Упрощение примеров для задачи open shop с маршрутизацией и новая постановка с работами на рёбрах

Илья Черных

Институт математики им С.Л. Соболева

Семинар “Модели и алгоритмы для задач составления расписаний”
14.10.2023

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №22-71-10015

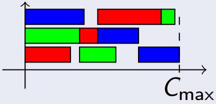
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины	$\boxed{M_1}$	$\cdots$	$\boxed{M_m}$
Работы	J_1	$\cdots$	J_n

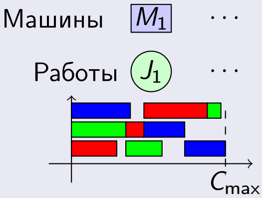
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

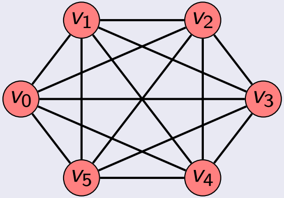
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Open Shop ($Om||C_{\max}$)...



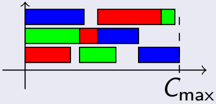
Задача коммивояжера...



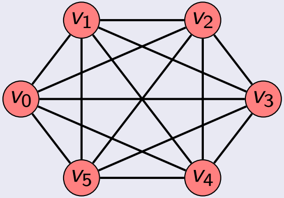
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины M_1 $\cdots$ M_m

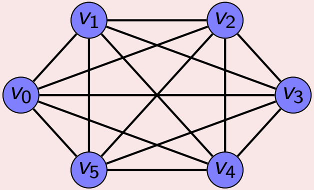
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



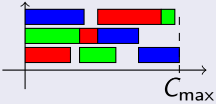
... их комбинация



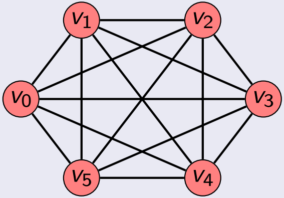
Open Shop $(Om||C_{\max})$...

Машины M_1 $\cdots$ M_m

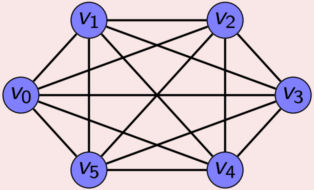
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



... их комбинация

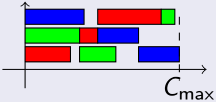


$\{J_1, \dots, J_n\}$

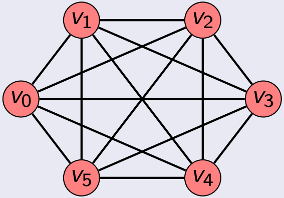
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

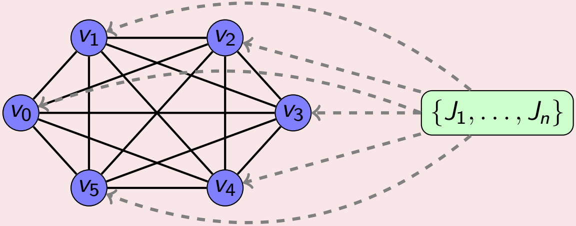
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



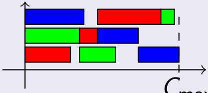
... их комбинация



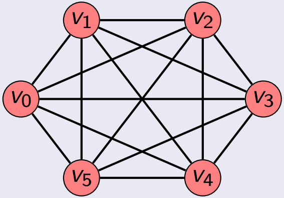
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...

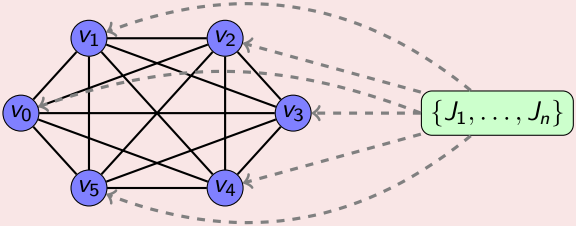


... их комбинация

$\boxed{M_1}$

$\vdots$

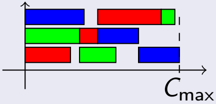
$\boxed{M_m}$



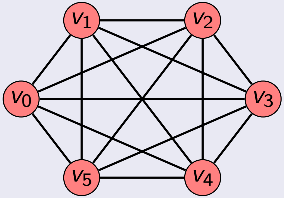
Open Shop ($Om||C_{max}$)...

Машины M_1 $\cdots$ M_m

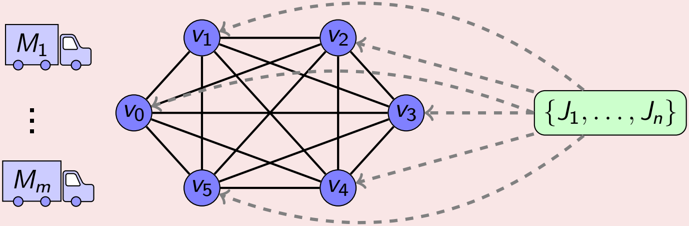
Работы J_1 $\cdots$ J_n



Задача коммивояжера...



... их комбинация



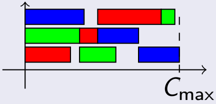
Задача open shop с маршрутизацией

Неформальное введение

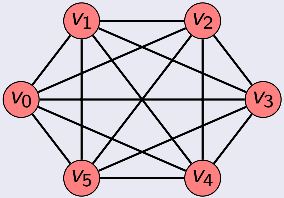
Open Shop ($Om||C_{max}$)...

Машины M_1 $\cdots$ M_m

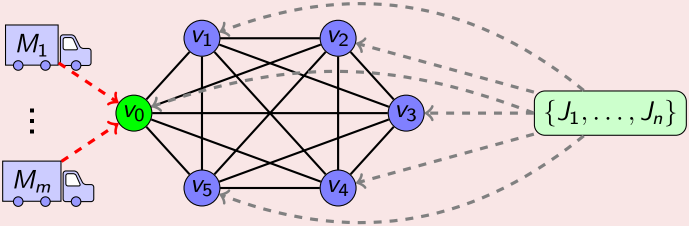
Работы J_1 $\cdots$ J_n



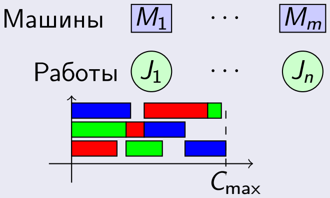
Задача коммивояжера...



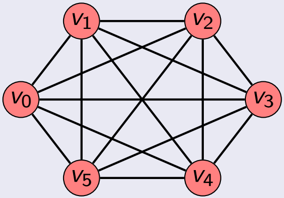
... их комбинация



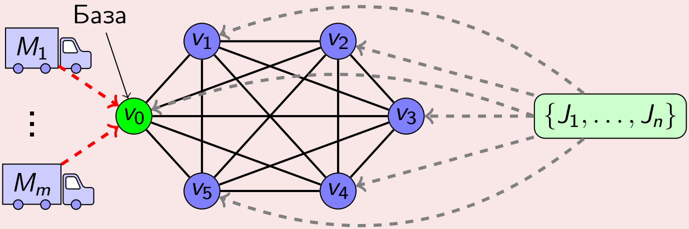
Open Shop ($Om||C_{\max}$)...



Задача коммивояжера...



... их комбинация



Формальная постановка задачи

- $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$ — множество машин;
- $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ — множество работ;
- p_{ji} — время выполнения операции работы J_j машиной M_i;
- $G = \langle V, E \rangle$ — транспортная сеть;
- $v_0 \in V$ — база;
- $w(e)$ — время перемещения по ребру e;
- $\mathrm{dist}(u, v)$ — время перемещения между u и v для машины M_i;
- $\mathcal{J}(v)$ — множество работ, расположенных в вершине v;
- $C_{ji}(S)$ — время завершения обработки J_j машиной M_i в расписании S;
- $R_i(S) = \max\limits_{v \in V} \left(\max\limits_{J_j \in \mathcal{J}(v)} c_{ji}(S) + \mathrm{dist}(v, v_0) \right);$
- $R_{\max}(S) = \max R_i(S) \to \min\limits_{S}$ — длина расписания.

