

Приближенные алгоритмы для задачи open shop с зависящими от потребления ресурса длительностями операций

Ю.В. Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015, <https://rscf.ru/project/22-71-10015/>.

Структура доклада

- ▶ Постановка задачи и приложения
- ▶ Различные варианты задачи
- ▶ Методы решения
- ▶ Обобщение подходов и планы

Вдохновляющие статьи

- ▶ Vampis E., Letsios D., Lucarelli G. A note on [multiprocessor speed scaling with precedence constraints](#) (2014)
- ▶ Benoit A., Canon L. C., Elghazi R., and Heam P. C. List and shelf schedules for [independent parallel tasks](#) to minimize the energy consumption with discrete or continuous speed (2023)
- ▶ Kononov A., Zakharova Yu. Speed scaling scheduling of [multiprocessor jobs with energy constraint and makespan criterion](#) (2022)
- ▶ Ji M., Yao D.L., Ge J.J., Chen, T.C.E. Single-machine slack duedwindow assignment and scheduling with past-sequence-dependent delivery times and [controllable job processing times](#). (2015, электротехника, схемотехника, обработка металла)

$$p_j(R_j) = \left(\frac{Ch_j}{R_j} \right)^\kappa,$$

где $0 < \kappa < 1$ – заданная константа, Ch_j – характеристика объема работы $j \in J$, R_j – объем ресурса, потребляемый работой $j \in J$.

Постановка задачи open-shop

- ▶ $J = \{1, \dots, n\}$ – множество работ
- ▶ $P = \{1, \dots, m\}$ – множество процессоров
- ▶ O_{j1}, \dots, O_{jm} – операции работы j
- ▶ операция O_{ji} : процессор i , объем W_{ji}
- ▶ В каждый момент времени каждый процессор может выполнять не более одной операции, а также в каждый момент времени не может выполняться более одной операции каждой работы.

Потребление энергии

Скорость

Если операция O_{ji} выполняется со скоростью s_{ji} , то потребление энергии в единицу времени составляет s_{ji}^α ($\alpha > 1$ – константа)

Динамическая составляющая

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha$$

Статическая составляющая

$$m \cdot P_{stat} \cdot C_{max}$$

Расход энергии как ограничение

Непрерывное множество скоростей [Vampis et. al.]

Длительности операций и нижняя оценка

$$LB \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i \in P, \quad (2)$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^m p_{ij}, \quad j \in J, \quad (3)$$

$$E \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha + (m \cdot LB \cdot P_{stat}), \quad (4)$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad j \in J, \quad i \in P. \quad (5)$$

2-приближенный алгоритм

Как только освобождается процессор $i \in P$ запускаем на нем операцию O_{ji} работы $j \in J$, которая в этот момент не выполняется ни на каком другом процессоре.

Непрерывное множество скоростей: частные случаи

Труднорешаемость ($m \geq 3$)

При $m = 3$ задача является NP-трудной. Для сводимости используется задача Разбиение.

Полиномиальная разрешимость ($m = 2$)

$$LB \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$LB \geq p_{1j} + p_{2j}, \quad j \in J, \quad (8)$$

$$E \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha, \quad (9)$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad j \in J, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Непрерывное множество скоростей: частные случаи

Идея алгоритма

J_1 – множество работ, для которых $p_{1j} \leq p_{2j}$.

Пусть $J_2 = J \setminus J_1$.

Идентифицируем работу $k \in J_1$, для которой

$$p_{2k} \geq \max\{p_{1j}, j \in J_1\},$$

и работу $r \in J_2$, для которой $p_{1r} \geq \max\{p_{2j}, j \in J_2\}$.

Трудоемкость – $O(n)$.

Свойство

Одно из расписаний, задаваемых перестановками

($?$; $\pi_{J_1 \setminus \{k\}}$; $\pi_{J_2 \setminus \{r\}}$; $?$), где работы k , r стоят в начале или в конце расписания, будет иметь длину расписания, равную LB .

Дискретные скорости и прерывания

C – множество допустимых конфигураций операций на процессорах, которые могут выполняться параллельно.

Конфигурация c задается набором операций O_c и скоростью $s_{i,j,c}$ каждой операции $(i, j) \in O_c$.

Мгновенная мощность для $c \in C$ – $E_c = \sum_{(i,j) \in O_c} (s_{i,j,c})^\alpha + mP_{stat}$.

Переменная x_c – длительность конфигурации $c \in C$.

