Локализация оптимумов для соразмерной задачи open shop с маршрутизацией и независимыми временами перемещения на дереве

Кривоногова О.С.

Институт математики им. С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”

09.12.2022

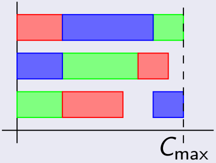
Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 22-71-10015

Задача Open shop

Open Shop($Om||C_{\max}$)

Машины: $M_1, M_2 \dots M_m$

Работы: $J_1, J_2 \dots J_n$



- $O2||C_{\max}$ полиномиально разрешима (Gonzalez, Sahni 1976)
- $O3||C_{\max}$ NP-трудна (в сильном ли смысле?) (Gonzalez, Sahni 1976)

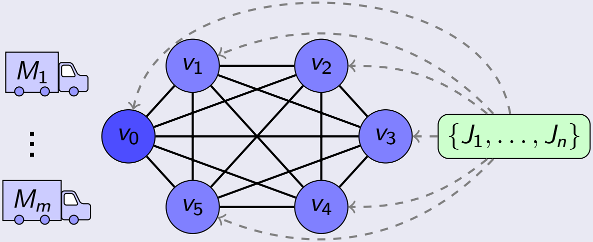
Соразмерная задача Open Shop

	J_1	J_2	J_3	$\ldots$	J_n
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\ldots$	p_{1n}
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\ldots$	p_{2n}
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\ldots$	p_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\ldots$	p_{mn}

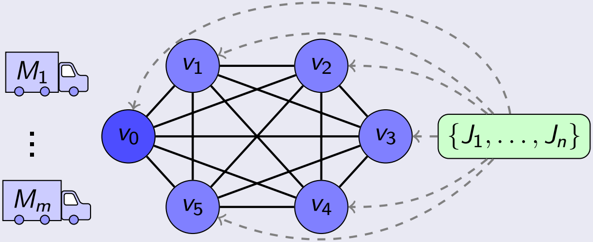
Для соразмерной задачи Open Shop ($Om|j\!-\!\text{prpt}|C_{\max}$): $p_{ij} = p_j$

- NP-трудность задачи $O3|j\!-\!\text{prpt}|C_{\max}$ (Lui, Bulfin 1987)
- Псевдополиномиальный алгоритм решения задачи $O3|j\!-\!\text{prpt}|C_{\max}$ (Sevastyanov 2019)

Задача Open shop с маршрутизацией

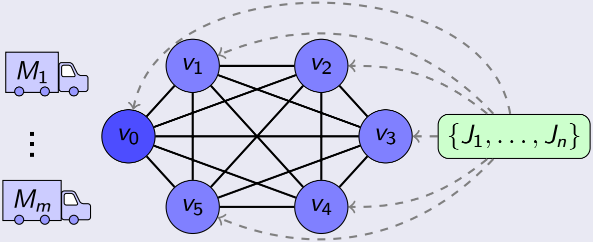


Задача Open shop с маршрутизацией



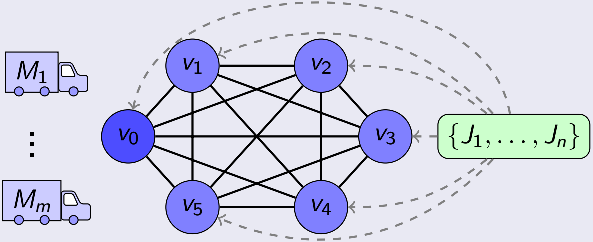
$$ROm|\text{j}-\text{prpt}, G = X|R_{\max}$$

Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, G = X|R_{\max}$ $ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\mathrm{j-prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|\mathrm{j-prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

$\overrightarrow{R}Om|\mathrm{j-prpt}, G = X|R_{\max}$

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	J_3	$\dots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}	l_1
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2n}	l_2
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3n}	l_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mn}	l_m
	d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_n	

Стандартная нижняя оценка

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & J_1 & J_2 & J_3 & \dots & J_n & \\
\hline
M_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} & l_1 \\
M_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} & l_2 \\
M_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} & l_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
M_m & p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \dots & p_{mn} & l_m \\
\hline
 & d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n &
\end{array}
$$