Обозначение задачи

$$ROm||R_{\max}$$

$$ROm||R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);

Обозначение задачи

$$ROm||R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);

Обозначение задачи

$$ROm||R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);
- $R_{\max}$ — целевая функция, длина расписания;

Обозначение задачи

$$ROm|G = X|R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);
- $R_{\max}$ — целевая функция, длина расписания;
- X — структура транспортной сети.

Обозначение задачи

$$ROm|G = K_p|R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);
- $R_{\max}$ — целевая функция, длина расписания;
- X — структура транспортной сети.

Обозначение задачи

$$ROm|G = tree|R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);
- $R_{\max}$ — целевая функция, длина расписания;
- X — структура транспортной сети.

Обозначение задачи

$$ROm|G = X|R_{\max}$$

- RO означает open shop с маршрутизацией (Routing Open shop);
- m — число машин (опускается, если является частью входа);
- $R_{\max}$ — целевая функция, длина расписания;
- X — структура транспортной сети.

Обзор: сложность

$RO1||R_{\max}$

Задача эквивалентна метрической TSP; сильно NP-трудна

$ROm|G = K_1|R_{\max}$

Задача эквивалентна $Om||C_{\max}$:

1. Полиномиально разрешима при $m = 2$ [Gonzalez, Sahni 1976]
2. NP-трудна для $m \geqslant 3$ [Gonzalez, Sahni 1976]; существует PTAS для любого $m = \mathrm{const}$ [Sevastyanov, Woeginger 1998]
3. NP-трудна в сильном смысле, если m — часть входа; известен порог неприближаемости $5/4$ [Williamson *et al* 1997]

$RO2|G = K_2|R_{\max}$

1. NP-трудна [Averbakh, Berman, Ch 2006]
2. NP-трудна даже для *соразмерного* случая ($p_{ji} = p_j$) [Pyatkin, Ch 2022]
3. существует FPTAS [Kononov 2012]

Стандартная нижняя оценка

- $\ell_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}$ — нагрузка M_i, $d_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}$ — длина J_j,
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — длина кратчайшего обхода графа G машиной M_i

Стандартная нижняя оценка

- $\ell_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}$ — нагрузка M_i, $d_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}$ — длина J_j,
- $\ell_{\max} = \max \ell_i$ — максимальная нагрузка,
- $d_{\max}(v) = \max_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — длина кратчайшего обхода графа G машиной M_i

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$

Обзор: локализация оптимумов

Задача с одной вершиной (open shop)

- $RO2|G = K_1|R_{\max}$: $[\bar{R}, \bar{R}]$ [Gonzalez, Sahni 1976]
- $RO3|G = K_1|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]$ [Sevastyanov, Ch 1998]

Обзор: локализация оптимумов

Задача с одной вершиной (open shop)

- $RO2|G = K_1|R_{\max}$: $[\bar{R}, \bar{R}]$ [Gonzalez, Sahni 1976]
- $RO3|G = K_1|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]$ [Sevastyanov, Ch 1998]

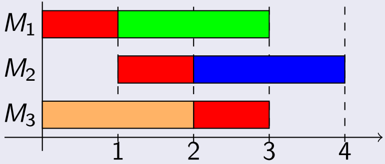
Задача с маршрутизацией

- $RO2||R_{\max}$: $R^*_{\max} \leqslant \frac{4}{3}\bar{R}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013]
- $RO2|G = K_2|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ [Averbakh, Berman, Ch 2005]
- $RO2|G = K_3, j\text{-}prpt|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$ [Pyatkin, Ch 2022]
- $RO2|G = K_3|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ [Lgotina, Ch 2016]
- $RO2|G = tree|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{6}{5}\bar{R}]$ [Krivonogova, Ch 2019]
- $RO3|G = K_2|R_{\max}$: $[\bar{R}, \frac{4}{3}\bar{R}]$ [Krivonogova, Ch 2020]

Достижимость верхних границ интервалов

$RO3|G = K_1|R_{\max}$: $\frac{4}{3}$

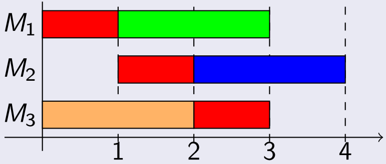
$J_1 = (1, 1, 1)$; $J_2 = (2, 0, 0)$;
$J_3 = (0, 2, 0)$; $J_4 = (0, 0, 2)$;



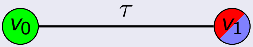
Достижимость верхних границ интервалов

$RO3|G = K_1|R_{\max}$: $\frac{4}{3}$

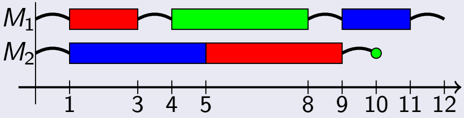
$J_1 = (1, 1, 1)$; $J_2 = (2, 0, 0)$;
$J_3 = (0, 2, 0)$; $J_4 = (0, 0, 2)$;



$RO2|G = K_2|R_{\max}$: $\frac{6}{5}$

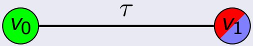


$J_1 = (4, 0)$; $\tau = 1$;
$J_2 = (2, 4)$; $J_3 = (2, 4)$.

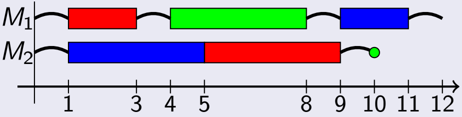


Достижимость верхних границ интервалов

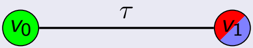
$RO2|G = K_2|R_{\max}$: $\frac{6}{5}$



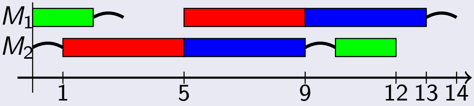
$J_1 = (4, 0)$; $\tau = 1$;
$J_2 = (2, 4)$; $J_3 = (2, 4)$.



$RO2|G = K_2, j\text{-}prpt|R_{\max}$: $\frac{7}{6}$



$J_1 = (2, 2)$; $\tau = 1$;
$J_2 = (4, 4)$; $J_3 = (4, 4)$.



Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

$G = K_2$

[Averbakh, Berman, Ch 2005]

Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

$G = K_2$

[Averbakh, Berman, Ch 2005]

$\rightarrow$

$G = K_3$

[Ch, Lgotina 2016]

Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

$G = K_2$

[Averbakh, Berman, Ch 2005]

$G = tree$

[Ch, Krivonogova 2019]

$G = K_3$

[Ch, Lgotina 2016]

Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

$G = K_2$

[Averbakh, Berman, Ch 2005]

$G = tree$

[Ch, Krivonogova 2019]

$G = K_3$

[Ch, Lgotina 2016]

$G = C_4$

[???]

Что дальше?

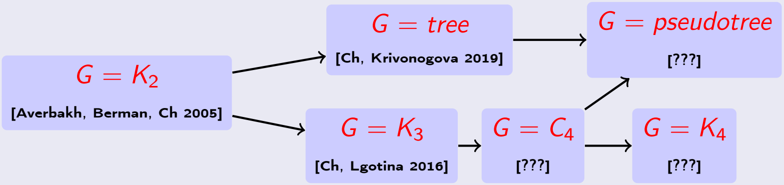
$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] $\rightarrow$ $G = tree$ [Ch, Krivonogova 2019]

$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] $\rightarrow$ $G = K_3$ [Ch, Lgotina 2016] $\rightarrow$ $G = C_4$ [???] $\rightarrow$ $G = K_4$ [???]

Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?



Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{6}{5}\bar{R}$?

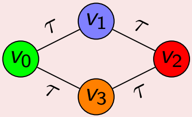
$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] → $G = tree$ [Ch, Krivonogova 2019] → $G = pseudotree$ [???]

$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] → $G = K_3$ [Ch, Lgotina 2016] → $G = C_4$ [Ch, Ch 2023] → $G = K_4$ [???]

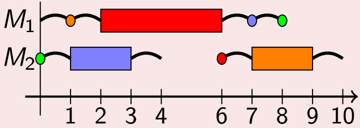
$G = C_4$ [Ch, Ch 2023] → $G = pseudotree$ [???]

Ответ, кстати, положительный!

- $RO2|G = C_4|R_{\max}$: $OPT \in [\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$ [Chechushkov, Ch 2023]



$\tau = 1$; $J_0 = (0, 0)$; $J_1 = (0, 2)$;
$J_2 = (4, 0)$; $J_3 = (0, 2)$.



Что дальше?

$RO2||R_{\max}$: Существует ли пример, для которого $OPT > \frac{5}{4}\bar{R}$?

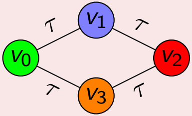
$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] → $G = tree$ [Ch, Krivonogova 2019] → $G = pseudotree$ [???]

$G = K_2$ [Averbakh, Berman, Ch 2005] → $G = K_3$ [Ch, Lgotina 2016] → $G = C_4$ [Ch, Ch 2023] → $G = pseudotree$ [???]

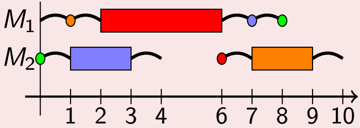
$G = C_4$ [Ch, Ch 2023] → $G = K_4$ [???]

Ответ, кстати, положительный!

- $RO2|G = C_4|R_{\max}$: $OPT \in [\bar{R}, \frac{5}{4}\bar{R}]$ [Chechushkov, Ch 2023]



$\tau = 1$; $J_0 = (0, 0)$; $J_1 = (0, 2)$;
$J_2 = (4, 0)$; $J_3 = (0, 2)$.



Упрощение примеров

Основная идея:

I

Упрощение примеров

Основная идея:

- Упростить данный пример I до некоторого $\tilde{I}$, с сохранением $\bar{R}$.

$$I \longrightarrow \tilde{I}$$

Упрощение примеров

Основная идея:

- Упростить данный пример I до некоторого $\tilde{I}$, с сохранением $\bar{R}$.
- С помощью некоторого алгоритма A найти “достаточно хорошее” расписание $\tilde{S}$ для $\tilde{I}$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & \tilde{I} \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\ & \tilde{S} \end{tikzcd}$$

Упрощение примеров

Основная идея:

- Упростить данный пример I до некоторого $\tilde{I}$, с сохранением $\bar{R}$.
- С помощью некоторого алгоритма A найти "достаточно хорошее" расписание $\tilde{S}$ для $\tilde{I}$.
- Проинтерпретировать его, как допустимое расписание S для I такой же длины.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r] & \tilde{I} \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\
S & \tilde{S} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Упрощение примеров

Основная идея:

- Упростить данный пример I до некоторого $\tilde{I}$, с сохранением $\bar{R}$.
- С помощью некоторого алгоритма A найти "достаточно хорошее" расписание $\tilde{S}$ для $\tilde{I}$.
- Проинтерпретировать его, как допустимое расписание S для I такой же длины.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \tilde{I} \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\
S & \tilde{S} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Известные преобразования. Склеивание работ.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}(v)$ — некоторое подмножество работ из v.
Под операцией склеивания множества $\mathcal{K}$ понимаем следующее преобразование примера:

$$\mathcal{J}'(v) = \mathcal{J}(v) \setminus \mathcal{K} \cup \{J_{\mathcal{K}}\}, \; p_{\mathcal{K}i} = \sum_{J_j \in \mathcal{K}} p_{ji}.$$

$J_{\mathcal{K}}$ — новая работа, заменившая множество $\mathcal{K}$.

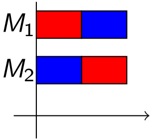
Известные преобразования. Склеивание работ.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}(v)$ — некоторое подмножество работ из v.
Под операцией склеивания множества $\mathcal{K}$ понимаем следующее преобразование примера:

$$\mathcal{J}'(v) = \mathcal{J}(v) \setminus \mathcal{K} \cup \{J_{\mathcal{K}}\}, \; p_{\mathcal{K}i} = \sum_{J_j \in \mathcal{K}} p_{ji}.$$

$J_{\mathcal{K}}$ — новая работа, заменившая множество $\mathcal{K}$.



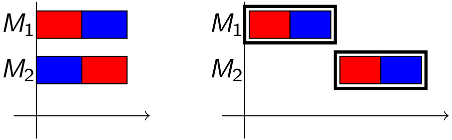
Известные преобразования. Склеивание работ.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}(v)$ — некоторое подмножество работ из v.
Под операцией склеивания множества $\mathcal{K}$ понимаем следующее преобразование примера:

$$\mathcal{J}'(v) = \mathcal{J}(v) \setminus \mathcal{K} \cup \{J_{\mathcal{K}}\}, \; p_{\mathcal{K}i} = \sum_{J_j \in \mathcal{K}} p_{ji}.$$

$J_{\mathcal{K}}$ — новая работа, заменившая множество $\mathcal{K}$.



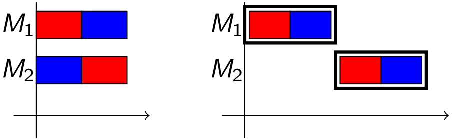
Известные преобразования. Склеивание работ.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}(v)$ — некоторое подмножество работ из v.
Под операцией склеивания множества $\mathcal{K}$ понимаем следующее преобразование примера:

$$\mathcal{J}'(v) = \mathcal{J}(v) \setminus \mathcal{K} \cup \{J_\mathcal{K}\}, \; p_{\mathcal{K}i} = \sum_{J_j \in \mathcal{K}} p_{ji}.$$

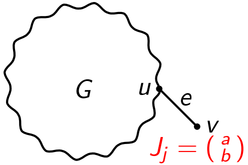
$J_\mathcal{K}$ — новая работа, заменившая множество $\mathcal{K}$.



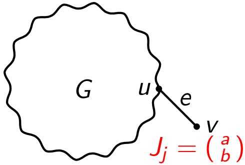
Условие сохранения $\bar{R}$ для $ROm||R_{\max}$:

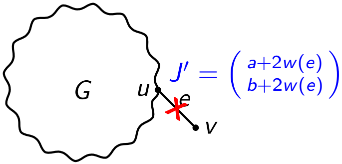
$$d_\mathcal{K} = \sum_{j \in \mathcal{K}} d_j \leqslant \bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v).$$

