Приближенные алгоритмы решения соразмерной задачи open shop с маршрутизацией

Кривоногова О.С., Черных И.Д., Шмырина А.А.

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”

17.12.2022

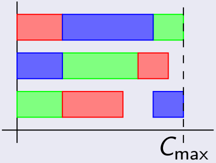
Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 22-71-10015

Задача Open shop

Open Shop($Om||C_{max}$)

Машины: $M_1, M_2 \dots M_m$

Работы: $J_1, J_2 \dots J_n$



- $O2||C_{max}$ полиномиально разрешима (Gonzalez, Sahni 1976)
- $O3||C_{max}$ NP-трудна (в сильном ли смысле?) (Gonzalez, Sahni 1976)

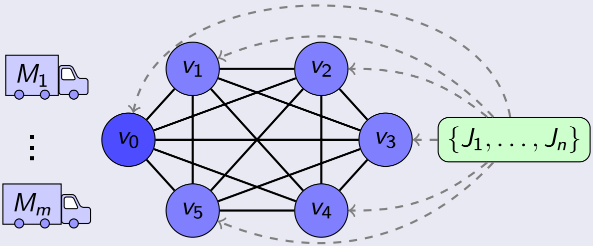
Соразмерная задача Open Shop

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & J_1 & J_2 & J_3 & \dots & J_n \\
\hline
M_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\
M_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\
M_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
M_m & p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \dots & p_{mn}
\end{array}
$$

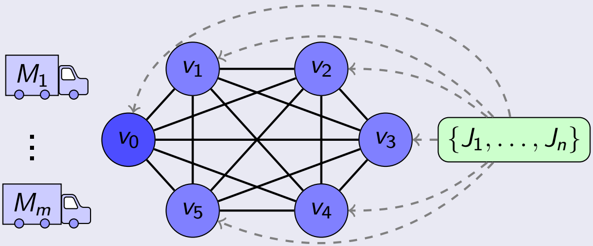
Для соразмерной задачи Open Shop ($Om|j{-}\mathrm{prpt}|C_{\max}$): $p_{ij} = p_j$

- NP-трудность задачи $O3|j{-}\mathrm{prpt}|C_{\max}$ (Lui, Bulfin 1987)
- Псевдополиномиальный алгоритм решения задачи $O3|j{-}\mathrm{prpt}|C_{\max}$ (Sevastyanov 2019)

Задача Open shop с маршрутизацией

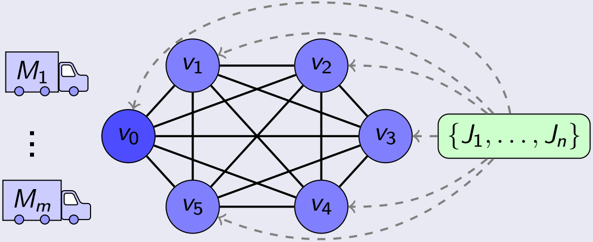


Задача Open shop с маршрутизацией



$$ROm|\text{j}-\text{prpt}, G = X|R_{\max}$$

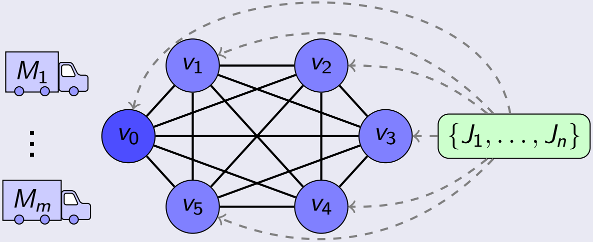
Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|\text{j}{-}\text{prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

Задача Open shop с маршрутизацией



$ROm|\text{j}-\text{prpt}, G = X|R_{\max}$

$ROm|\text{j}-\text{prpt}, Rtt, G = X|R_{\max}$

$\overrightarrow{R}Om|\text{j}-\text{prpt}, G = X|R_{\max}$

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	J_3	$\ldots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\ldots$	p_{1n}	l_1
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\ldots$	p_{2n}	l_2
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\ldots$	p_{3n}	l_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\ldots$	p_{mn}	l_m
	d_1	d_2	d_3	$\ldots$	d_n	

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	J_3	$\ldots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\ldots$	p_{1n}	l_1
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\ldots$	p_{2n}	l_2
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\ldots$	p_{3n}	l_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\ldots$	p_{mn}	l_m
	d_1	d_2	d_3	$\ldots$	d_n	

Нижняя оценка для задачи $Om||C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	J_3	$\dots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}	l_1
M_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2n}	l_2
M_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3n}	l_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
M_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mn}	l_m
	d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_n	

Нижняя оценка для задачи $Om||C_{\max}$

$$\bar{C} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$$

Нижняя оценка для задачи $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v\in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v))\}$$

где $dist(v_i, v_j)$ – время перемещения между вершинами v_i и v_j.

