О задаче open shop с маршрутизацией и пропорциональными длительностями операций

Агзямова П.М. Черных И.Д.

Семинар “Модели и алгоритмы
для задач составления расписаний”
8.10.2022

*Исследование выполнено при поддержке
гранта РНФ № 22-71-10015*

Постановка и обзор задачи open shop

Задача $Om||C_{\max}$:

- Множество машин $\{M_1, \ldots, M_m\}$;
- Множество работ $\{J_1, \ldots, J_n\}$;
- Требуется выполнить каждую работу на каждой машине;
- Матрица длительностей операций $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$;
- Целевая функция $C_{\max}$: длина расписания.

Постановка и обзор задачи open shop

Задача $Om||C_{\max}$:

- Множество машин $\{M_1, \ldots, M_m\}$;
- Множество работ $\{J_1, \ldots, J_n\}$;
- Требуется выполнить каждую работу на каждой машине;
- Матрица длительностей операций $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$;
- Целевая функция $C_{\max}$: длина расписания.

Небольшой обзор

- Задача $O2||C_{\max}$ разрешима за $O(n)$ [Gonzalez, Sahni 1976];
- Задача $O3||C_{\max}$ NP-трудна (но неизвестно, в сильном ли смысле) [Gonzalez, Sahni 1976];
- Задача $O||C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле, есть порог неприближаемости $\frac{5}{4}$ [Williamson *et al* 1997].

Об одном частном случае

“Соразмерная” (proportionate) постановка задачи

Ограничение на длительности операций: $p_{ij} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Общепринятое обозначение: $prpt$ (например, $Om|prpt|C_{\max}$).

Об одном частном случае

"Соразмерная" (proportionate) постановка задачи

Ограничение на длительности операций: $p_{ij} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Общепринятое обозначение: *prpt* (например, $Om|prpt|C_{\max}$).
Более удачное обозначение [Sevastyanov, 2019]: *j-prpt* и *m-prpt*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

j-prpt

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_m & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

m-prpt

Об одном частном случае

“Соразмерная” (proportionate) постановка задачи

Ограничение на длительности операций: $p_{ij} = p_j$, $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

Общепринятое обозначение: *prpt* (например, $Om|prpt|C_{\max}$).
Более удачное обозначение [Sevastyanov, 2019]: *j-prpt* и *m-prpt*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

j-prpt

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_m & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

m-prpt

- Задача $O3|j\text{-}prpt|C_{\max}$ является NP-трудной [Lui, Bulfin 1987].
- Существует псевдополиномиальный алгоритм решения задачи $O3|j\text{-}prpt|C_{\max}$ [Sevastyanov 2019]

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\ldots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{nm}	ℓ_2

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	ℓ_2
Σ	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Стандартная нижняя оценка

	J_1	J_2	$\dots$	J_n	Σ
M_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	ℓ_1
$\vdots$				$\vdots$	
M_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	ℓ_2
Σ	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Оценка длины расписания

$$C^*_{\max} \geqslant \bar{C} \doteq \max_{i,j}\{\ell_i, d_j\} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}.$$

Стандартная нижняя оценка

Оценка длины расписания

$$C^*_{\max} \geqslant \bar{C} \doteq \max_{i,j}\{\ell_i, d_j\} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}.$$

Определение

- Расписание S нормальное, если $C_{\max}(S) = \bar{C}$. Пример, для которого существует допустимое нормальное расписание, также называется нормальным.
- Для примера I отклонением от нормы (abnormality) называется $\alpha(I) = \dfrac{C^*_{\max}(I)}{\bar{C}(I)}$.
- Для класса примеров $\mathcal{K}$

$$\alpha(\mathcal{K}) = \sup_{I\in\mathcal{K}} \alpha(I).$$

Обзор

Обозначение

- Класс нетривиальных примеров задачи $Om||C_{\max}$ будем обозначать $\mathcal{I}_m$.
- Подкласс $\mathcal{I}_m(\mathbb{P}) = \{I \in \mathcal{I}_m | \mathbb{P}\}$, где $\mathbb{P}$ — какое-то свойство или набор свойств.