Модель выпуклого программирования

$$\sum_{c \in C} x_c \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$\sum_{c \in C: (i,j) \in O_c} \frac{s_{i,j,c} x_c}{W_{ij}} \geq 1, \quad (i, j) \in O, \quad (12)$$

$$-\sum_{c \in C} E_c x_c \geq -E. \quad (13)$$

Дискретные скорости и прерывания

Прямая задача

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C} x_c &\rightarrow \min, \\ \sum_{c \in C: (i,j) \in O_c} \frac{s_{i,j,c} x_c}{W_{ij}} &\geq 1, (i,j) \in O, \\ -\sum_{c \in C} E_c x_c &\geq -E, \\ x_c &\geq 0, c \in C. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in O} \lambda_{ij} - E\mu &\rightarrow \max, \\ \sum_{(i,j) \in O_c} \frac{s_{i,j,c} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} - E_c \mu &\leq 1, c \in C, \\ \lambda_{ij} &\geq 0, (i,j) \in O, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

Дискретные скорости и прерывания

Отделяющий оракул

При заданном решении $(\lambda_{i,j}, \mu)$ определяет является ли решение допустимым, и если ответ отрицательный, то идентифицирует нарушенное ограничение.

Наилучшая скорость

Для каждой операции (i, j) скорость v_{ij} отыскивается как одна из ближайших к величине $\left(\frac{\lambda_{ij}}{W_{ij} \alpha \mu}\right)$.

Максимальное паросочетание

$$\sum_{(i,j) \in O_c} \left(\frac{v_{i,j} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^\alpha \mu \right) \rightarrow \max.$$

Двудольный граф $G = (J, P, E)$.

Доли вершин $J, P \longleftrightarrow$ работы и процессоры.

Ребра $E \longleftrightarrow$ операции (i, j) с весами $\left(\frac{v_{i,j} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^\alpha \mu\right)$.

Дискретные скорости и прерывания

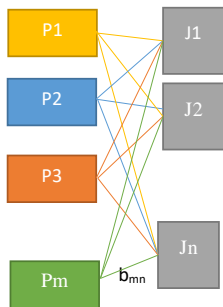
Максимальное паросочетание

$$\sum_{(i,j) \in O_c} \left(\frac{v_{i,j} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^\alpha \mu \right) \rightarrow \max.$$

Двудольный граф $G = (J, P, E)$.

Доли вершин $J, P \longleftrightarrow$ работы и процессоры.

Ребра $E \longleftrightarrow$ операции (i, j) с весами $b_{ij} = \left(\frac{v_{i,j} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} - (v_{i,j})^\alpha \mu \right)$.



Минимизация расхода энергии

Минимизация расхода энергии Длительности операций и нижняя оценка

$$E_{LB} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha + LB \times P_{stat} \times m \rightarrow \min, \quad (14)$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i \in P, \quad (15)$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^m p_{ij}, \quad j \in J. \quad (16)$$

2-приближенный алгоритм

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha + C_{\max}(p_{ij}) \times P_{stat} \times m \leq 2E_{LB}.$$

Как только освобождается процессор $i \in P$ запускаем на нем операцию O_{ji} работы $j \in J$, которая в этот момент не выполняется ни на каком другом процессоре.

Минимизация расхода энергии: частные случаи

Труднорешаемость ($m \geq 3$)

При $m = 3$ задача является NP-трудной. Для сводимости используется задача Разбиение.

Полиномиальная разрешимость ($m = 2$)

$$E_{LB} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^\alpha + 2LB \times P_{stat} \rightarrow \min,$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i = 1, 2,$$

$$LB \geq \sum_{i=1}^m p_{ij}, \quad j \in J.$$

Минимизация расхода энергии: одна скорость

Обозначения

$$W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}.$$

$E(\sigma, s_\sigma) = W s_\sigma^\alpha + m C_{\max}(\sigma) P_{stat}$ – потребление энергии для расписания σ при скорости s_σ .

Выбор скорости

Пусть дано расписание σ с единичными скоростями операций. Тогда минимальное потребление энергии для этого расписания достигается при скорости

$$s_\sigma^E = \left(\frac{m C_{\max} P_{stat}}{W(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Минимизация расхода энергии: одна скорость

Расписание для критерия makespan

Пусть σ_2 есть 2-приближенное решение относительно критерия C_{\max} при единичных скоростях операций. Тогда $C_{\max}(\sigma_2, s_{\sigma_2}^E) \leq C_{\max}(\sigma_2, s_{\sigma^*}^E) \leq 2C_{\max}(\sigma^*, s_{\sigma^*}^E)$, где σ^* есть оптимальное расписание относительно критерия C_{\max} при единичных скоростях.