Нижняя оценка для задачи $RO2|Rtt|R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\Big\{\max_i(\ell_i + T_i^*),$$
$$\max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)\right)\Big\}$$

Стандартная нижняя оценка

Нижняя оценка для задачи $RO2|Rtt|R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\Big\{\max_i(\ell_i + T_i^*),$$
$$\max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + dist_1(v_0, v) + dist_2(v_0, v)\right)\Big\}$$

Нижняя оценка для задачи $\overrightarrow{R}O2|Rtt|R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\Big\{\max(\ell_i + T_i^*), \max_{v\in V}(d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v))\Big\},$$

$$\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v, u) = \min\Big\{dist_1(v, u) + dist_2(u, v), dist_2(v, u) + dist_1(u, v)\Big\}$$

Локализация оптимумов

Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R^*_{\max}(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

- Оптимум задачи $O3||C_{\max}$ лежит в $[\bar{C}, \frac{4}{3}\bar{C}]$ (Sevastyanov, S. V., Tchernykh, I. D, 1998)

Для $RO2||R_{\max}$:

- Интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ для задачи $RO2|G = K_2|R_{\max}$ (Averbakh et al 2005)
- Интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ для задачи $RO2|G = K_3|R_{\max}$ (Chernykh, Lgotina 2016)
- Интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ для задачи $\overrightarrow{R}O2|G = tree|R_{\max}$ (Chernykh, Krivonogova 2019)

Локализация оптимумов

Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R^*_{\max}(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

Для $RO2|Rtt|R_{\max}$:

- Интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$ для задач $RO2|Rtt, G = K_2|R_{\max}$ и $RO2|Rtt, G = K_3|R_{\max}$ (Chernykh, Lgotina 2019)
- Интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$ для задачи $\overrightarrow{R}O2|Rtt, G = tree|R_{\max}$ (Chernykh, Krivonogova 2019)

Локализация оптимумов

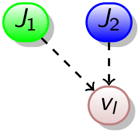
Задача о локализации оптимумов

Найти минимальное значение параметра ρ такое, что $\forall I$ выполняется $R^*_{\max}(I) \in [\bar{R}, \rho\bar{R}]$, а также в описании примера, на котором оценка достигается.

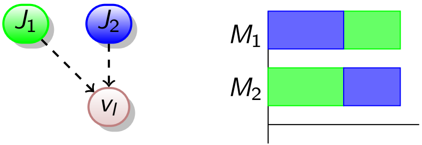
Для соразмерной задачи:

- Интервал локализации оптимумов $[\bar{C}, \frac{10}{9}\bar{C}]$ для задачи $O3|j-prpt|C_{\max}$ (Sevastyanov 2019)
- NP-трудность простейшего нетривиального случая $RO2|j-prpt, G=K_2|R_{\max}$ и интервал локализации оптимумов $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ для задачи $RO2|j-prpt, G=K_3|R_{\max}$ (Pyatkin, Chernykh, 2022)

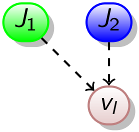
Методы упрощения исходного примера. Склеивание работ

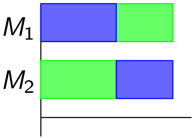


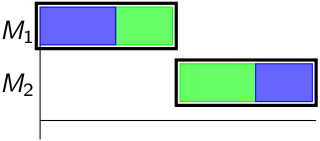
Методы упрощения исходного примера. Склеивание работ



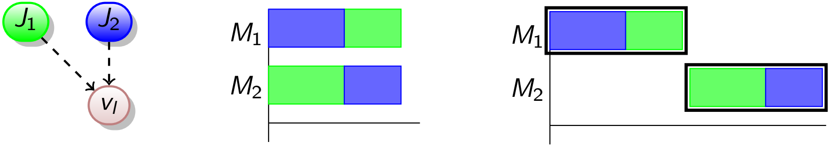
Методы упрощения исходного примера. Склеивание работ







Методы упрощения исходного примера. Склеивание работ

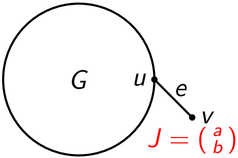


Определение

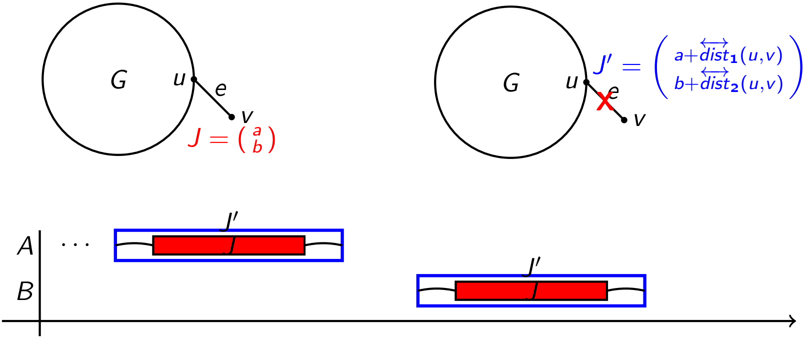
Вершина v называется перегруженной, если

$$\Delta(v) > \bar{R}(I) - \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v)$$