Обзор

Обозначение

- Класс нетривиальных примеров задачи $Om||C_{\max}$ будем обозначать $\mathcal{I}_m$.
- Подкласс $\mathcal{I}_m(\mathbb{P}) = \{I \in \mathcal{I}_m | \mathbb{P}\}$, где $\mathbb{P}$ — какое-то свойство или набор свойств.

Некоторые нормальные классы примеров

- $\mathcal{I}_2$ [Gonzalez, Sahni 1976]
- $\mathcal{I}_3(\ell_{\max} \geqslant 7p_{\max})$ [Севастьянов 1996]
- $\mathcal{I}_m(\ell_1 \geqslant \max\limits_{i=2,\dots,m} \ell_i + mp_{\max})$ [Севастьянов, Черных 1996]
- $\mathcal{I}_3(\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ell_3 + 2p_{\max})$ [Kononov *et al* 1999]
- $\mathcal{I}_3(\ell_{\max} \geqslant 3p_{\max}, \nu = 2)$ [Каширских *et al* 2001]
- $\mathcal{I}_m(j\text{-}prpt, \ell_{\max} \leqslant (m-1)p_{\max})$ [Sevastyanov 2019]
- $\mathcal{I}_3(j\text{-}prpt, \ell_{\max} \leqslant 2.5p_{\max})$ [Sevastyanov 2019]
- $\dots$

Отклонение от нормы

- $\alpha(\mathcal{I}_2) = 1$ [Gonzalez, Sahni 1976]
- $\alpha(\mathcal{I}_3) = \frac{4}{3}$ [Sevastyanov, Tchernykh 1998]
- $\alpha(\mathcal{I}_3(\nu = 2)) = \frac{5}{4}$ [Лисицына, 2008]
- $\alpha(\mathcal{I}_3(j\text{-}prpt)) = \frac{10}{9}$ [Sevastyanov 2019]
- $\alpha(\mathcal{I}_3(\text{superoverloaded})) = \frac{7}{6}$ [Chernykh, Pyatkin 2021]
- $\alpha(\mathcal{I}_m(\Delta \leqslant 2\bar{C})) = 1$ [Sevastyanov, Chernykh]
- $\alpha(\mathcal{I}_m) < 2$ [жадный алгоритм]
- $\ldots$

Новая постановка

Рассмотрим задачу с новым ограничением: строки (и столбцы) матрицы P длительностей операций пропорциональны.

Новая постановка

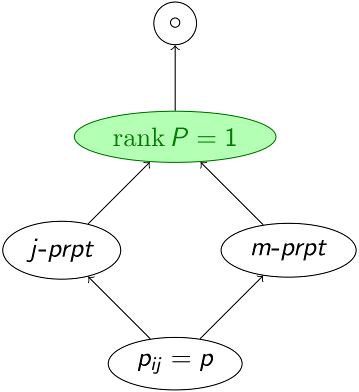
Рассмотрим задачу с новым ограничением: строки (и столбцы) матрицы P длительностей операций пропорциональны.

Предполагаемое называние: *задача с пропорциональными длительностями операций* (*proportional*).
Предлагаемое обозначение: $\mathrm{rank}\, P = 1$.

Новая постановка

Рассмотрим задачу с новым ограничением: строки (и столбцы) матрицы P длительностей операций пропорциональны.

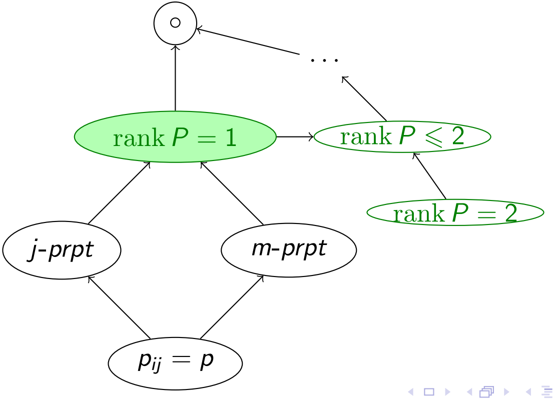
Предполагаемое называние: *задача с пропорциональными длительностями операций* (*proportional*).
Предлагаемое обозначение: $\mathrm{rank}\, P = 1$.



Новая постановка

Рассмотрим задачу с новым ограничением: строки (и столбцы) матрицы P длительностей операций пропорциональны.