Нижняя оценка для задачи $Om||C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	J_3	$\dots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}	l_1
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2n}	l_2
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3n}	l_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mn}	l_m
	d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_n	

Нижняя оценка для задачи $Om||C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Нижняя оценка для задачи $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Нижняя оценка для задачи $RO2|Rtt|R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\Big\{\max_i(\ell_i + T_i^*),$$

$$\max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)\right)\Big\}$$

Локализация оптимумов

Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R^*_{\max}(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

Problem	Opt. loc.	Problem with Qtt/Rtt	Opt. loc.
$RO2\|G = K_2\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = K_2, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|G = K_3\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = K_3, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|G = tree\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 6/5\bar{R}]$	$RO2\|G = tree, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 5/4\bar{R}]$
$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_2\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_2, Rtt\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_3\|R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2\|j\text{-}prpt, G = K_3, Rtt\|R_{\max}$	?

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G=tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

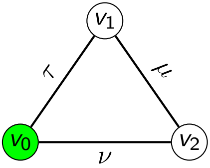
Теорема 2

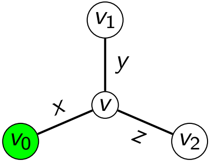
Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

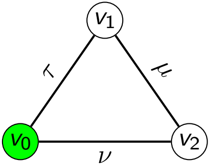
Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

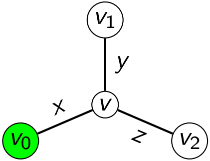
Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения





Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения

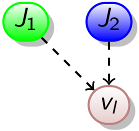




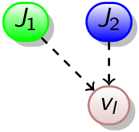
Теорема

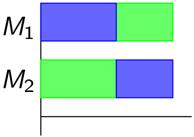
Пусть I — пример задачи $RO2|j-prpt, Rtt, G=K_3|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Склеивание работ

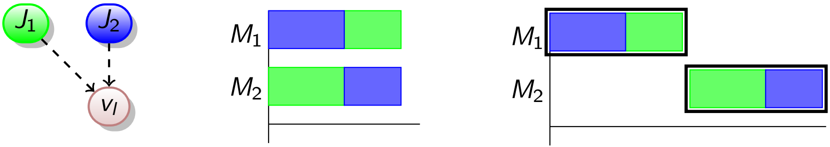


Склеивание работ

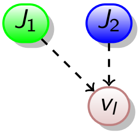


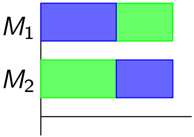


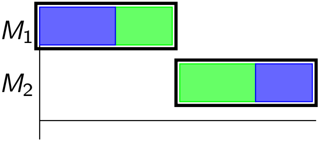
Склеивание работ



Склеивание работ





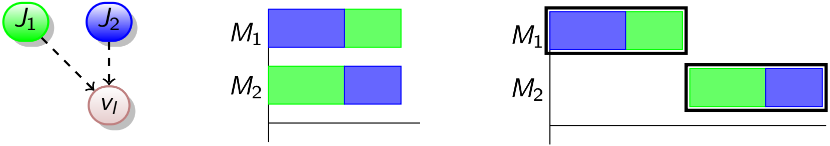


Определение

Вершина v называется перегруженной, если

$$\Delta(v) > \bar{R}(I) - \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v)$$

Склеивание работ



Определение

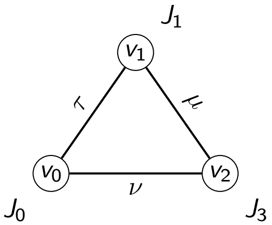
Вершина v называется перегруженной, если

$$\Delta(v) > \bar{R}(I) - \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v)$$

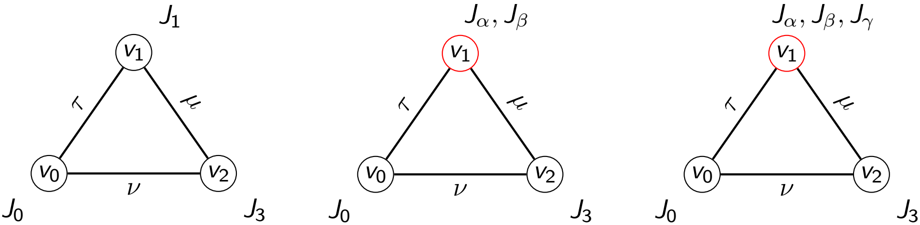
Лемма

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|R_{tt}|R_{\max}$. Тогда $G(I)$ содержит не более одной перегруженной вершины, в которой находится не более трёх работ.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения



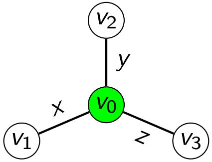
Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на треугольнике. Независимые времена перемещения



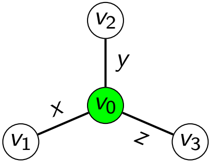
Теорема

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, Rtt, G=K_3|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



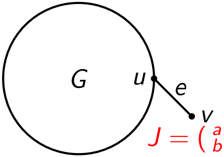
Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения



Теорема

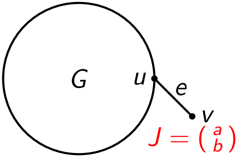
Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = S_3|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

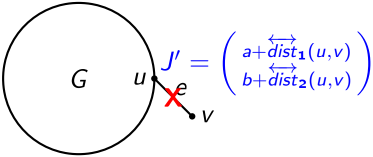
Стягивание висячих ребер



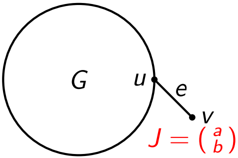
$J = \binom{a}{b}$

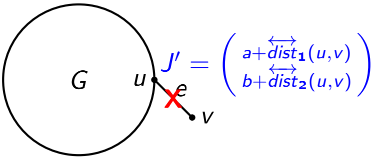
Стягивание висячих ребер





Стягивание висячих ребер



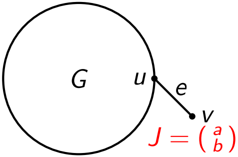


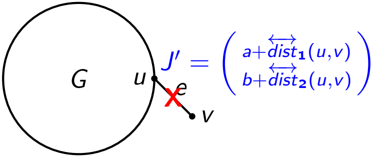
Определение

Висячая вершина e называется перегруженной, если

$$a + b + \overleftrightarrow{dist}_1(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_2(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, u) > \bar{R},$$

Стягивание висячих ребер





Определение

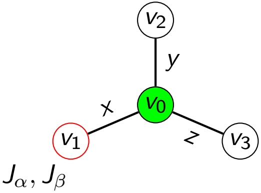
Висячая вершина e называется перегруженной, если

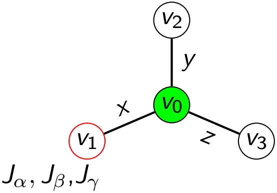
$$a + b + \overleftrightarrow{dist}_1(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_2(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, u) > \bar{R},$$

Лемма

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|R_{tt}|R_{\max}$. Тогда $G(I)$ содержит либо не более одной перегруженной вершины, либо не более одного перегруженного ребра.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на звезде. Независимые времена перемещения





Теорема

Пусть I — пример задачи $RO2|j - prpt, Rtt, G = S_3|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Результаты и дальнейшие планы

Problem	Opt. loc.	Problem with Qtt/Rtt	Opt. loc.
$RO2 \| j\text{-}prpt, G = K_2 \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 \| j\text{-}prpt, G = K_2, Rtt \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 \| j\text{-}prpt, G = K_3 \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 \| j\text{-}prpt, G = K_3, Rtt \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
$RO2 \| j\text{-}prpt, G = tree \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$	$RO2 \| j\text{-}prpt, G = tree, Qtt \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
		$RO2 \| j\text{-}prpt, G = S_3, Rtt \| R_{\max}$	$[\bar{R}, 7/6\bar{R}]$
		$RO2 \| j\text{-}prpt, G = tree, Rtt \| R_{\max}$	?

- Поиск контрпримера для задачи $RO2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$
- Нахождение интервалов локализации оптимумов для задач на деревьях с большим числом вершин
- Нахождение интервала локализации оптимумов для задачи $RO2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$