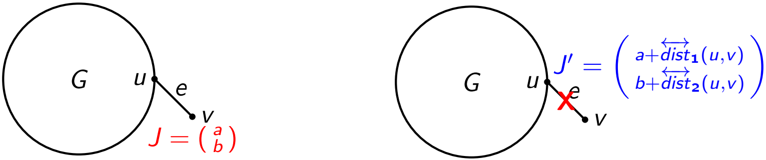
Методы упрощения исходного примера. Стягивание вершин

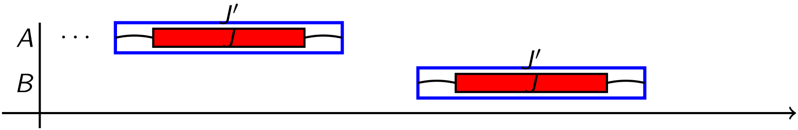


Методы упрощения исходного примера. Стягивание вершин



Методы упрощения исходного примера. Стягивание вершин





Определение

Висячая вершина e называется перегруженной, если

$$a + b + \overleftrightarrow{dist}_1(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_2(u, v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, u) > \bar{R},$$

Алгоритм упрощения исходного примера

Алгоритм $\mathcal{A}$:

1. **Для каждой** недогруженной $v \in V$ склеиваем множество $\mathcal{J}(v)$ в одну работу.
2. **Для каждой** висячей вершины $v \neq v_0$ и ребра $e = [u, v]$, инцидентного вершине v
    1. **Если** ребро e недогружено, то
        1. Провести операцию стягивания висячего ребра e,
        2. **Если** вершина u недогружена, **то** склеиваем множество $\mathcal{J}(u)$ в одну работу.
3. **Если** существует перегруженная вершина v, **то** проводим операцию склеивания множества $\mathcal{J}(v)$, пока не получим несводимый пример.

Алгоритм упрощения исходного примера

Алгоритм $\mathcal{A}$:

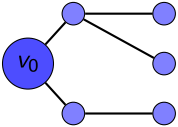
1. **Для каждой** недогруженной $v \in V$ склеиваем множество $\mathcal{J}(v)$ в одну работу.
2. **Для каждой** висячей вершины $v \neq v_0$ и ребра $e = [u, v]$, инцидентного вершине v
    1. **Если** ребро e недогружено, то
        1. Провести операцию стягивания висячего ребра e,
        2. **Если** вершина u недогружена, **то** склеиваем множество $\mathcal{J}(u)$ в одну работу.
3. **Если** существует перегруженная вершина v, **то** проводим операцию склеивания множества $\mathcal{J}(v)$, пока не получим несводимый пример.

Лемма

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|R_{tt}|R_{\max}$. Тогда $G(I)$ содержит либо не более одной перегруженной вершины, либо не более одного перегруженного ребра.

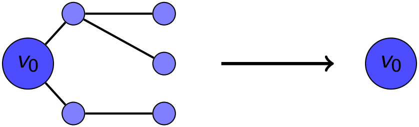
Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

Случай 1:



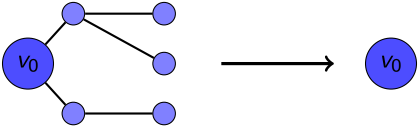
Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

Случай 1:

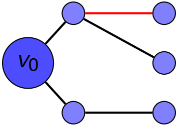


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

Случай 1:

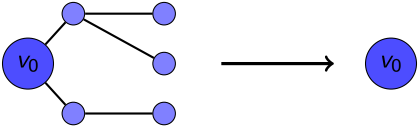


Случай 2:

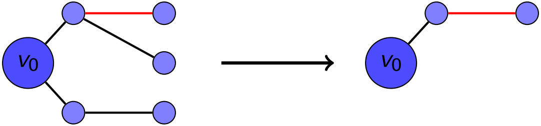


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

Случай 1:

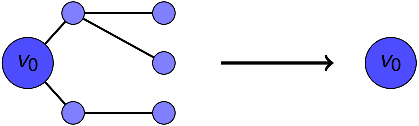


Случай 2:

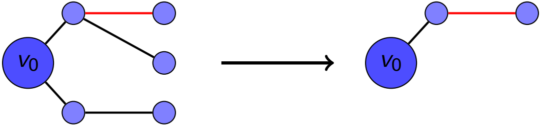


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

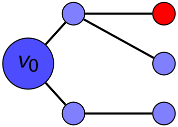
Случай 1:



Случай 2:

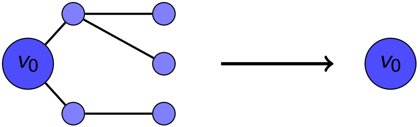


Случай 3:

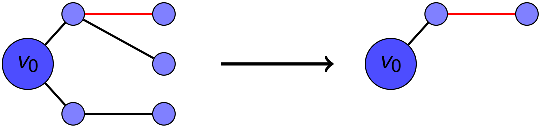


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

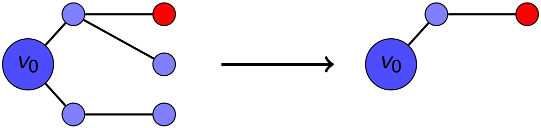
Случай 1:



Случай 2:

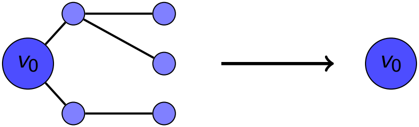


Случай 3:

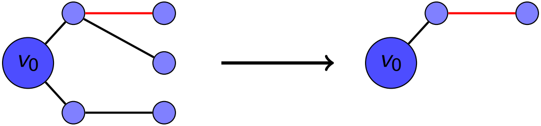


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

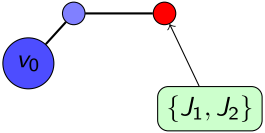
Случай 1:



Случай 2:

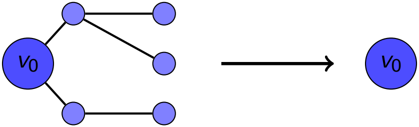


Случай 3:

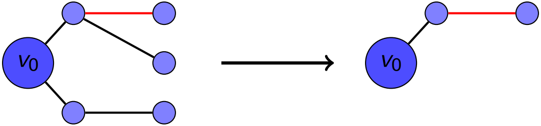


Возможные исходы работы алгоритма для $G = tree$

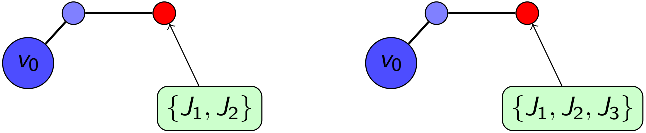
Случай 1:



Случай 2:



Случай 3:



Известные результаты

Теорема (Chernykh I., Lgotina E., 2021)

Пусть $\tilde{I}$ — несводимый пример задачи $\overrightarrow{R}O2|G = tree|R_{\max}$, при этом граф $G(\tilde{I})$ имеет одну из следующих структур:

1. $G(\tilde{I})$ содержит ровно один узел v_0,
2. $G(\tilde{I})$ — цепь, соединяющая v_0 с узлом v, содержащей ровно три работы,
3. $G(\tilde{I})$ — цепь, соединяющая v_0 с узлом v, и инцидентное v ребро перегружено.

Тогда существует расписание $S(\tilde{I})$, для которого $R_{\max}(S) = \bar{R}(I)$, и такое расписание может быть построено за время, линейное от числа работ.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

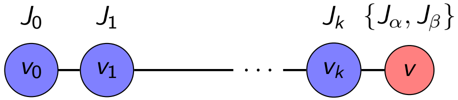
Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j - prpt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

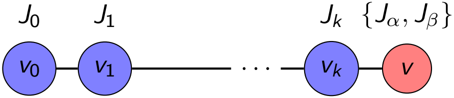
Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G=tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.



Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G = tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

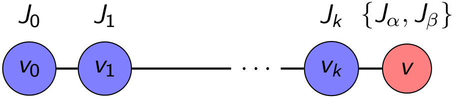


- $T^* = \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v)$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G=tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

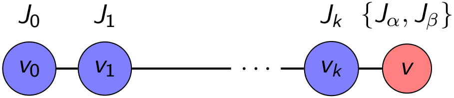


- $T^* = \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v)$
- Без ограничения общности положим $p_\alpha \geq p_\beta$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве

Теорема 1

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j-prpt, G=tree|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

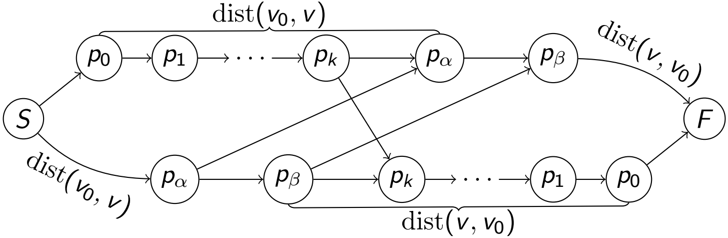


- $T^* = \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v)$
- Без ограничения общности положим $p_\alpha \geq p_\beta$
- Так как вершина v перегружена:

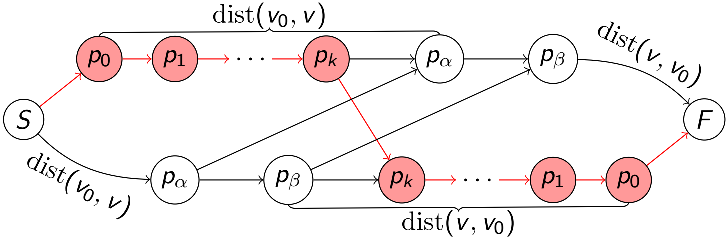
$$2p_\alpha + 2p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v) > \bar{R}$$