Предполагаемое называние: *задача с пропорциональными длительностями операций* (*proportional*).
Предлагаемое обозначение: $\mathrm{rank}\, P = 1$.



Задача open shop с маршрутизацией

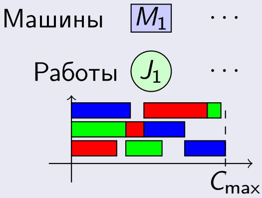
Open Shop ($Om||C_{max}$)...

Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n

Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

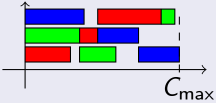


Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

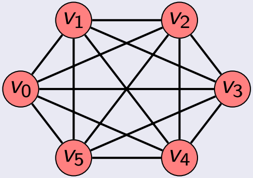
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n



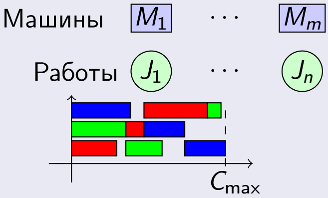
Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



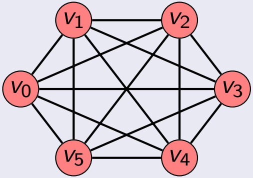
Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

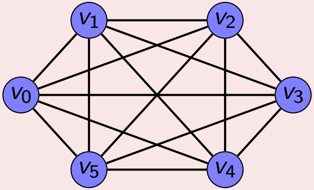


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



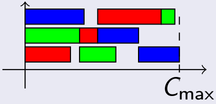
... и их комбинация



Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

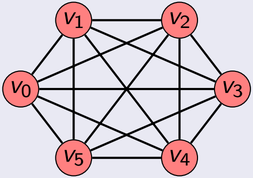
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n

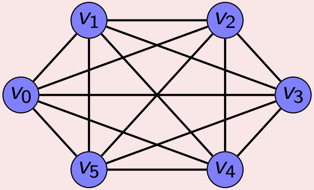


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



... и их комбинация



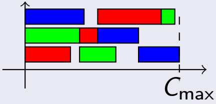
$\{J_1, \ldots, J_n\}$

Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

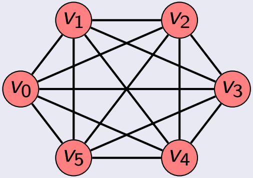
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n

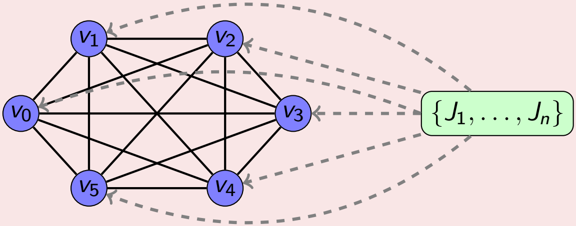


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



... и их комбинация

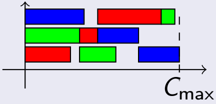


Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

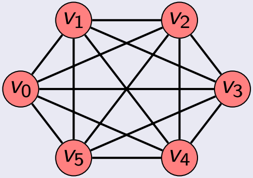
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n



Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$

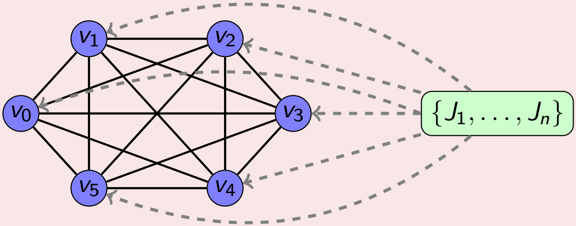


... и их комбинация

$\boxed{M_1}$

$\vdots$

$\boxed{M_m}$

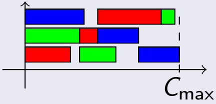


Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

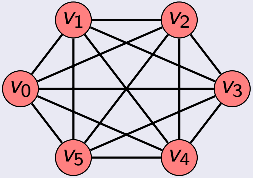
Машины M_1 $\cdots$ M_m

Работы J_1 $\cdots$ J_n

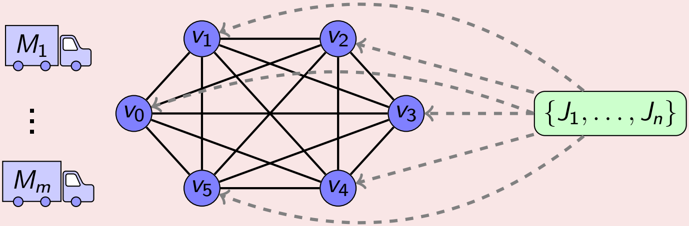


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



... и их комбинация

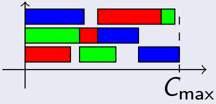


Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

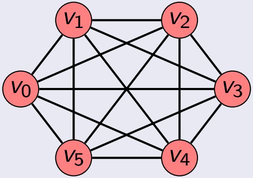
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n

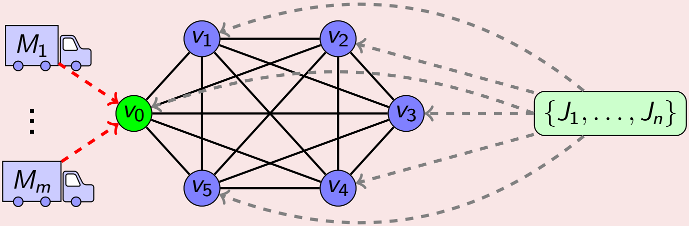


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E \rangle$



... и их комбинация

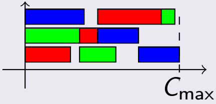


Задача open shop с маршрутизацией

Open Shop ($Om||C_{\max}$)...

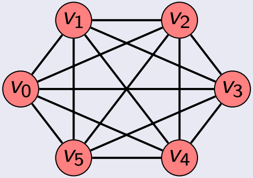
Машины $\boxed{M_1}$ $\cdots$ $\boxed{M_m}$

Работы J_1 $\cdots$ J_n

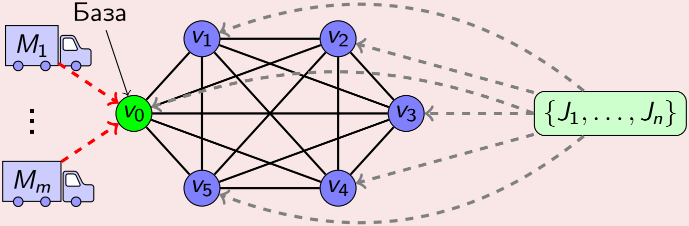


Метрическая задача коммивояжера...

$G = \langle V; E\rangle$



... и их комбинация



Задача open shop с маршрутизацией

Обозначение

- Задача: $ROm||R_{\max}$ или $ROm|G = X|R_{\max}$
- Класс примеров $ROm||R_{\max}$: $\mathcal{I}_m^R$

Обозначение

- Задача: $ROm||R_{\max}$ или $ROm|G = X|R_{\max}$
- Класс примеров $ROm||R_{\max}$: $\mathcal{I}_m^R$

- $\mathrm{dist}(u, v)$ — время перехода машины из u в v,
- $d_{\max}(v) = \max\limits_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — вес кратчайшего обхода G.

Задача open shop с маршрутизацией

Обозначение

- Задача: $ROm||R_{\max}$ или $ROm|G = X|R_{\max}$
- Класс примеров $ROm||R_{\max}$: $\mathcal{I}_m^R$

- $\mathrm{dist}(u, v)$ — время перехода машины из u в v,
- $d_{\max}(v) = \max\limits_{J_j \in \mathcal{J}(v)} d_j$ — максимальная длина работы из v,
- T^* — вес кратчайшего обхода G.

Стандартная нижняя оценка для $ROm||R_{\max}$

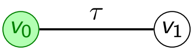
$$\bar{R} = \max\left\{\ell_{\max} + T^*, \max_{v \in V}\Big(d_{\max}(v) + 2\mathrm{dist}(v_0, v)\Big)\right\}$$

