

# Приближённые алгоритмы для задачи open shop с маршрутизацией и работами на рёбрах

Илья Черных    Александра Шигина

Институт математики им С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы  
для задач составления расписаний”  
28.04.2024

*Исследование выполнено за счёт гранта  
Российского научного фонда №22-71-10015*

# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

Работы  $J_1$  ...  $J_n$

# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

Работы  $J_1$  ...  $J_n$



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

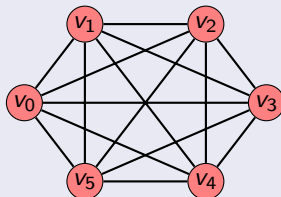
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

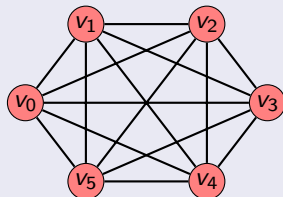
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

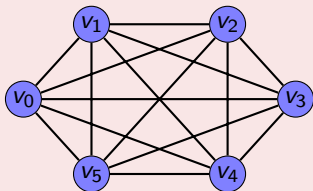
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



... их комбинация



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

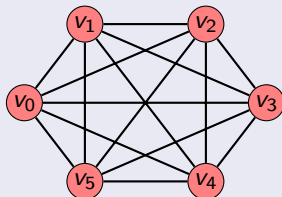
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

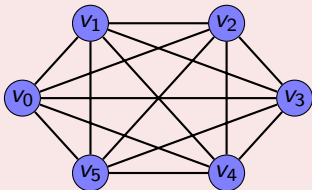
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



... их комбинация



$\{J_1, \dots, J_n\}$

# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

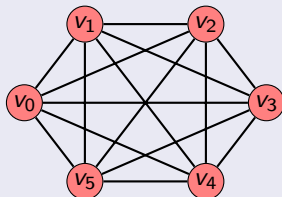
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

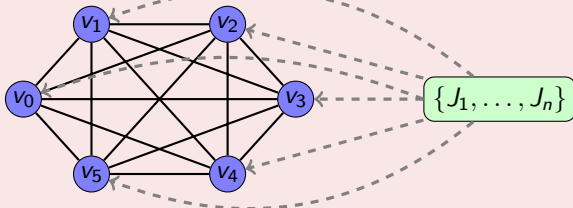
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



... их комбинация



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

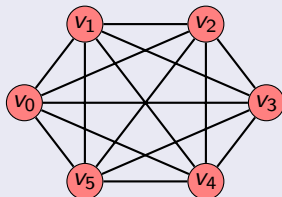
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

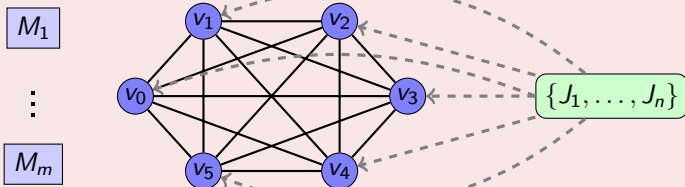
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



... их комбинация





# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

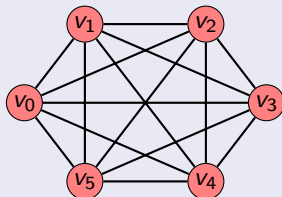
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

Работы  $J_1$  ...  $J_n$



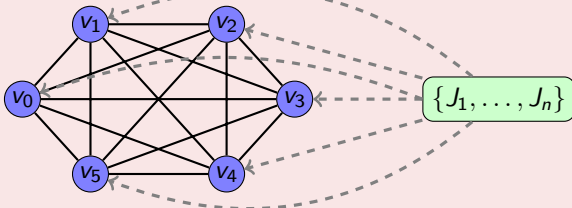
Задача коммивояжера...



... их комбинация



⋮



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

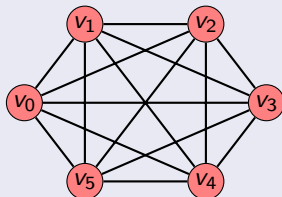
Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

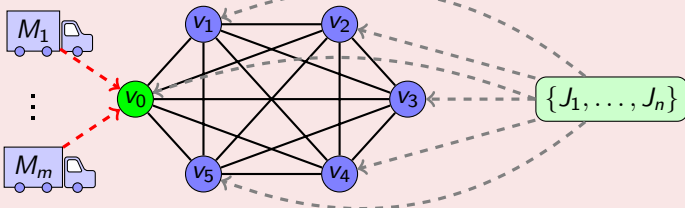
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



Задача коммивояжера...