Доказательство. Схема 1

Рассмотрим расписание S_1:



Доказательство. Схема 1



$$R_{\max}(S_1) = 2\sum_{j=0}^{k} p_j + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v, v_0).$$

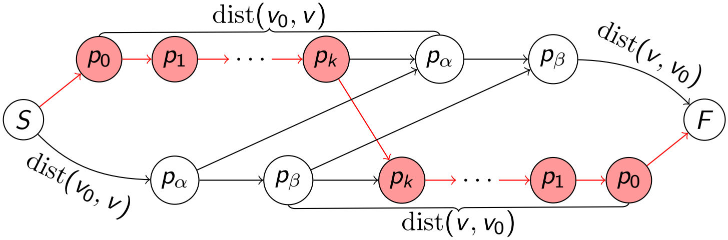
Из определения нижней оценки:

$$\Delta = 2\ell \le 2(\bar{R} - T^*)$$

Из перегруженности вершины v:

$$2p_\alpha + 2p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v) > \bar{R}$$

Доказательство. Схема 1



$$R_{\max}(S_1) = 2\sum_{j=0}^{k} p_j + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_k, v_0) = \Delta - (2p_\alpha + 2p_\beta) + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_k, v_0) \le \bar{R}.$$

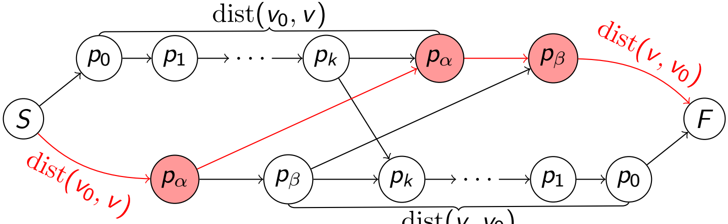
Из определения нижней оценки:

$$\Delta = 2\ell \le 2(\bar{R} - T^*)$$

Из перегруженности вершины v:

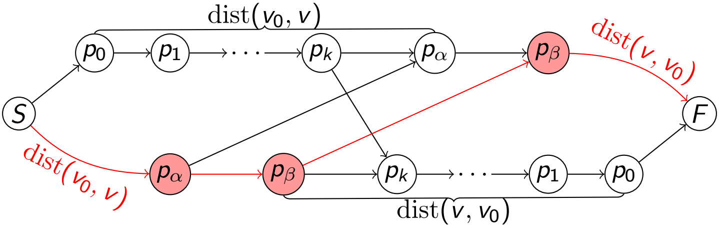
$$2p_\alpha + 2p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v_0, v) > \bar{R}$$

Доказательство. Схема 1



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = 2p_\alpha + p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v, v_0)$$

Доказательство. Схема 1



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = 2p_\alpha + p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v, v_0)$$

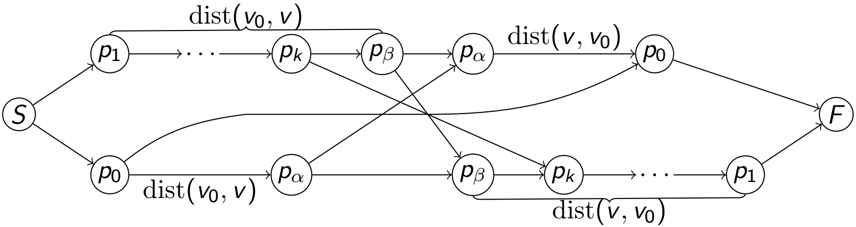
$$R_2 = R_{\max}(S_1) = p_\alpha + 2p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v, v_0)$$

Так как $p_\alpha \geq p_\beta$, то $R_1 \geq R_2$, следовательно

$$R_{\max}(S_1) = 2p_\alpha + p_\beta + \overleftrightarrow{\mathrm{dist}}(v, v_0)$$