Обзор

- Задача $RO1||R_{\max}$ эквивалентна метрической задаче коммивояжера
- Задача $ROm|G = K_1|R_{\max}$ эквивалентна $Om||C_{\max}$
- Задача $RO2|G = K_2|R_{\max}$ NP-трудна [Averbakh *et al* 2006]
- Для задачи $RO2|G = K_2|R_{\max}$ существует FPTAS [Кононов 2012]
- Задача $RO2|j\text{-}prpt, G = K_2|R_{\max}$ NP-трудна [Pyatkin, Chernykh 2022]
- $\alpha(\mathcal{I}_2^R(G = K_2)) = \frac{6}{5}$ [Averbakh *et al* 2005]
- $\alpha(\mathcal{I}_2^R(G = K_3)) = \frac{6}{5}$ [Chernykh, Lgotina 2016]
- $\alpha(\mathcal{I}_2^R(G = tree)) = \frac{6}{5}$ [Chernykh, Krivonogova 2019]
- $\alpha(\mathcal{I}_2^R(j\text{-}prpt, G = K_3)) = \frac{7}{6}$ [Pyatkin, Chernykh 2022]
- $\alpha(\mathcal{I}_2^R(j\text{-}prpt, G = tree)) = \frac{7}{6}$ [Шмырина 2022]

Объект исследования

$$RO2|G = K_2, \mathrm{rank}\, P = 1|R_{\max}.$$



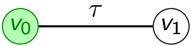
$\mathrm{dist}(v_0, v_1) = \tau.$

Матрица длительностей: $P = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp_1 & \dots & kp_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$,
без ограничения общности $k \geqslant 1$.

$$\bar{R} = \max\{\ell_1 + 2\tau, d_{\max}(v_0), d_{\max}(v_1) + 2\tau\}.$$

Объект исследования

$$RO2|G = K_2, \operatorname{rank} P = 1|R_{\max}.$$



$\operatorname{dist}(v_0, v_1) = \tau$.

Матрица длительностей: $P = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp_1 & \dots & kp_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$,
без ограничения общности $k \geqslant 1$.

$$\bar{R} = \max\{\ell_1 + 2\tau, d_{\max}(v_0), d_{\max}(v_1) + 2\tau\}.$$

Вопросы:

1. При каких значениях k гарантируется нормальность примеров?
2. Отклонение от нормы $\alpha(\mathcal{I}_2^R(\operatorname{rank} P = 1, G = K_2))$ как функция от k.

Упрощение примера (preprocessing)

1. Склеивание работ без изменения стандартной нижней оценки $\bar{R}$:
   - Склеивать можно только работы из одной вершины v;
   - Нижняя оценка не возрастает, если сумма длин склеиваемых работ не превышает $\bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v)$;
   - С учётом неравенства $\sum d_j = \ell_1 + \ell_2 \leqslant 2(\bar{R} - T^*)$ всегда можно провести склеивание так, чтобы в каждой вершине осталось не более трёх работ;
   - Склеивание работ не изменяет нагрузки машин, нагрузки вершин и коэффициент k;
   - Допустимое расписание для упрощённого примера можно интерпретировать, как допустимое расписание той же длины для исходного примера.
2. Перегруженные и сверхперегруженные вершины:
   - Вершина v называется перегруженной, если её нагрузка (сумма длин работ в ней) строго больше $\bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v)$;
   - Любой пример двухмашинной задачи содержит не более одной перегруженной вершины;
   - Пример называется несводимым, если дальнейшее склеивание работ без увеличения $\bar{R}$ невозможно;
   - Вершина несводимого примера, содержащая три работы, называется сверхперегруженной.

Упрощение примера (preprocessing)

2 Перегруженные и сверхперегруженные вершины:

- Вершина v называется перегруженной, если её нагрузка (сумма длин работ в ней) строго больше $\bar{R} - 2\mathrm{dist}(v_0, v)$;
- Любой пример двухмашинной задачи содержит не более одной перегруженной вершины;
- Пример называется несводимым, если дальнейшее склеивание работ без увеличения $\bar{R}$ невозможно;
- Вершина несводимого примера, содержащая три работы, называется сверхперегруженной.