Стягивание висячих рёбер

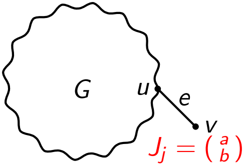


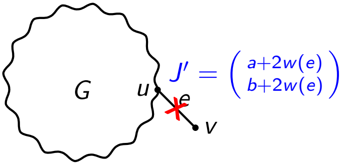
Стягивание висячих рёбер

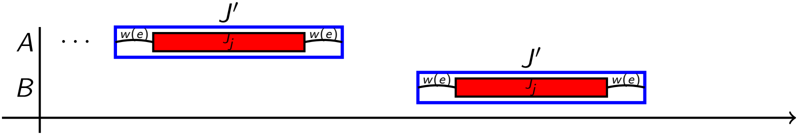




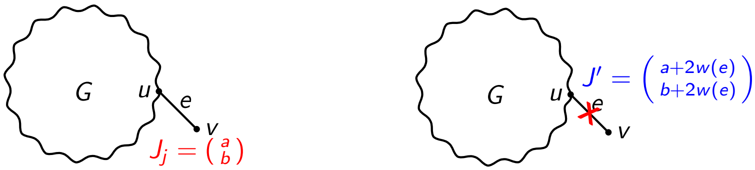
Стягивание висячих рёбер

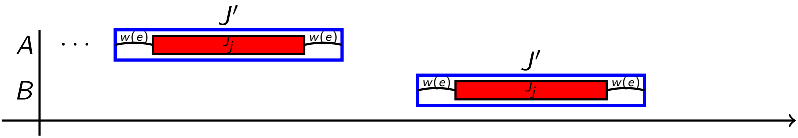






Стягивание висячих рёбер

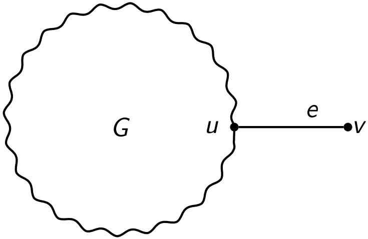




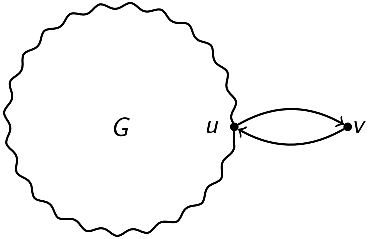
Условие сохранения $\bar{R}$ для $ROm||R_{\max}$:

$$d_j + 2mw(e) \leqslant \bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, u).$$

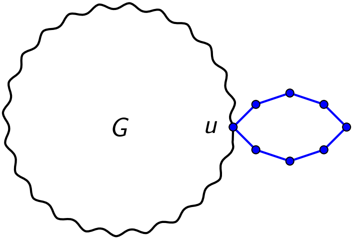
Стягивание висячих циклов

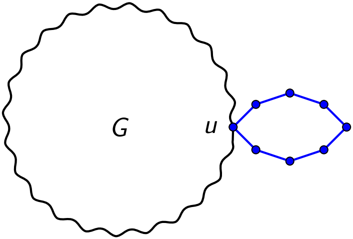


Стягивание висячих циклов



Стягивание висячих циклов

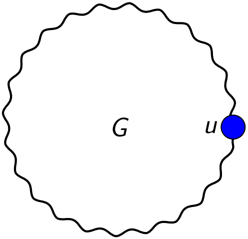




Определение

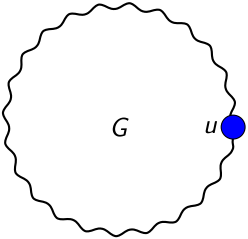
Цикл называется висячим, если он имеет единственную *точку входа* (вершину степени > 2 или базу v_0).

Стягивание висячих циклов



Определение

Цикл называется висячим, если он имеет единственную *точку входа* (вершину степени > 2 или базу v_0).



Определение

Цикл называется висячим, если он имеет единственную *точку входа* (вершину степени > 2 или базу v_0).

Условие сохранения $\bar{R}$ для $ROm||R_{\max}$:

$$\sum_{v \in C \setminus \{u\}} \Delta(v) + mw(C) \leqslant \bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v),$$

где $\Delta(v) = \sum_{j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — нагрузка вершины v.

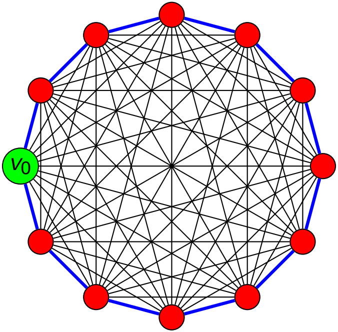
Теорема 1

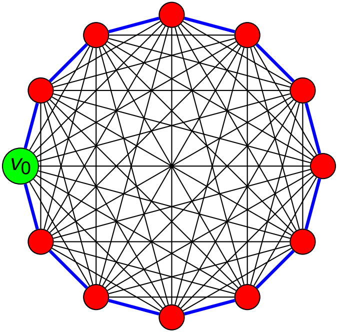
Для любого примера задачи $ROm||R_{\max}$ с помощью склеивания работ можно упростить пример таким образом, что стандартная нижняя оценка не изменится И не более чем $m-1$ вершин будут содержать больше одной работы, причем суммарное число работ в этих вершинах не превосходит $2m-1$.

Теорема 2

Для любого примера задачи $ROm||R_{\max}$ можно удалить висячие элементы таким образом, что стандартная нижняя оценка не изменится И количество оставшихся висячих элементов не будет превосходить $m-1$.

Упрощение примера для $RO2||R_{max}$

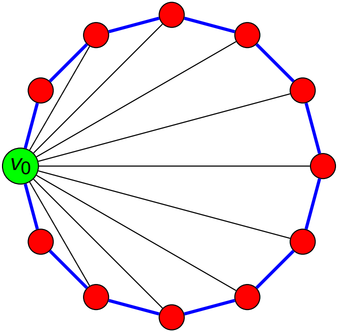




Определение

Рёбра, не принадлежащие оптимальному обходу, называем хордами. Хорды, инцидентные базе, называем радиусами. Хорду называем критической, если её удаление приводит к увеличению $\bar{R}$.

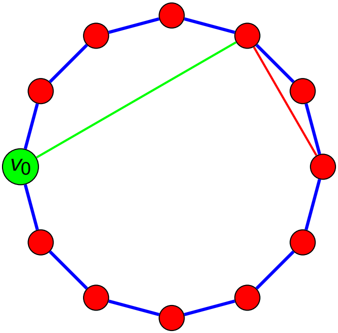
Упрощение примера для $RO2||R_{max}$



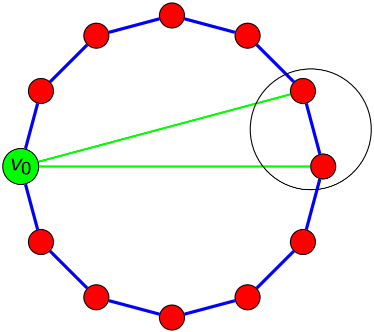
Определение

Рёбра, не принадлежащие оптимальному обходу, называем хордами. Хорды, инцидентные базе, называем радиусами. Хорду называем критической, если её удаление приводит к увеличению $\bar{R}$.

Про критические хорды

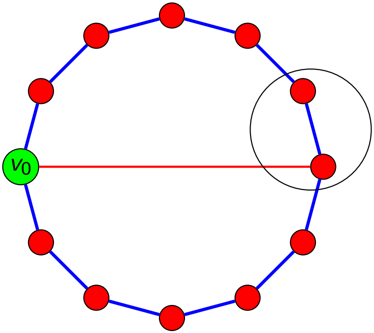


1. Хорда, не являющаяся радиусом, может быть критической.



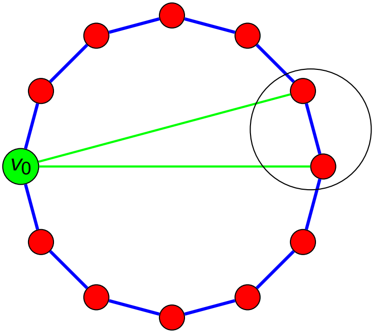
1. Хорда, не являющаяся радиусом, может быть критической.
2. Хорда может стать критической лишь после удаления другой хорды.

Про критические хорды



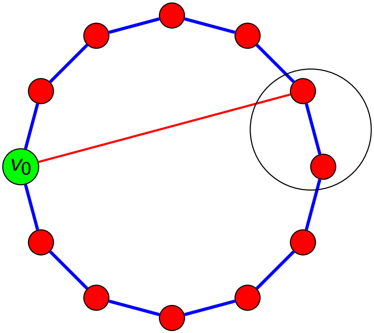
1. Хорда, не являющаяся радиусом, может быть критической.
2. Хорда может стать критической лишь после удаления другой хорды.