... их комбинация



# Напоминание: Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

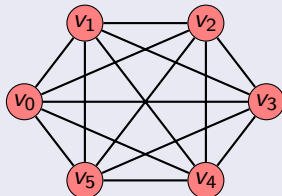
## Open Shop ( $Om || C_{\max}$ )...

Машины  $M_1$  ...  $M_m$

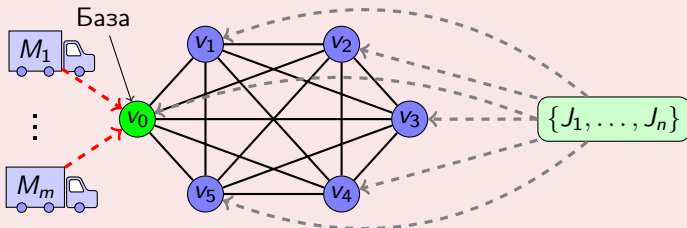
Работы  $J_1$  ...  $J_n$



## Задача коммивояжера...



## ... их комбинация



- $\ell_i = \sum_{j=1}^n p_{ji}$  — нагрузка  $M_i$ ,  $d_j = \sum_{i=1}^m p_{ji}$  — длина  $J_j$ ,
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$  — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$  — максимальная длина работы из  $v$ ,
- $T^*$  — длина кратчайшего обхода графа  $G$  машиной  $M_i$

- $l_i = \sum_{j=1}^n p_{ji}$  — нагрузка  $M_i$ ,  $d_j = \sum_{i=1}^m p_{ji}$  — длина  $J_j$ ,
- $l_{\max} = \max l_i$  — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$  — максимальная длина работы из  $v$ ,
- $T^*$  — длина кратчайшего обхода графа  $G$  машиной  $M_i$

Стандартная нижняя оценка для  $ROM || R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ l_{\max} + T^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2 \text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

## Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф  $G = \langle V; E \rangle$ .
- Требуется: найти ГЦ минимального веса  $w^*$ .

## Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф  $G = \langle V; E \rangle$ .
- Требуется: найти ГЦ минимального веса  $w^*$ .

## Сложность TSP

- $NP$ -трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

## Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф  $G = \langle V; E \rangle$ .
- Требуется: найти ГЦ минимального веса  $w^*$ .

## Сложность TSP

- $NP$ -трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

## Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

- 1 Найти в  $G$  остов  $T$  минимального веса
- 2 Пусть  $O = \{v \in V \mid \deg_T(v) \text{ нечётна}\}$ . Построить на  $O$  паросочетание  $M$  наименьшего веса
- 3 Найти эйлеров цикл  $E$  в  $T \cup M$
- 4 Искомый гамильтонов цикл  $\sigma$  обходит вершины в порядке, в котором они появляются в  $E$  первый раз



## Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф  $G = \langle V; E \rangle$ .
- Требуется: найти ГЦ минимального веса  $w^*$ .

## Сложность TSP

- $NP$ -трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

## Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

- 1 Найти в  $G$  остов  $T$  минимального веса
- 2 Пусть  $O = \{v \in V \mid \deg_T(v) \text{ нечётна}\}$ . Построить на  $O$  паросочетание  $M$  наименьшего веса
- 3 Найти эйлеров цикл  $E$  в  $T \cup M$
- 4 Искомый гамильтонов цикл  $\sigma$  обходит вершины в порядке, в котором они появляются в  $E$  первый раз

## Теорема

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова является  $3/2$ -приближённым для метрической TSP.

## Постановка

- Дан рёберно-взвешенный полный граф  $G = \langle V; E \rangle$ .
- Требуется: найти ГЦ минимального веса  $w^*$ .

## Сложность TSP

- NP-трудна в сильном смысле.
- В метрическом случае тоже.

## Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова для метрической TSP [1976]

- 1 Найти в  $G$  остов  $T$  минимального веса ( $w(T) \leq w^*$ ).
- 2 Пусть  $O = \{v \in V \mid \deg_T(v) \text{ нечётна}\}$ . Построить на  $O$  паросочетание  $M$  наименьшего веса ( $w(M) \leq \frac{1}{2}w^*$ ).
- 3 Найти эйлеров цикл  $E$  в  $T \cup M$  ( $w(E) \leq \frac{3}{2}w^*$ ).
- 4 Искомый гамильтонов цикл  $\sigma$  обходит вершины в порядке, в котором они появляются в  $E$  первый раз ( $w(\sigma) \leq w(E) \leq \frac{3}{2}w^*$ ).

## Теорема

Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова является 3/2-приближённым для метрической TSP.

# Вступление: задача сельского почтальона ( $RPP$ )

Дано:

- Взвешенный связный граф  $G = \langle V; E \rangle$ ,  $w(e)$  — вес ребра  $e \in E$ ,
- $N \subseteq E$  — множество **необходимых** рёбер.

Требуется:

Найти замкнутый маршрут минимального веса и содержащий все рёбра из  $N$ .

# Вступление: задача сельского почтальона ( $RPP$ )

## Дано:

- Взвешенный связный граф  $G = \langle V; E \rangle$ ,  $w(e)$  — вес ребра  $e \in E$ ,
- $N \subseteq E$  — множество **необходимых** рёбер.

## Требуется:

Найти замкнутый маршрут минимального веса и содержащий все рёбра из  $N$ .

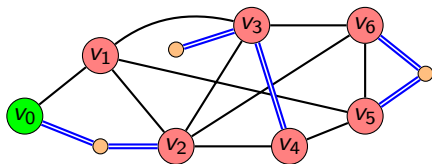
## Замечания

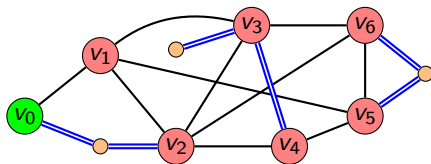
- 1 В случае  $N = E$  задача называется задачей китайского почтальона и является полиномиально разрешимой.
- 2 В общем случае задача  $RPP$   $NP$ -трудна в сильном смысле.
- 3 Можно всегда предполагать, что веса рёбер в  $RPP$  удовлетворяют неравенству треугольника.

# 3/2-приближённый алгоритм для $RPP$

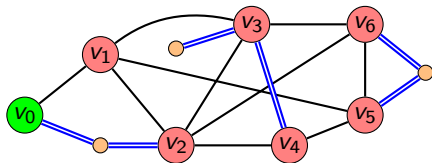
[Frederickson 1979]

- 1 Рассмотрим вспомогательный полный граф  $G'$ , вершинами которого являются компоненты связности в графе  $G(N)$ , а расстояния между вершинами определяются длинами кратчайших цепей, соединяющих эти компоненты в  $G$ .
- 2 Найти в  $G'$  остовное дерево  $T'$  минимального веса. Построить граф  $G'' = T' \cup N$ .
- 3 Пусть  $O$  — множество вершин нечётной степени в  $G''$ . Построим на них паросочетание минимального веса  $M$ .
- 4 Искомый маршрут — эйлеров обход графа  $G'' \cup M$ .



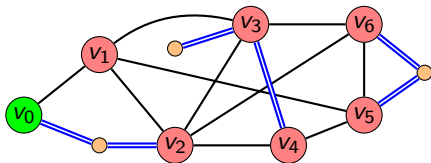


- $v_0$  — база.

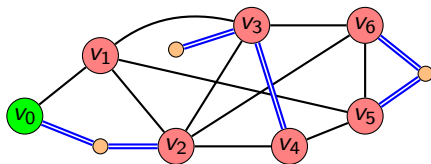


- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).

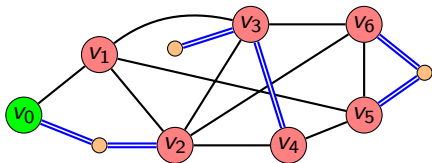




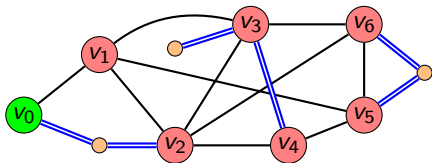
- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.