3 Некоторые факты:

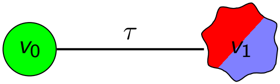
- Любой пример $RO2|G = K_2|R_{\max}$ без перегруженных вершин является нормальным [trivial]
- Любой пример $RO2|G = K_2|R_{\max}$, содержащий сверхперегруженную вершину, является нормальным [Chernykh, Pyatkin 2020]
- Любой пример $RO2||R_{\max}$ с перегруженной базой является нормальным [Chernykh 2021]

Упрощение примера (preprocessing)

3 Некоторые факты:

- Любой пример $RO2|G = K_2|R_{\max}$ без перегруженных вершин является нормальным [trivial]
- Любой пример $RO2|G = K_2|R_{\max}$, содержащий сверхперегруженную вершину, является нормальным [Chernykh, Pyatkin 2020]
- Любой пример $RO2||R_{\max}$ с перегруженной базой является нормальным [Chernykh 2021]

4 Достаточно рассматривать примеры такого вида:



Вершина v_0 содержит одну работу J_1, перегруженная вершина v_1 содержит работы J_2 и J_3.

Граница нормальности

Лемма 1

Пусть $I \in \mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2)$ — пример с коэффициентом пропорциональности $k \geqslant \Phi$, где Φ — золотое сечение. Тогда I является нормальным.

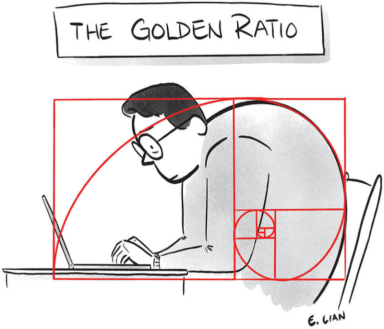
Немного о золотом сечении

Φ — положительный корень уравнения $x^2 - x = 1$;

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618...$$

$$k \geqslant \Phi \Rightarrow k^2 - k \geqslant 1,$$

$$k \in [1, \Phi) \Rightarrow k^2 - k < 1.$$



Граница нормальности

Лемма 1

Пусть $I \in \mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2)$ — пример с коэффициентом пропорциональности $k \geqslant \Phi$, где Φ — золотое сечение. Тогда I является нормальным.

Доказательство

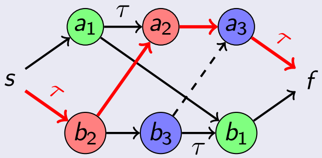
Рассмотрим несводимый пример с тремя работами и матрицей длительностей

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} kp_1 & kp_2 & kp_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \right).$$

Без ограничения общности считаем $p_2 \geqslant p_3$.

Доказательство (продолжение)

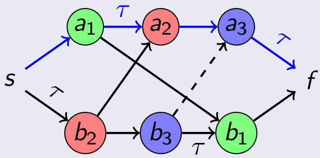
Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Доказательство (продолжение)

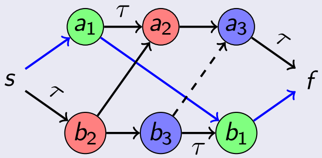
Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Доказательство (продолжение)

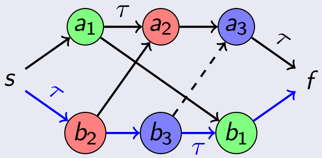
Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Доказательство (продолжение)

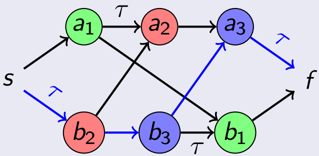
Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Доказательство (продолжение)

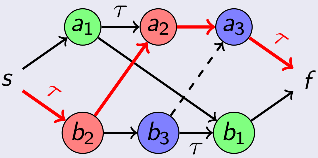
Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

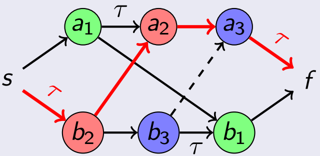
Доказательство (продолжение)

Рассмотрим расписание S_1:



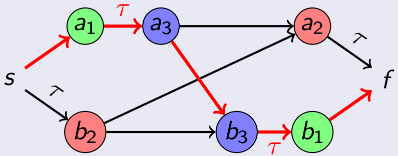
$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Рассмотрим расписание S_1:



$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

Рассмотрим расписание S_2:



$$R_2 = R_{\max}(S_2) = a_1 + a_3 + b_3 + b_1 + 2\tau = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau.$$

Доказательство

Докажем, что по-крайней мере одно из расписаний S_1 и S_2 нормальное (для любого примера в условиях леммы), т.е.