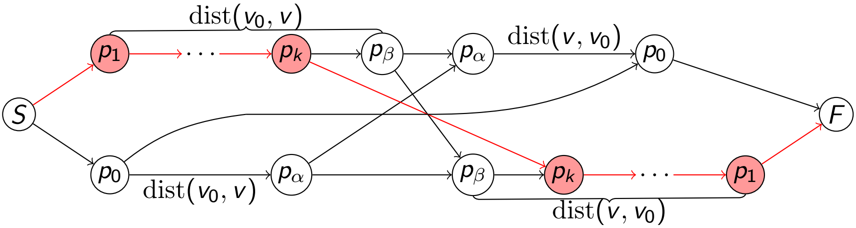
Доказательство. Схема 2

Рассмотрим расписание S_2



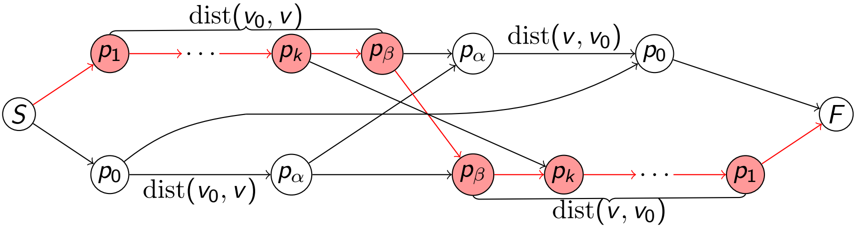
Доказательство. Схема 2

Рассмотрим расписание S_2



Доказательство. Схема 2

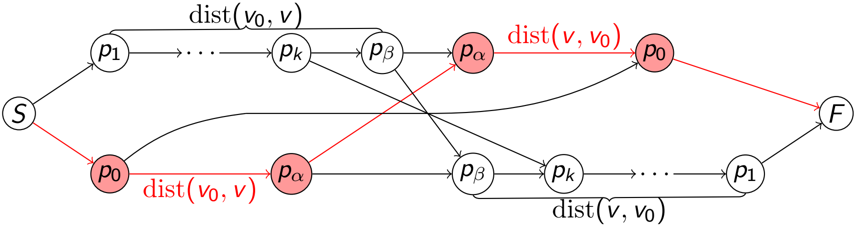
Рассмотрим расписание S_2



$$R_{21} = 2\sum_{j=0}^{k} p_j + 2p_\beta + T^*$$

Доказательство. Схема 2

Рассмотрим расписание S_2

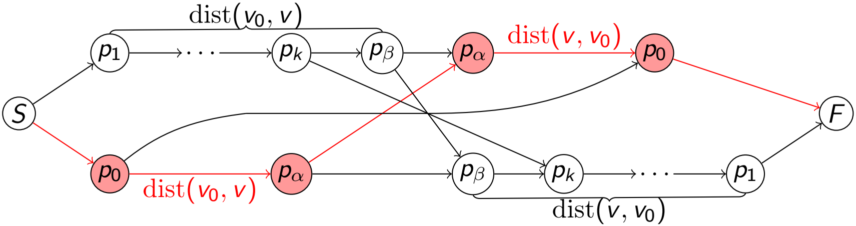


$$R_{21} = 2\sum_{j=0}^{k} p_j + 2p_\beta + T^*$$

$$R_{22} = 2p_0 + 2p_\alpha + T^*$$

Доказательство. Схема 2

Рассмотрим расписание S_2



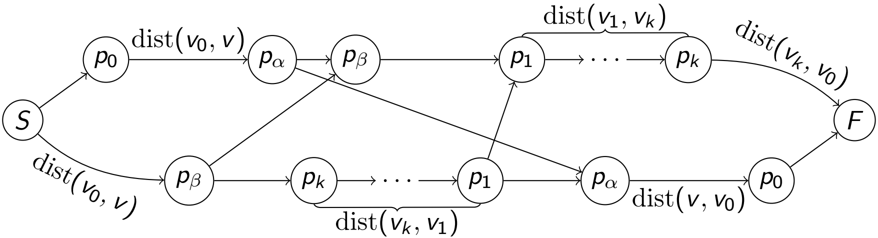
$$R_{21} = 2\sum_{j=0}^{k} p_j + 2p_\beta + T^*$$

$$R_{22} = 2p_0 + 2p_\alpha + T^*$$

Пусть $R_{\max}(S_2) = R_{21}$

Доказательство. Схема 3

Рассмотрим расписание S_3:



$$R_{31} = 2\sum_{j=1}^{k} p_j + p_\beta + 2T^* - \mathrm{dist}(v_0, v_1) - \mathrm{dist}(v_k, v)$$

$$R_{32} = \sum_{j=1}^{k} p_j + p_\beta + p_\alpha + p_0 + 2T^* - \mathrm{dist}(v_0, v_1)$$

Доказательство.

Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{31}$.

Доказательство.

Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{31}$.
Обозначим $R = \min\{R_1, R_{21}, R_{31}\}$. Тогда

$$6R \leq 3R_1 + 2R_{21} + R_{31} \leq 7p_\alpha + 7p_\beta + 6\sum_{j=1}^{k} p_j + 7T^* \leq 7\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{7}{6}\bar{R}$.

Доказательство.

Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{31}$.
Обозначим $R = \min\{R_1, R_{21}, R_{31}\}$. Тогда

$$6R \leq 3R_1 + 2R_{21} + R_{31} \leq 7p_\alpha + 7p_\beta + 6\sum_{j=1}^{k} p_j + 7T^* \leq 7\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{7}{6}\bar{R}$.

Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{32}$.

Доказательство.

Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{31}$.
Обозначим $R = \min\{R_1, R_{21}, R_{31}\}$. Тогда

$$6R \leq 3R_1 + 2R_{21} + R_{31} \leq 7p_\alpha + 7p_\beta + 6\sum_{j=1}^{k} p_j + 7T^* \leq 7\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{7}{6}\bar{R}$.