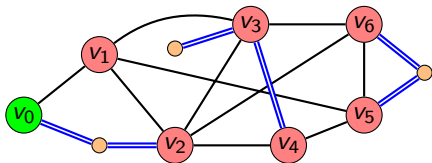
- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:



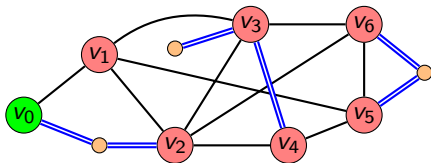
- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).



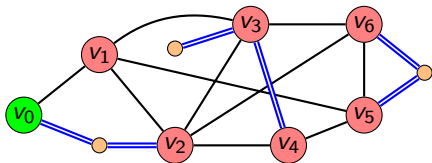
- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).



- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.



- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.
  - Машина выполняет операцию в туннеле в процессе перемещения.



- $v_0$  — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине).
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения.
- Остальные рёбра (двойные синие) — **туннели**:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно, но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.
  - Машина выполняет операцию в туннеле в процессе перемещения.
- Требуется выполнить все работы и вернуться на базу ASAP.

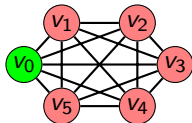
Стандартная нижняя оценка для  $ROM||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



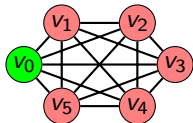
Стандартная нижняя оценка для  $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



Стандартная нижняя оценка для  $ROM||R_{\max}$

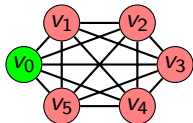
$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



Задача  
комивояжера

Стандартная нижняя оценка для  $ROM||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

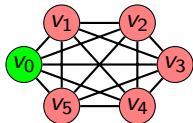


Задача  
комивояжера

$T^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в TSP.

Стандартная нижняя оценка для  $ROM||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{TSP}^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

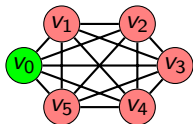


Задача  
комивояжера

$T_{TSP}^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в TSP.

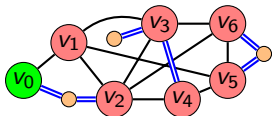
Стандартная нижняя оценка для  $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{TSP}^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



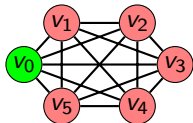
Задача  
комивояжера

$T_{TSP}^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в TSP.



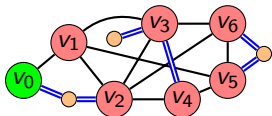
Стандартная нижняя оценка для  $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{TSP}^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



Задача  
комивояжера

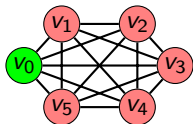
$T_{TSP}^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в TSP.



Задача  
деревенского  
почтальона

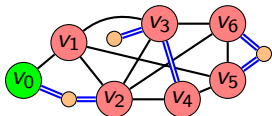
Стандартная нижняя оценка для  $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{TSP}^*, \max_{v \in V} \left( d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$



Задача  
комивояжера

$T_{TSP}^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в TSP.



Задача  
деревенского  
почтальона

$T_{RPP}^*$  — длина  
кратчайшего обхода  
в RPP.

## Обозначения $\overline{ROm}||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$  — множество туннелей,  $T_{RPP}^*$  — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$ :
  - $|\tau| = w(\tau)$  — время перемещения по  $\tau$ ,
  - $j(\tau)$  — работа, расположенная в  $\tau$ ,
  - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$ .



Обозначения  $\overline{\overline{R}}_{Om} || R_{\max}$

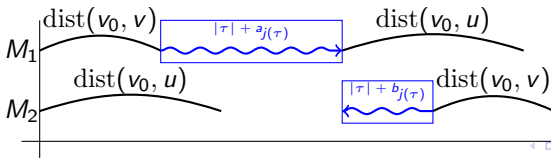
- $\mathcal{T} \subseteq E$  — множество туннелей,  $T_{RPP}^*$  — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$ :
  - $|\tau| = w(\tau)$  — время перемещения по  $\tau$ ,
  - $j(\tau)$  — работа, расположенная в  $\tau$ ,
  - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$ .

$$\overline{\overline{R}} = \max \left\{ l_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

Обозначения  $\overline{ROm} || R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$  — множество туннелей,  $T_{RPP}^*$  — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$ :
  - $|\tau| = w(\tau)$  — время перемещения по  $\tau$ ,
  - $j(\tau)$  — работа, расположенная в  $\tau$ ,
  - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$ .

$$\overline{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \right. \\ \left. \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