Про критические хорды



1. Хорда, не являющаяся радиусом, может быть критической.
2. Хорда может стать критической лишь после удаления другой хорды.

Про критические хорды



1. Хорда, не являющаяся радиусом, может быть критической.
2. Хорда может стать критической лишь после удаления другой хорды.

Обозначим через $\widehat{\mathrm{dist}}(v, u)$ расстояние между v и u в графе после удаления всех хорд.

Лемма 0

Пусть радиус $[v_0, u]$ критический. Тогда для некоторой работы $J_j \in \mathcal{J}(u)$

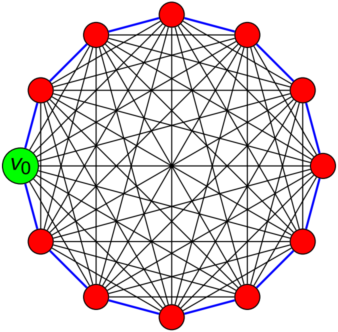
$$d_j + 2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) > \bar{R}.$$

Лемма 1

Пусть I — пример задачи $RO2||R_{\max}$, и транспортная сеть является полным графом с метрическими весами рёбер. Тогда удаление всёх хорд, не являющимися радусами, не приводит к увеличению стандартной нижней оценки.

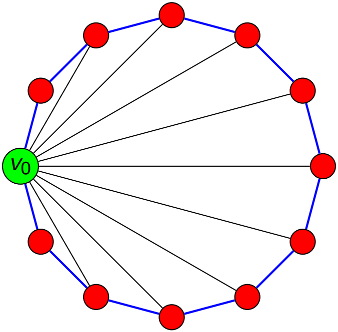
Лемма 2

Пусть в примере I радиус $[v_0, v]$ является критическим. Тогда удаление остальных радиусов не приводит к увеличению стандартной нижней оценки.



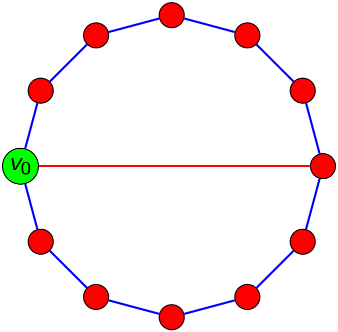
Удаление лишних хорд

1. При необходимости, добавить в граф недостающие радиусы.



Удаление лишних хорд

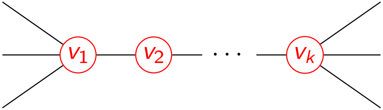
1. При необходимости, добавить в граф недостающие радиусы.
2. Удалить все хорды, не являющиеся радусами.



Удаление лишних хорд

1. При необходимости, добавить в граф недостающие радиусы.
2. Удалить все хорды, не являющиеся радиусами.
3. Удалить все радиусы, за исключением, быть может, единственного критического.

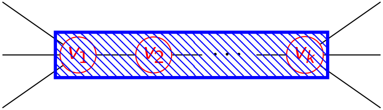
Преобразование 2. Стягивание цепи: идея[1]



Пусть $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — цепь, промежуточные узлы которой имеют степень 2.

[1] На похожей идее стягивания цепей основан $O(\sqrt{m})$-приближенный алгоритм для $ROm||R_{\max}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].

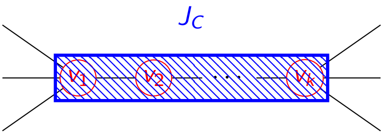
Преобразование 2. Стягивание цепи: идея[1]



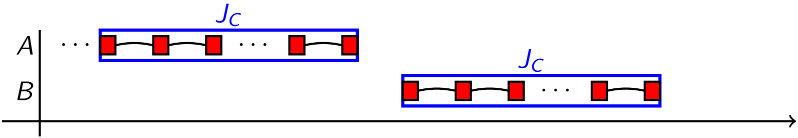
Пусть $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — цепь, промежуточные узлы которой имеют степень 2.

[1] На похожей идее стягивания цепей основан $O(\sqrt{m})$-приближенный алгоритм для $ROm||R_{\max}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].

Преобразование 2. Стягивание цепи: идея[1]

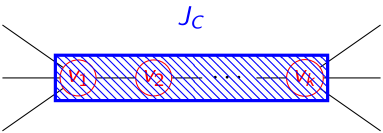


Пусть $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — цепь, промежуточные узлы которой имеют степень 2.

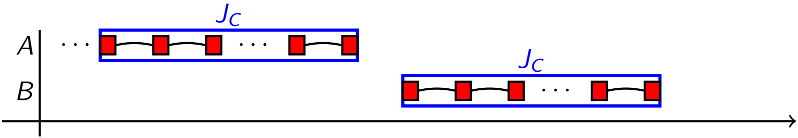


[1]На похожей идее стягивания цепей основан $O(\sqrt{m})$-приближенный алгоритм для $ROm||R_{\max}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].

Преобразование 2. Стягивание цепи: идея[1]



Пусть $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — цепь, промежуточные узлы которой имеют степень 2.



Определение

Новые рёбра, полученные стягиванием цепей (и содержащие работы!) будем называть туннелями.

[1]На похожей идее стягивания цепей основан $O(\sqrt{m})$-приближенный алгоритм для $ROm||R_{\max}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013].

Условие сохранения $\bar{R}$

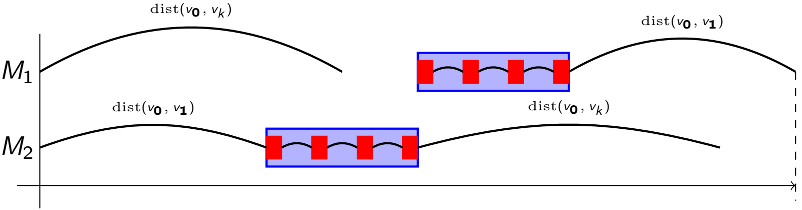
Пусть $C = (v_1, \ldots, v_k)$ — часть кратчайшего обхода, $\mathrm{dist}(v_0, v_1) \leqslant \mathrm{dist}(v_0, v_k)$.
Стягивание цепи C не увеличит $\bar{R}$, если

$$d_C = \sum_{j=1}^{k} \Delta(v_j) + 2w(C) \leqslant \bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v_1).$$

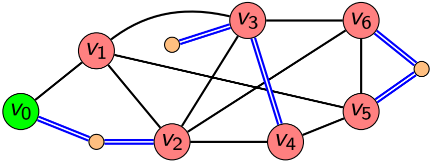
Условие сохранения $\bar{R}$

Пусть $C = (v_1, \ldots, v_k)$ — часть кратчайшего обхода, $\mathrm{dist}(v_0, v_1) \leqslant \mathrm{dist}(v_0, v_k)$.
Стягивание цепи C не увеличит $\bar{R}$, если

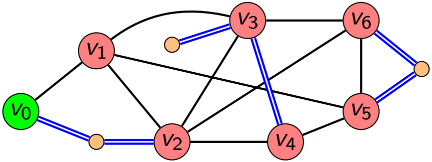
$$d_C = \sum_{j=1}^{k} \Delta(v_j) + 2w(C) \leqslant \bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v_1).$$



Новая постановка задачи (с туннелями)

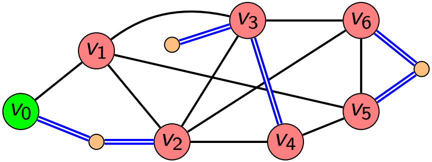


Новая постановка задачи (с туннелями)



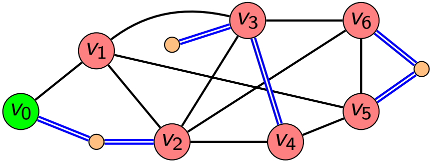
- v_0 — база.