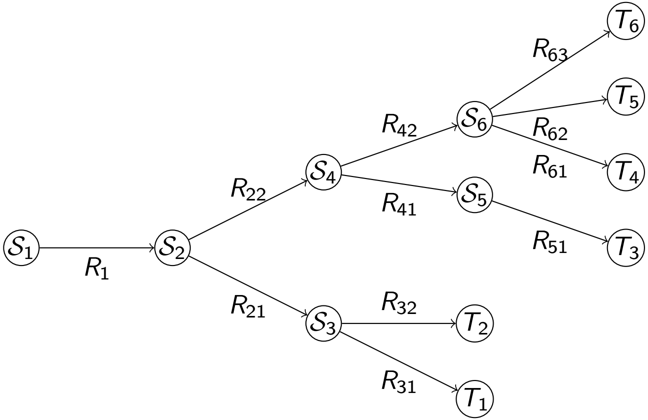
Пусть $R_{\max}(S_3) = R_{32}$.
Обозначим $R = \min\{R_1, R_{21}, R_{32}\}$. Тогда

$$6R \leq 2R_1 + 3R_{21} + R_{31} \leq 7p_\alpha + 7p_\beta + 7\sum_{j=1}^{k} p_j + p_0 + 7T^* \leq 7\bar{R}$$

Следовательно $R \leq \frac{7}{6}\bar{R}$.

Дерево доказательства

Дерево доказательства для теоремы 1:



Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве. Независимые времена перемещения

Теорема

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве. Независимые времена перемещения

Теорема

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j\text{−prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Построим пример $I' : \forall u, v \in V(I') \quad dist(u, v) = dist_1(u, v)$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве. Независимые времена перемещения

Теорема

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j\text{−prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Построим пример I' : $\forall u, v \in V(I') \quad dist(u, v) = dist_1(u, v)$

$$\bar{R}(I') = \max\left\{\ell + T_1^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_1(v_0, v))\right\}$$

$$\bar{R}(I) = \max\left\{\ell + T_1^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v))\right\}$$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией на дереве. Независимые времена перемещения

Теорема

Пусть I — пример задачи $\overrightarrow{R}O2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$, удовлетворяющий условию:

$$\forall e = [u, v] \in E \quad dist_1(u, v) \geq dist_2(u, v). \quad (*)$$

Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$.

Построим пример I' : $\forall u, v \in V(I') \quad dist(u, v) = dist_1(u, v)$

$$\bar{R}(I') = \max\left\{\ell + T_1^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_1(v_0, v))\right\}$$

$$\bar{R}(I) = \max\left\{\ell + T_1^*, \max_{v \in V}(d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v))\right\}$$

Доказательство

Пусть $\bar{R}(I) = \bar{R}(I')$.

Доказательство

Пусть $\bar{R}(I) = \bar{R}(I')$.
Строим расписание S для примера I'. По теореме 1

$$R_{\max}(S) \leq \frac{7}{6}\bar{R}(I') = \bar{R}(I).$$

Доказательство

Пусть $\bar{R}(I) = \bar{R}(I')$.
Строим расписание S для примера I'. По теореме 1

$$R_{\max}(S) \le \frac{7}{6}\bar{R}(I') = \bar{R}(I).$$

Пусть $\bar{R}(I) > \bar{R}(I')$.

Доказательство

Пусть $\bar{R}(I) = \bar{R}(I')$.
Строим расписание S для примера I'. По теореме 1

$$R_{\max}(S) \le \frac{7}{6}\bar{R}(I') = \bar{R}(I).$$

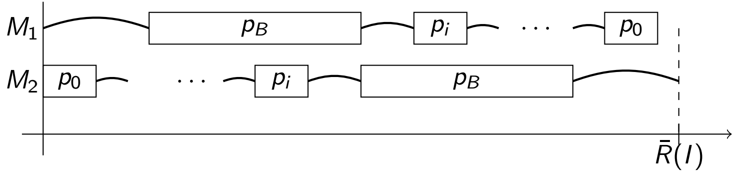
Пусть $\bar{R}(I) > \bar{R}(I')$.
Тогда $\bar{R}(I') = d_{\max}(v) + \overleftrightarrow{dist}_1(v_0, v)$. Обозначим $d_{\max}(v) = d_B$.

Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_1(v_0, v) + dist_2(v, v_0)$

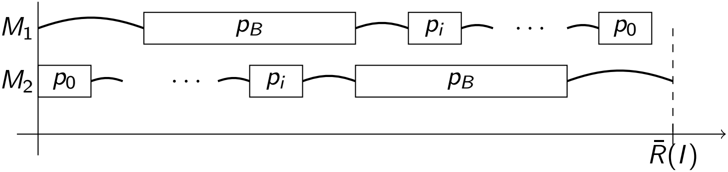
Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_1(v_0, v) + dist_2(v, v_0)$



Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_1(v_0, v) + dist_2(v, v_0)$



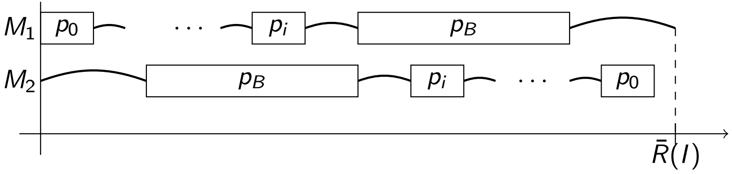
$$
\begin{aligned}
&2 \sum_{J_j \in J \setminus J_B} p_j + T_1^* - dist_1(v_0, v) + T_2^* - dist_2(v, v_0) \\
&= \Delta - 2p_B + T_1^* - dist_1(v_0, v) + T_2^* - dist_2(v, v_0) \\
&\leq 2\bar{R} - T_1^* - T_2^* + T_1^* + T_2^* - \bar{R} = \bar{R}
\end{aligned}
$$

Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_2(v_0, v) + dist_1(v, v_0)$

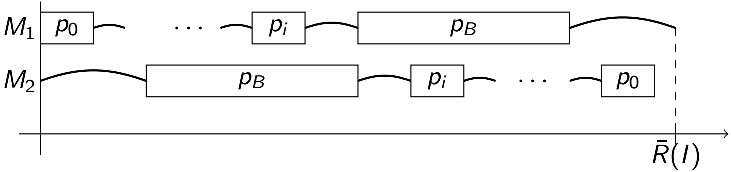
Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_2(v_0, v) + dist_1(v, v_0)$



Доказательство

Пусть $\overleftrightarrow{dist}_{\min}(v_0, v) = dist_2(v_0, v) + dist_1(v, v_0)$



$$
\begin{aligned}
&2 \sum_{J_j \in J \setminus J_B} p_j + T_2^* - dist_2(v_0, v) + T_1^* - dist_1(v, v_0) \\
&= \Delta - 2p_B + T_2^* - dist_2(v_0, v) + T_1^* - dist_1(v, v_0) \\
&\leq 2\bar{R} - T_1^* - T_2^* + T_1^* + T_2^* - \bar{R} = \bar{R}
\end{aligned}
$$

Приближенные алгоритмы для задачи с m машинами

Известные приближённые алгоритмы для задачи $ROm||R_{\max}$:

- $\frac{m+1}{2}$ – приближённый алгоритм (Averbakh I., Berman O., Chernykh I., 2006)
- $O(\sqrt{m})$ – приближённый алгоритм (Chernykh I., Kononov A., Sevastyanov S., 2013)
- $O(\log m)$ – приближённый алгоритм (Kononov A., 2015)

Известные приближённые алгоритмы для задачи $RFm||R_{\max}$:

- $\frac{m+1}{2}$ – приближённый алгоритм (Averbakh I., Berman O. 1999)

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией

Теорема

Пусть I — пример задачи $ROm|j\text{−prpt}|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{5}{2}\bar{R}]$.

- Находим приближённое решение задачи коммивояжёра с помощью алгоритма Кристофидеса-Сердюкова, длина обхода $T \leq \frac{3}{2}T^*$.
- Строим перестановочное расписание для задачи $Fm|prpt|C_{max}$, соответствующее направлению обхода, найденного на первом шаге.

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией

Теорема

Пусть I — пример задачи $ROm|j{-}\mathrm{prpt}|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{5}{2}\bar{R}]$.

- Находим приближённое решение задачи коммивояжёра с помощью алгоритма Кристофидеса-Сердюкова, длина обхода $T \leq \frac{3}{2}T^*$.
- Строим перестановочное расписание для задачи $Fm|prpt|C_{max}$, соответствующее направлению обхода, найденного на первом шаге.
  (F.Y. Chin and L.L. Tsai, 1981) Любое перестановочное расписание для задачи $Fm|prpt|C_{max}$ является оптимальным,

$$C_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j + (m-1)p_{\max}.$$

Соразмерная задача Open shop с маршрутизацией

Теорема

Пусть I — пример задачи $ROm|j\text{−prpt}|R_{\max}$. Тогда за время, линейное от числа работ, можно построить расписание S, длина которого принадлежит интервалу $[\bar{R}, \frac{5}{2}\bar{R}]$.

Длина полученного расписания:

$$R_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j + (m-1)p_{\max} + T \leq \ell_{\max} + d_{max} + \frac{3}{2}T^* \leq \frac{5}{2}\bar{R}.$$

Дальнейшие планы

- Построение приближенного алгоритма для задачи $ROm|j{-}\mathrm{prpt}|R_{\max}$ с лучшей оценкой точности
- Нахождение интервала локализации оптимумов для задачи $\overrightarrow{R}O2|j{-}\mathrm{prpt}, Rtt, G = tree|R_{\max}$ без ограничения (*)