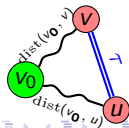
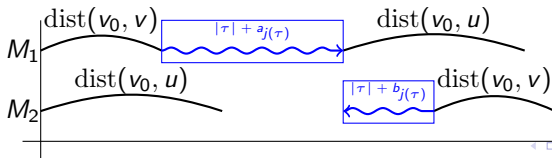


# Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Обозначения  $\overline{R}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$  — множество туннелей,  $T_{RPP}^*$  — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$ :
  - $|\tau| = w(\tau)$  — время перемещения по  $\tau$ ,
  - $j(\tau)$  — работа, расположенная в  $\tau$ ,
  - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$ .

$$\overline{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \right. \\ \left. \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

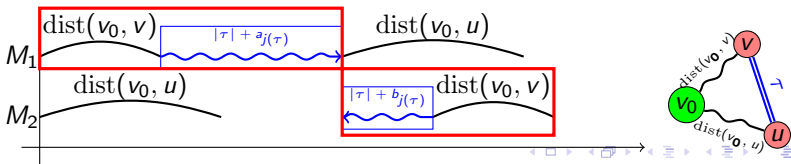


# Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Обозначения  $\overline{R}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$  — множество туннелей,  $T_{RPP}^*$  — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$ :
  - $|\tau| = w(\tau)$  — время перемещения по  $\tau$ ,
  - $j(\tau)$  — работа, расположенная в  $\tau$ ,
  - $\text{dist}(v_0, \tau) = \min\{\text{dist}(v_0, v), \text{dist}(v_0, u)\}$ .

$$\overline{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \right. \\ \left. \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$



## Теорема

Для задачи  $\overline{RO2}||R_{\max}$  существует 2-приближённый алгоритм.

## Теорема

Для задачи  $\overline{RO2}||R_{\max}$  существует 2-приближённый алгоритм.

## Идея алгоритма

- 1 Найти  $\frac{3}{2}$ -приближённое решение для задачи деревенского почтальона. Занумеровать работы в соответствии с этим решением.
- 2 Машина  $M_1$  выполняет работы в порядке этой нумерации, а  $M_2$  в обратном порядке.
- 3 В случае конфликта рассмотреть два возможных способа его разрешения, выбрать лучший.

# Алгоритм $A$ в деталях

- 1 Пусть  $\sigma$  — приближённое решение задачи  $RPP$  алгоритмом Фредериксона. Обозначим через  $D$  некоторый порядок работ, согласованный с  $\sigma$ , а через  $D^{-1}$  — противоположный порядок.
- 2 Строим расписание  $S$ , в котором машина  $M_1$  выполняет работы без простоев в порядке  $D$ , а машина  $M_2$  — в порядке  $D^{-1}$ . Если  $S$  является допустимым — выводим его и останавливаем алгоритм. Иначе переходим на следующий шаг.
- 3 Назовём **конфликтной** работу, выполнение которой в  $S$  нарушает допустимость. С учётом выбора порядков  $D$  и  $D^{-1}$  такая работа единственная, обозначим её через  $J_c$ .
- 4 Построим два допустимых расписания:
  - $S_1$ : машина  $M_1$  выполняет операции в точности как в  $S$ , машина  $M_2$  выполняет в порядке  $D^{-1}$ , но простаивает перед началом операции работы  $J_c$  до окончания обработки её машиной  $M_1$ . Далее продолжает без простоев.
  - $S_2$ : машина  $M_2$  выполняет операции в точности как в  $S$ , машина  $M_1$  выполняет в порядке  $D$ , но простаивает перед началом операции работы  $J_c$  до окончания обработки её машиной  $M_2$ . Далее продолжает без простоев.
- 5 Выводим лучшее из двух расписаний  $S_1$  и  $S_2$ .

## Лемма

Пусть  $S_A$  — расписание, построенное алгоритмом  $A$ . Тогда

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$



## Лемма

Пусть  $S_A$  — расписание, построенное алгоритмом  $A$ . Тогда

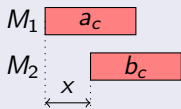
$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$

## Доказательство

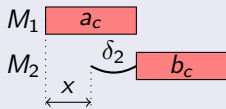
Случай 1: конфликта не было. Тогда машины работают без простоев и  $R_{\max} = l_{\max} + w(\sigma) \leq l_{\max} + \frac{3}{2} T_{RPP}^*$ .