$$\min\{R_1, R_2\} \leqslant \bar{R}.$$

Заметим, что $\forall \lambda \in [0,1]$

$$\min\{R_1, R_2\} \leqslant \lambda R_1 + (1-\lambda) R_2.$$

С другой стороны,

$$LB_1 = \ell_1 + 2\tau = k(p_1 + p_2 + p_3) + 2\tau \leqslant \bar{R},$$

$$LB_2 = k(p_1 + 2p_3) + 2\tau \leqslant LB_1 \leqslant \bar{R},$$

следовательно $\forall \mu \in [0,1]$ $\mu LB_1 + (1-\mu) LB_2 \leqslant \bar{R}$.
Достаточно подобрать такие $\lambda, \mu \in [0,1]$, что

$$\lambda R_1 + (1-\lambda) R_2 \leqslant \mu LB_1 + (1-\mu) LB_2.$$

Доказательство

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)(p_1+p_3) + 2\tau,$$

$$LB_1 = k(p_1+p_2+p_3) + 2\tau,$$

$$LB_2 = k(p_1+2p_3) + 2\tau.$$

Возьмём $\lambda = \dfrac{k-1}{k}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

$$\lambda R_1 + (1-\lambda)R_2 = \frac{k+1}{k}p_1 + \frac{k^2-1}{k}p_2 + \frac{k^2+1}{k}p_3 + 2\tau,$$

$$\mu LB_1 + (1-\mu)LB_2 = kp_1 + \frac{k^2-1}{k}p_2 + \frac{k^2+1}{k}p_3 + 2\tau,$$

$$\lambda R_1 + (1-\lambda)R_2 \leqslant \mu LB_1 + (1-\mu)LB_2 \iff 1 + \frac{1}{k} \leqslant k \iff k^2 - k \geqslant 1.$$

Золотое сечение — точная граница нормальности

Лемма 2

$\forall k \in [1, \Phi)$ в классе $\mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2)$ существует пример с коэффициентом пропорциональности k, не являющийся нормальным.

Доказательство

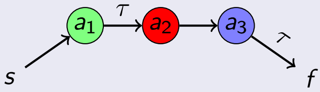
Искомым примером является пример со значениями $p_1 = k$, $p_2 = p_3 = k + 1$, $2\tau = 2k^2 - 1$.
Для данного примера стандартная нижняя оценка $\bar{R} = k(p_1 + p_2 + p_3) + 2\tau = 5k^2 + 2k - 1 < 4k^2 + 3k$.
Пусть существует допустимое расписание S с длиной

$$R_{\max}(S) < 4k^2 + 3k = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Тогда каждая машина в S делает одну поездку из v_0 в v_1 и обратно.
Без ограничения общности M_1 выполняет операции в порядке $a_1 \to a_2 \to a_3$.

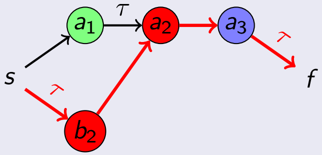
Доказательство

$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



Доказательство

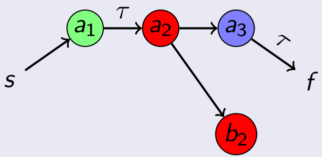
$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



$$R_{\max}(S) \geqslant b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = k + 1 + k(k+1) + k(k+1) + 2k_2 - 1 = 4k^2 + 3k.$$

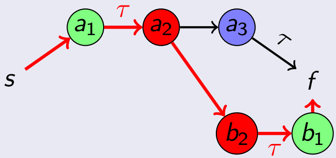
Доказательство

$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



Доказательство

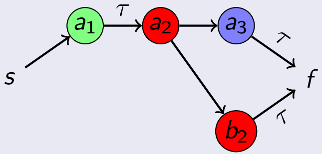
$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



$$R_{\max}(S) \geqslant a_1 + a_2 + b_2 + b_1 + 2\tau = (k+1)k + (k+1)^2 + 2k_2 - 1 = 4k^2 + 3k.$$

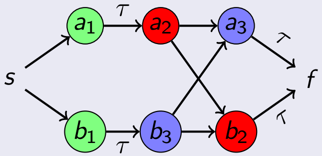
Доказательство

$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k+1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



