journal of Computer and System Sciences. 1988. Vol. 37. P.130-143.

[95] **Ramalhinho H., Pinto R., Portugal R.** Metaheuristics for the bus-driver scheduling problem / Univ. Pompeu Fabra. Economic Working Papers Series. 1998. Technical Report No. 304.

[96] **Raz R., Safra S.** A sub-constant error-probability low-degree test, and sub-constant error-probability PCP characterization of NP // Proc. of 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1997. P. 475-484.

[97] **Slavik P.** A tight analysis of the greedy algorithm for set cover // J. of Algorithms. 1997. Vol. 25. P.237-254.

[98] **Srinivasan A.** Improved approximation guarantees for packing and covering integer programs // SIAM J. on Comput. 1999. Vol. 29. P.648-670.

[99] **Vercellis C.** A probabilistic analysis of the set covering problem // Annals of Oper. Res. 1984. Vol. 1. P.255-271.