## Доказательство

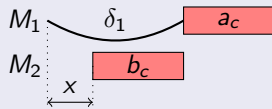
Случай 2. Конфликтная работа в вершине  $v$ .



Фрагмент расписания  $S$



Фрагмент расписания  $S_1$



Фрагмент расписания  $S_2$

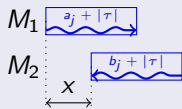
$$R_{\max}(S_1) \leq l_2 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \delta_2 = l_2 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + a_c - x,$$

$$R_{\max}(S_2) \leq l_1 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \delta_1 = l_1 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + b_c + x,$$

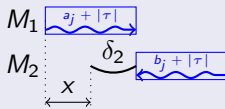
$$\min\{R_{\max}(S_1), R_{\max}(S_2)\} \leq \frac{1}{2}(R_{\max}(S_1) + R_{\max}(S_2)) \leq l_{\max} + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \frac{d_c}{2}.$$

## Доказательство

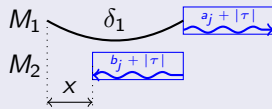
Случай 3. Конфликтная работа в туннеле  $\tau$ .



Фрагмент расписания  $S$



Фрагмент расписания  $S_1$



Фрагмент расписания  $S_2$

$$R_{\max}(S_1) \leq \ell_2 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \delta_2 = \ell_2 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + a_c + |\tau| - x,$$

$$R_{\max}(S_2) \leq \ell_1 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \delta_1 = \ell_1 + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + b_c + |\tau| + x,$$

$$\min\{R_{\max}(S_1), R_{\max}(S_2)\} \leq \ell_{\max} + \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \frac{d_c}{2} + |\tau|.$$

$$\bar{\bar{R}} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \max_{\tau \in T} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \right. \\ \left. \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$

Случай 1.  $R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max}$ .

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} \leq \frac{3}{2} (T_{RPP}^* + \ell_{\max}) \leq \frac{3}{2} \bar{R} \leq 2\bar{R}.$$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$

Случай 2.  $R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + d_c/2.$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} = \frac{3}{2} T_{RPP}^* + 2\ell_{\max} \leq \bar{R}.$$

$$\bar{R} = \max \left\{ \ell_{\max} + T_{RPP}^*, \max_{v \in V} (d_{\max}(v) + 2\text{dist}(v_0, v)), \max_{\tau \in \mathcal{T}} (d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\text{dist}(v_0, \tau)) \right\}.$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \begin{cases} 0, & \text{если конфликта не было,} \\ \frac{d_c}{2}, & \text{если } J_c \text{ находится в вершине } v, \\ \frac{d_c}{2} + |\tau|, & \text{если } J_c \text{ находится в туннеле } \tau. \end{cases}$$

Случай 3.  $R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + d_c/2 + |\tau|.$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + \ell_{\max} + \frac{2\ell_{\max}}{2} + \frac{1}{2} T_{RPP}^* \leq 2\bar{R}.$$

# Попытка улучшить оценку точности

- Случай 1:  $3/2$ .
- Случай 2: 2.
- Случай 3: 2.



- Случай 1:  $3/2$ .
- Случай 2:  $2$ .
- Случай 3:  $2$ .

Случай 2:

Случай 2.1.  $d_c \leq T_{RPP}^* + l_{\max}$ .

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \frac{T_{RPP}^* + l_{\max}}{2} = 2T_{RPP}^* + \frac{3}{2} l_{\max}$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \frac{2l_{\max}}{2} = \frac{3}{2} T_{RPP}^* + 2l_{\max}$$

Случай 2.2.  $d_c > T_{RPP}^* + l_{\max} \geq T_{RPP}^* + \frac{1}{2}d_c$ , следовательно  $\frac{1}{2}d_c \geq T_{RPP}^*$ :

$$R_{\max}(S_A) \leq (T_{RPP}^* + l_{\max}) + \frac{1}{2} T_{RPP}^* + \frac{d_c}{2} \leq d_c + \frac{3}{4} d_c \leq \frac{7}{4} d_c.$$

- Случай 1:  $3/2$ .
- Случай 2:  $7/4$ .
- Случай 3:  $2$ .

Случай 2:

Случай 2.1.  $d_c \leq T_{RPP}^* + l_{\max}$ .