Новая постановка задачи (с туннелями)

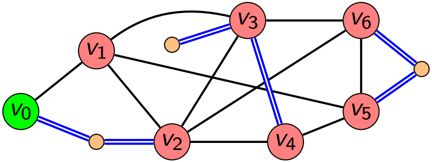


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.

Новая постановка задачи (с туннелями)

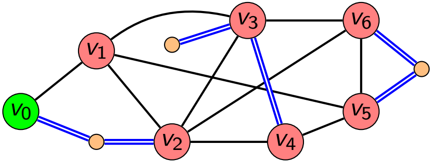


- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).



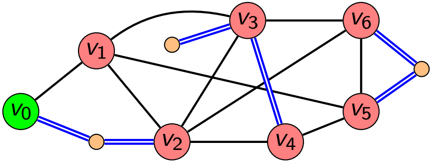
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:

Новая постановка задачи (с туннелями)



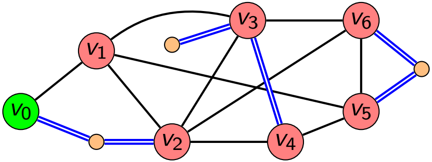
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).

Новая постановка задачи (с туннелями)



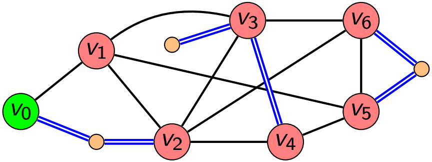
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).

Новая постановка задачи (с туннелями)



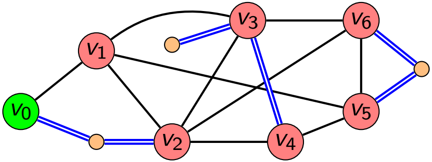
- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно (как и по обычному ребру), но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.

Новая постановка задачи (с туннелями)



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно (как и по обычному ребру), но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.
  - Машина выполняет операцию в туннеле в процессе перемещения.

Новая постановка задачи (с туннелями)



- v_0 — база.
- Некоторые вершины (база и красные) содержат работы (возможно, несколько работ в вершине). Оранжевые вершины не содержат работ.
- Некоторые рёбра (чёрные) используются для перемещения (как и раньше, прохождение по ребру требует времени).
- Остальные рёбра (двойные синие) — туннели:
  - Могут быть использованы для перемещения (имеют длину).
  - Содержат по одной работе (длительности операций!).
  - Любое количество машин могут перемещаться по туннелю одновременно (как и по обычному ребру), но две машины не могут выполнять операции одновременно в одном туннеле.
  - Машина выполняет операцию в туннеле в процессе перемещения.
- Требуется выполнить все работы и вернуться на базу ASAP.

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

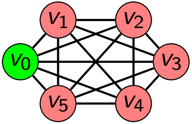
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v) \right) \right\}$$

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

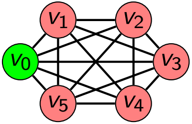
$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{ \ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v) \Big) \right\}$$

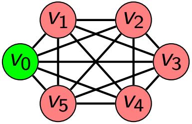


Задача
коммивояжера

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



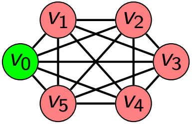
Задача коммивояжера

T^* — длина кратчайшего обхода в TSP.

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\Big)\right\}$$

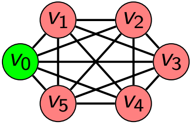


Задача комивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.

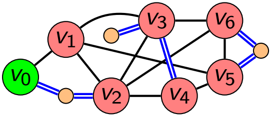
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



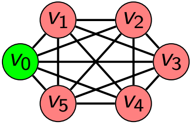
Задача комивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.



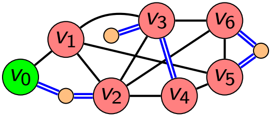
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\Big)\right\}$$



Задача комивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.

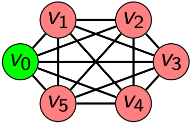


Задача деревенского почтальона

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

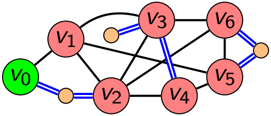
Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*_{TSP}, \max_{v\in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right)\right\}$$



Задача коммивояжера

T^*_{TSP} — длина кратчайшего обхода в TSP.



Задача деревенского почтальона

T^*_{RPP} — длина кратчайшего обхода в RPP.

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

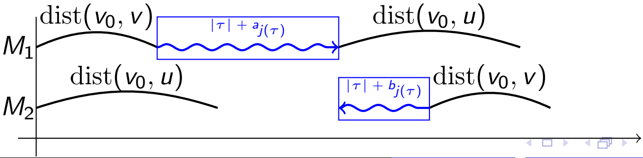
- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{ \ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V} \left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right), \max_{\tau \in \mathcal{T}} \left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right) \Big\}.$$

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{\ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V}\left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right),$$
$$\max_{\tau \in \mathcal{T}}\left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right)\Big\}.$$

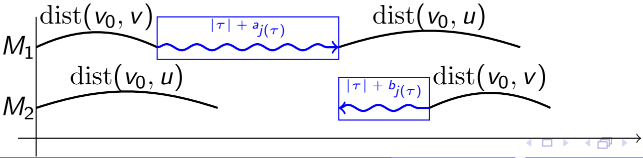


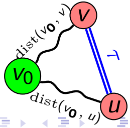
Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{ \ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V} \left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\right), \max_{\tau \in \mathcal{T}} \left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau)\right) \Big\}.$$





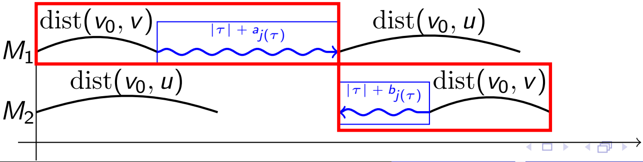
Стандартная нижняя оценка для задачи с туннелями

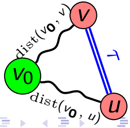
Обозначения $\overline{\overline{R}}Om||R_{\max}$

- $\mathcal{T} \subseteq E$ — множество туннелей, T^*_{RPP} — оптимум RPP,
- $\forall \tau = [v, u] \in \mathcal{T}$:
  - $|\tau| = w(\tau)$ — время перемещения по τ,
  - $j(\tau)$ — работа, расположенная в τ,
  - $\mathrm{dist}(v_0, \tau) = \min\{\mathrm{dist}(v_0, v), \mathrm{dist}(v_0, u)\}$.

$$\overline{\overline{R}} = \max\Big\{ \ell_{\max} + T^*_{RPP}, \max_{v \in V} \left(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v) \right),$$

$$\max_{\tau \in \mathcal{T}} \left(d_{j(\tau)} + 2|\tau| + 2\mathrm{dist}(v_0, \tau) \right) \Big\}.$$





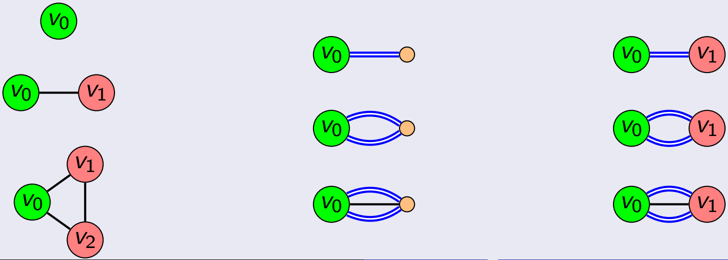
Важный результат для двухмашинной задачи

Теорема 3

Для любого примера I задачи $RO2||R_{\max}$, используя склеивание работ, удаление хорд и стягивание цепей/циклов, можно с преобразовать I в I' с не более, чем двумя туннелями так, что $\bar{R}(I') = \bar{R}(I)$ и транспортная сеть в I' имеет один из следующих видов.