Расписание для энергетического критерия

$$\begin{aligned} E(\sigma_2, s_{\sigma_2}^E) &= (mP_{stat})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} W^{\frac{1}{\alpha}} \left((\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}} \right) (C_{\max}(\sigma_2))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq \\ &2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (mP_{stat})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} W^{\frac{1}{\alpha}} \left((\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}} \right) (C_{\max}(\sigma^*))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq \\ &2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} E(\sigma_{opt}). \end{aligned}$$

Минимизация расхода энергии: одна дискретная скорость

Выбор скорости

Выбрать лучшую s_{discr}^* из двух скоростей, ближайших к

$$s_{\sigma}^E = \left(\frac{mC_{\max}P_{stat}}{W(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Оценка

$$E(\sigma_2, s_{discr}^*) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} W_{ij}(s_{discr}^*)^{\alpha-1} + mP_{stat}C_{\max}(\sigma_2, s_{\max}) \frac{s_{\max}}{s_{discr}^*} \leq$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} W_{ij}(s_{opt})^{\alpha-1} + mP_{stat}C_{\max}(\sigma_2, s_{\max}) \frac{s_{\max}}{s_{opt}} \leq$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} W_{ij}(s_{opt})^{\alpha-1} + mP_{stat}2C_{\max}(\sigma^*, s_{\max}) \frac{s_{\max}}{s_{opt}} \leq 2E(\sigma_{opt}, s_{opt}).$$

Минимизация расхода энергии: дискретный набор скоростей

$2m$ -приближенный алгоритм A

Шаг 1. Для каждой работы $j \in J$ назначаем скорости операциям так, что величина $(p_{ij}(s_{ij})^\alpha + p_{ij}P_{stat})$ минимальна.

Шаг 2. При фиксированных длительностях операций p_{ij} строим приближенное расписание, такое что $C_{\max} \leq 2 \max \{ \max_{i \in I} p_{ij}; \max_{j \in J} p_{ij} \}$.

$$E(\sigma_A) \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij}(s_{ij})^\alpha + mP_{stat}C_{\max} \leq$$

$$2m \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_{ij}(s_{ij'})^\alpha + P_{stat}p_{ij}) \leq$$

$$2m \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_{ij}(\sigma_{opt})(s_{ij}(\sigma_{opt}))^\alpha + P_{stat}p_{ij}(\sigma_{opt})) \leq 2mE(\sigma_{opt}).$$

Дискретные скорости и прерывания

Прямая задача

$$\sum_{c \in C} E_c x_c \rightarrow \min, \quad (17)$$

$$\sum_{c \in C: (i,j) \in O_c} \frac{s_{i,j,c} x_c}{W_{ij}} \geq 1, \quad (i,j) \in O, \quad (18)$$

$$x_c \geq 0, \quad c \in C. \quad (19)$$

Двойственная задача

$$\sum_{(i,j) \in O} \lambda_{ij} \rightarrow \max, \quad (20)$$

$$\sum_{(i,j) \in O_c} \frac{s_{i,j,c} \lambda_{i,j}}{W_{ij}} \leq E_c, \quad c \in C, \quad (21)$$

$$\lambda_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in O, \quad (22)$$

$$\mu \geq 0. \quad (23)$$

Многопроцессорные операции с ограниченным числом стадий

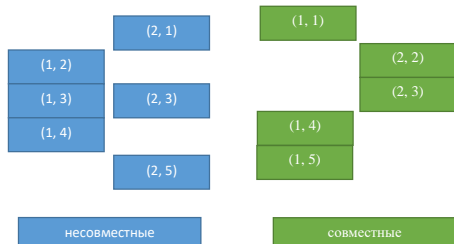
Особенность

Работа состоит из 2 или 3 стадий, но операции при этом задействуют при своем выполнении несколько процессоров.

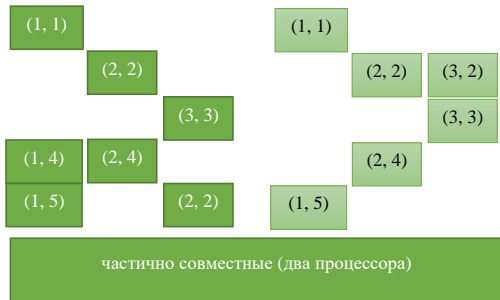
fix_{ij} – множество процессоров, которые задействует операция $i = 1, 2, 3$ работы $j \in J$

W_{ij} – объемом операции (i, j) на каждом из используемых процессоров

2 стадии



3 стадии



Заключение

- ▶ Предложены точные и приближенные алгоритмы для минимизации расхода энергии и ограничения на потребление энергии.
- ▶ Исследованы варианты задачи с непрерывным и дискретным набором скоростей.
- ▶ Дальнейшие исследования представляют интерес для частных случаев с другими типами взаимодействия работ.

Спасибо за внимание!