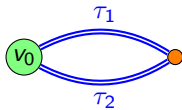
$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \frac{T_{RPP}^* + l_{\max}}{2} = 2T_{RPP}^* + \frac{3}{2} l_{\max}$$

$$R_{\max}(S_A) \leq \frac{3}{2} T_{RPP}^* + l_{\max} + \frac{2l_{\max}}{2} = \frac{3}{2} T_{RPP}^* + 2l_{\max}$$

Случай 2.2.  $d_c > T_{RPP}^* + l_{\max} \geq T_{RPP}^* + \frac{1}{2}d_c$ , следовательно  $\frac{1}{2}d_c \geq T_{RPP}^*$ :

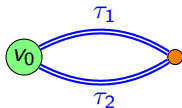
$$R_{\max}(S_A) \leq (T_{RPP}^* + l_{\max}) + \frac{1}{2} T_{RPP}^* + \frac{d_c}{2} \leq d_c + \frac{3}{4} d_c \leq \frac{7}{4} d_c.$$

# Частный случай с двумя параллельными туннелями.



Структура  $\mathcal{P}$ :

# Частный случай с двумя параллельными туннелями.

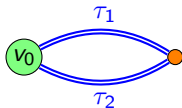


Структура  $\mathcal{P}$ :

## Теорема

Задача  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$  NP-трудна.

# Частный случай с двумя параллельными туннелями.



Структура  $\mathcal{P}$ :

## Теорема

Задача  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$  NP-трудна.

## Доказательство

Задача РАЗБИЕНИЕ:  $\sum_{i=1}^N t_i = 2K$ .

Пример задачи  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$ :

- В  $v_0$   $N$  работ вида  $J_j = \begin{pmatrix} 0 \\ t_j \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .
- Тоннели  $J_{j(\tau_1)} = J_{j(\tau_2)} = \begin{pmatrix} 2K \\ K \end{pmatrix}$ ,  $|\tau_1| = |\tau_2| = K$ .

Существует ли допустимое расписание длины  $\leq 6K$ ?

# Частный случай с двумя параллельными туннелями.

## Теорема

Задача  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$  NP-трудна.

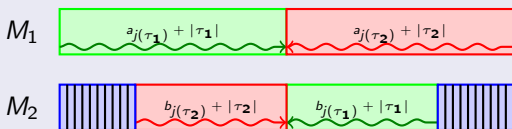
## Доказательство

Задача РАЗБИЕНИЕ:  $\sum_{i=1}^N t_i = 2K$ .

Пример задачи  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$ :

- В  $v_0$   $N$  работ вида  $J_j = \begin{pmatrix} 0 \\ t_j \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .
- Тоннели  $J_{j(\tau_1)} = J_{j(\tau_2)} = \begin{pmatrix} 2K \\ K \end{pmatrix}$ ,  $|\tau_1| = |\tau_2| = K$ .

Существует ли допустимое расписание длины  $\leq 6K$ ?



## Теорема

Для любого примера  $I$  задачи  $\overline{\overline{R}}O2|G = \mathcal{P}|R_{\max}$  длина его оптимального расписания принадлежит интервалу

$$\left[ \overline{\overline{R}}, \frac{6}{5} \overline{\overline{R}} \right],$$

и границы этого интервала точны.

## Теорема

Для любого примера  $I$  задачи  $\overline{\overline{RO2}}|G = \mathcal{P}|R_{\max}$  длина его оптимального расписания принадлежит интервалу

$$\left[ \overline{\overline{R}}, \frac{6}{5} \overline{\overline{R}} \right],$$

и границы этого интервала точны.

## Точность верхней границы

Рассмотрим пример с тремя работами:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_0; \quad J_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \tau_{1,2}; \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1.$$

$$\overline{\overline{R}} = 10.$$



## Точность верхней границы

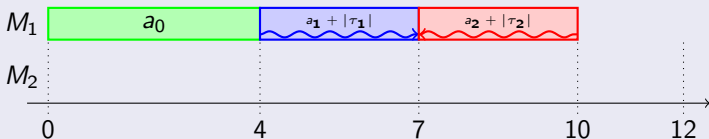
Рассмотрим пример с тремя работами:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_0; J_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \tau_{1,2}; |\tau_1| = |\tau_2| = 1.$$

$$\overline{R} = 10.$$

Если  $M_1$  выполняет операции в порядке  $a_1 \rightarrow a_0 \rightarrow a_2$ , то  $R_{\max} \geq (2 + 1) + 1 + 4 + (2 + 1) + 1 = 12$ .