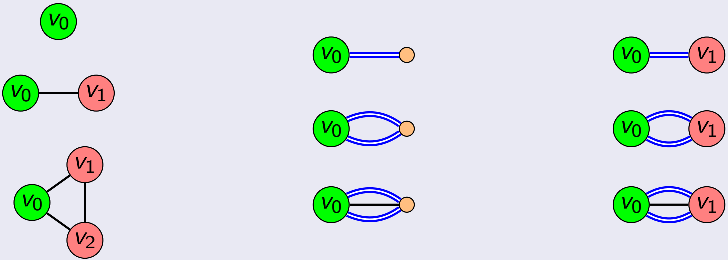
Возможные структуры транспортной сети после упрощения:

База и v_2 содержат по одной работе. Вершина v_1 содержит не более трёх.



Обзор “простых” структур

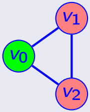
Возможные структуры из Теоремы 3

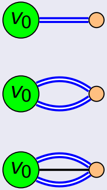


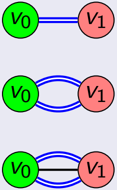
Обзор "простых" структур

Возможные структуры из Теоремы 3

Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$
[Gonzalez,Sahni 1976]





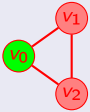


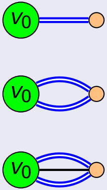
Обзор “простых” структур

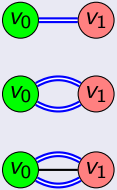
Возможные структуры из Теоремы 3

Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$
[Gonzalez,Sahni 1976]

NP-трудна, $OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$
[Averbakh, Berman, Ch 2006]





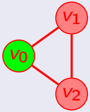


Обзор “простых” структур

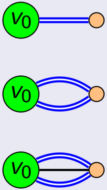
Возможные структуры из Теоремы 3

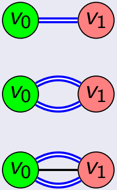
Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$ [Gonzalez,Sahni 1976]

NP-трудна, $OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Averbakh, Berman, Ch 2006]



$OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Ch, Lgotina 2016]



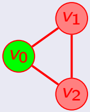


Обзор “простых” структур

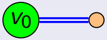
Возможные структуры из Теоремы 3

Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$ [Gonzalez,Sahni 1976]

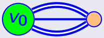
NP-трудна, $OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Averbakh, Berman, Ch 2006]

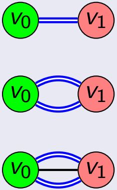


$OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Ch, Lgotina 2016]



Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$ [Ch, Shigina 2023]



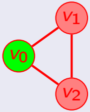


Обзор “простых” структур

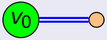
Возможные структуры из Теоремы 3

Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$ [Gonzalez,Sahni 1976]

NP-трудна, $OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Averbakh, Berman, Ch 2006]

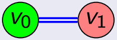


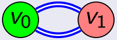
$OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Ch, Lgotina 2016]

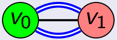


Полином., $OPT = \overline{\overline{R}}$ [Ch, Shigina 2023]

NP-трудна, $OPT \leqslant \frac{6}{5}\overline{\overline{R}}$ [Ch, Shigina 2023]







Общая постановка двухмашинной задачи с туннелями

Теорема 4

Для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ существует 2-приближённый алгоритм.

Общая постановка двухмашинной задачи с туннелями

Теорема 4

Для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ существует 2-приближённый алгоритм.

Идея алгоритма

1. Найти $\frac{3}{2}$-приближённое решение для задачи деревенского почтальона. Занумеровать работы в соответствии с этим решением.
2. Машина M_1 выполняет работы в порядке этой нумерации, а M_2 в обратном порядке.
3. В случае конфликта рассмотреть два возможных способа его разрешения, выбрать лучший.

Открытые вопросы

1. Правда ли, что $RO2||R_{\max}$ $OPT \leqslant \frac{5}{4}\bar{R}$? (Известно, что $OPT \leqslant \frac{4}{3}\bar{R}$ [Ch, Kononov, Sevastyanov 2013])
2. Правда ли, что для задачи $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ с простыми структурами транспортной сети (из Теоремы 3) $OPT \leqslant \frac{5}{4}\bar{R}$?
3. Построить алгоритм приближенного решения для $\overline{\overline{R}}O2||R_{\max}$ с оценкой точности меньше 2.

Доказательство Теоремы 3

Теорема 3

Для любого примера I задачи $RO2||R_{\max}$, используя склеивание работ, удаление хорд и стягивание цепей/циклов, можно с преобразовать I в I' с не более, чем двумя туннелями так, что $\bar{R}(I') = \bar{R}(I)$ и транспортная сеть в I' имеет один из следующих видов...

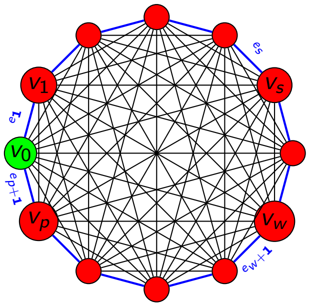
Доказательство

Первый шаг: выделяем кратчайший обход σ, удаляем все некритические хорды. Пусть вершины занумерованы по обходу $\sigma = (v_0, v_1, ..., v_p, v_0)$. Рёбра тоже занумеруем по σ: $e_1 = [v_0, v_1], \ldots, e_p = [v_{p-1}, v_p], e_{p+1} = [v_p, v_0]$.
Имеем

$$\sum_{k=1}^{p} \Delta(v_k) + 2T^* > \bar{R}.$$

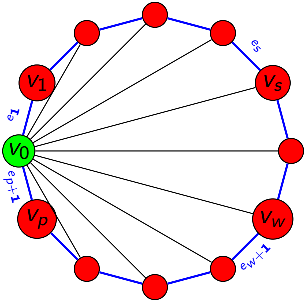
Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет



Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

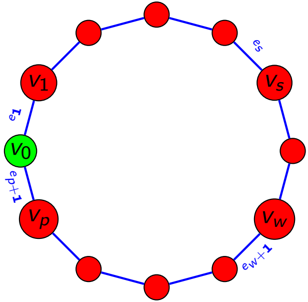


Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

Пусть $0 < s \leqslant p$ — максимальный индекс такой, что

$$\sum_{t=1}^{s} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) \leqslant \bar{R}.$$

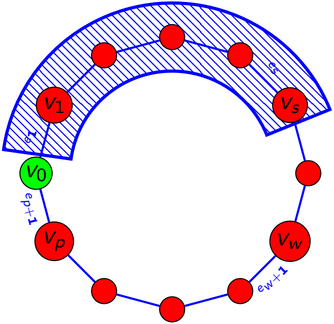


Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

Пусть $0 < s \leqslant p$ — максимальный индекс такой, что

$$\sum_{t=1}^{s} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) \leqslant \bar{R}.$$



Доказательство (продолжение)

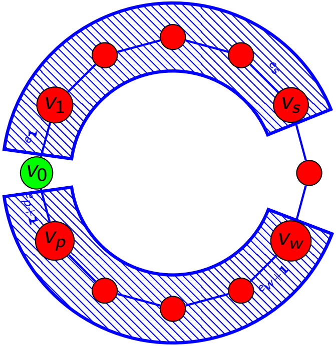
Случай 1: критических хорд нет

Пусть $0 < s \leqslant p$ — максимальный индекс такой, что

$$\sum_{t=1}^{s} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) \leqslant \bar{R}.$$

Пусть $w > s$ — минимальный индекс такой, что

$$\sum_{t=w}^{p} (\Delta(v_t) + 2w(e_{t+1})) \leqslant \bar{R}.$$



Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

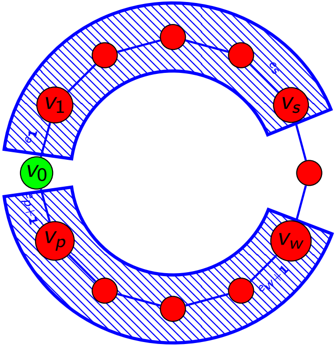
Пусть $0 < s \leqslant p$ — максимальный индекс такой, что

$$\sum_{t=1}^{s} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) \leqslant \bar{R}.$$

Пусть $w > s$ — минимальный индекс такой, что

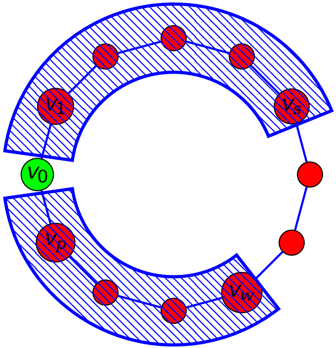
$$\sum_{t=w}^{p} (\Delta(v_t) + 2w(e_{t+1})) \leqslant \bar{R}.$$

Докажем, что $w \leqslant s + 2$.



Случай 1: критических хорд нет

Пусть это не так.

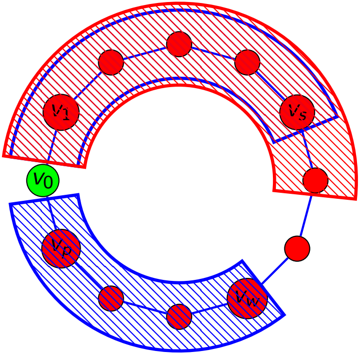


Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

Пусть это не так.

$$\sum_{t=1}^{s+1} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) > \bar{R}.$$



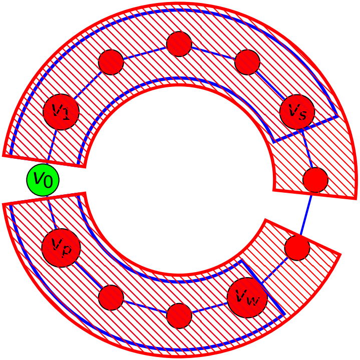
Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

Пусть это не так.

$$\sum_{t=1}^{s+1} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) > \bar{R}.$$

$$\sum_{t=w-1}^{p} (\Delta(v_t) + 2w(e_{t+1})) > \bar{R}.$$



Доказательство (продолжение)

Случай 1: критических хорд нет

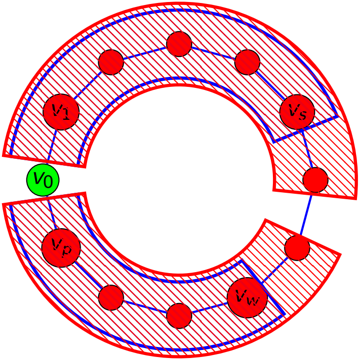
Пусть это не так.

$$\sum_{t=1}^{s+1} (\Delta(v_t) + 2w(e_t)) > \bar{R}.$$

$$\sum_{t=w-1}^{p} (\Delta(v_t) + 2w(e_{t+1})) > \bar{R}.$$

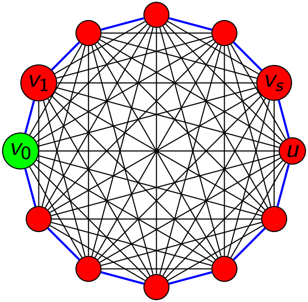
Получили противоречие:

$$\Delta + 2T^* = \ell_1 + \ell_2 + 2T^* > 2\bar{R}.$$



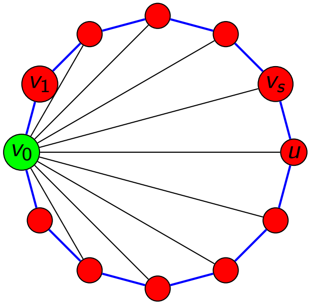
Доказательство (окончание)

Случай 2: есть критический радиус



Доказательство (окончание)

Случай 2: есть критический радиус

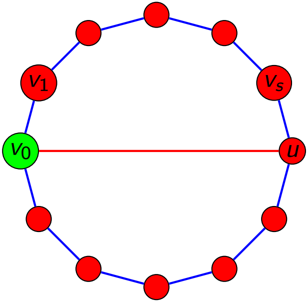


Доказательство (окончание)

Случай 2: есть критический радиус

$[v_0, u]$ — критический радиус: $\exists J_j \in \mathcal{J}(u)|$

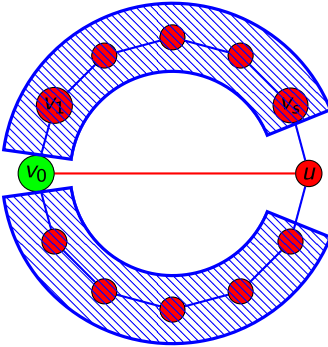
$$2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) + d_j > \bar{R}.$$



Случай 2: есть критический радиус

$[v_0, u]$ — критический радиус: $\exists J_j \in \mathcal{J}(u)|$

$$2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) + d_j > \bar{R}.$$



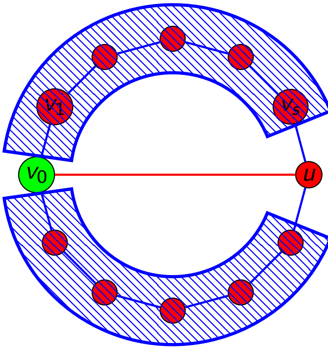
Случай 2: есть критический радиус

$[v_0, u]$ — критический радиус: $\exists J_j \in \mathcal{J}(u) |$

$$2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) + d_j > \bar{R}.$$

$$\sum_{t=1}^{s} (2w(e_t) + \Delta(v_t)) \leqslant$$

$$\sum_{t=1}^{s} \Delta(v_t) + 2T^* - 2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u).$$



Доказательство (окончание)

Случай 2: есть критический радиус

$[v_0, u]$ — критический радиус: $\exists J_j \in \mathcal{J}(u)|$

$$2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) + d_j > \bar{R}.$$

$$\sum_{t=1}^{s}(2w(e_t) + \Delta(v_t)) \leqslant$$

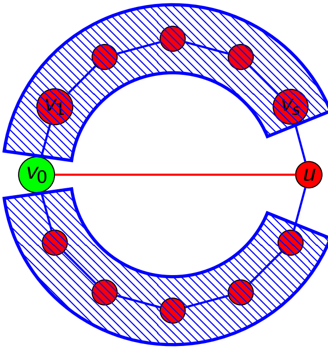
$$\sum_{t=1}^{s}\Delta(v_t) + 2T^* - 2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u).$$

Если

$$\sum_{t=1}^{s}\Delta(v_t) + 2T^* - 2\widehat{\mathrm{dist}}(v_0, u) > \bar{R},$$

то

$$\Delta + 2T^* > 2\bar{R}.$$



Доказательство (окончание)

Случай 2: есть критический радиус

$[v_0, u]$ — критический радиус: $\exists J_j \in \mathcal{J}(u)|$

$$2\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(v_0, u) + d_j > \bar{R}.$$

$$\sum_{t=1}^{s}(2w(e_t) + \Delta(v_t)) \leqslant$$

$$\sum_{t=1}^{s}\Delta(v_t) + 2T^* - 2\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(v_0, u) \leqslant \bar{R}.$$

Если

$$\sum_{t=1}^{s}\Delta(v_t) + 2T^* - 2\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(v_0, u) > \bar{R},$$

то

$$\Delta + 2T^* > 2\bar{R}.$$