Пусть  $M_1: a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ .



## Точность верхней границы

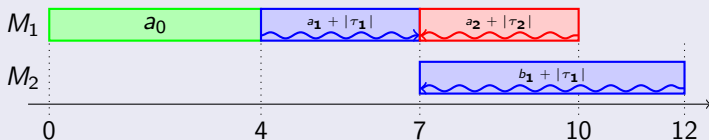
Рассмотрим пример с тремя работами:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_0; \quad J_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \tau_{1,2}; \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1.$$

$$\overline{R} = 10.$$

Если  $M_1$  выполняет операции в порядке  $a_1 \rightarrow a_0 \rightarrow a_2$ , то  $R_{\max} \geq (2 + 1) + 1 + 4 + (2 + 1) + 1 = 12$ .

Пусть  $M_1: a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ .



## Точность верхней границы

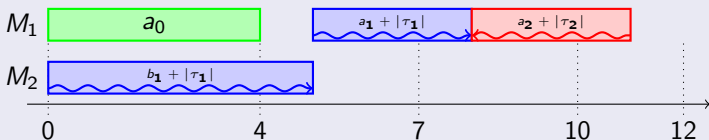
Рассмотрим пример с тремя работами:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_0; \quad J_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \tau_{1,2}; \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1.$$

$$\overline{R} = 10.$$

Если  $M_1$  выполняет операции в порядке  $a_1 \rightarrow a_0 \rightarrow a_2$ , то  $R_{\max} \geq (2 + 1) + 1 + 4 + (2 + 1) + 1 = 12$ .

Пусть  $M_1 : a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ .



## Точность верхней границы

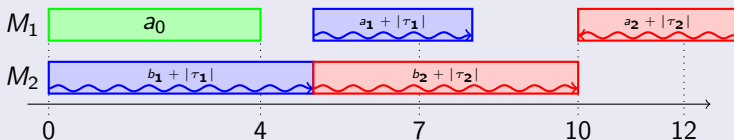
Рассмотрим пример с тремя работами:

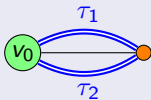
$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_0; J_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \tau_{1,2}; |\tau_1| = |\tau_2| = 1.$$

$$\overline{R} = 10.$$

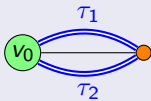
Если  $M_1$  выполняет операции в порядке  $a_1 \rightarrow a_0 \rightarrow a_2$ , то  $R_{\max} \geq (2 + 1) + 1 + 4 + (2 + 1) + 1 = 12$ .

Пусть  $M_2$ :  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ .

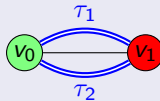


Структура  $\mathcal{P}$ 

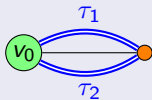
$$R_{\max}^* \leq \frac{6}{5} \bar{R}.$$

Структура  $\mathcal{P}$ 

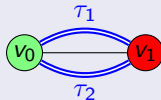
$$R_{\max}^* \leq \frac{6}{5} \bar{R}.$$

Структура  $\mathcal{P}+$ 

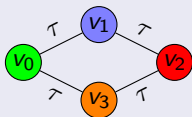
$$R_{\max}^* \leq \frac{5}{4} \bar{R}?$$

Структура  $\mathcal{P}$ 

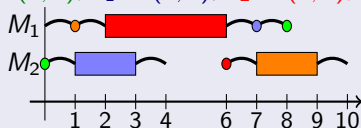
$$R_{\max}^* \leq \frac{6}{5} \bar{R}.$$

Структура  $\mathcal{P}+$ 

$$R_{\max}^* \leq \frac{5}{4} \bar{R}?$$



$$\tau = 1; J_0 = (0, 0); J_1 = (0, 2); J_2 = (4, 0); J_3 = (0, 2).$$



- 1 Улучшить оценку точность 2-приближённого алгоритма для  $\overline{RO2}||R_{\max}$ .
- 2 Исследовать гипотезу о  $\frac{5}{4}$  для  $\overline{RO2}|G = \mathcal{P} + |R_{\max}$ .
- 3 Рассмотреть обобщение задачи с независимыми временами перемещения машин.