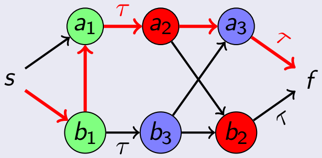
Доказательство

$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



Доказательство

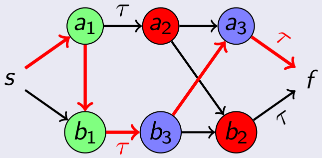
$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k + 1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



$$R_{\max}(S) \geqslant k + k \cdot (3k + 2)) + 2k^2 - 1 = 5k^2 + 3k - 1 \geqslant 4k^2 + 3k.$$

Доказательство

$$p_1 = k, p_2 = p_3 = k+1, 2\tau = 2k^2 - 1.$$



$$R_{\max}(S) \geqslant a_1+b_1+b_3+a_3+2\tau = k^2+k+k+1+k(k+1)+2k^2-1 = 4k^2+3k.$$

Отклонение от нормы

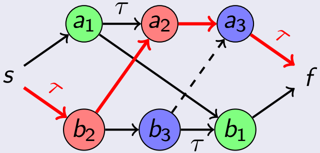
Лемма 3

Пусть $I \in \mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2)$ — пример с коэффициентом пропорциональности $k \in [1, \Phi)$. Тогда

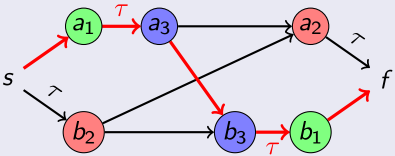
$$R^*_{\max}(I) \leqslant \frac{4k^2 + 3k}{5k^2 + 2k - 1}\bar{R}.$$

Доказательство

Рассмотрим три расписания:



S_1



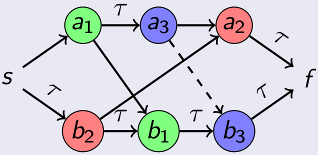
S_2

$$R_1 = R_{\max}(S_1) = b_2 + a_2 + a_3 + 2\tau = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$$

$$R_2 = R_{\max}(S_2) = a_1 + a_3 + b_3 + b_1 + 2\tau = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau$$

Доказательство

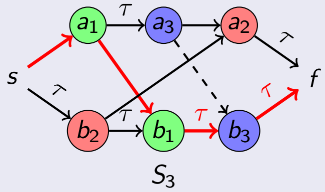
$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,\; R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau.$$



S_3

Доказательство

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,\ R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau.$$



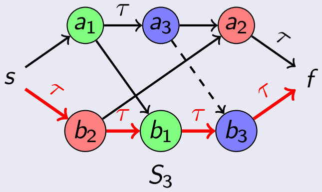
Случай 1:

$$R_3 = R_{\max}(S_3) = a_1 + b_1 + b_3 + 2\tau = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau,$$

$$R_1 + R_3 = (k+1)(p_1 + p_2 + p_3) + 4\tau = \ell_1 + \ell_2 + 4\tau \leqslant 2\bar{R}.$$

Доказательство

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,\ R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau.$$



Случай 2:

$$R_3 = R_{\max}(S_3) = b_2 + b_1 + b_3 + 4\tau = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Доказательство, случай 2

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau,$$

$$R_3 = R_{\max}(S_3) = b_2 + b_1 + b_3 + 4\tau = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Требуется доказать, что $\min\{R_1, R_2, R_3\} \leqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.

Доказательство, случай 2

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau,$$

$$R_3 = R_{\max}(S_3) = b_2 + b_1 + b_3 + 4\tau = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Требуется доказать, что $\min\{R_1, R_2, R_3\} \leqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.

$$LB_1 = k(p_1 + p_2 + p_3) + 2\tau,\ LB_2 = k(p_1 + 2p_3) + 2\tau.$$

Достаточно доказать, что существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$, что

1. $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 \leqslant \mu_1 LB_1 + \mu_2 LB_2$, и
2. $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(4k^2 + 3k) \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(5k^2 + 2k - 1)$.

Доказательство, случай 2

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau,$$

$$R_3 = R_{\max}(S_3) = b_2 + b_1 + b_3 + 4\tau = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Требуется доказать, что $\min\{R_1, R_2, R_3\} \leqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.

$$LB_1 = k(p_1 + p_2 + p_3) + 2\tau,\ LB_2 = k(p_1 + 2p_3) + 2\tau.$$

Достаточно доказать, что существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$, что

1. $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 \leqslant \mu_1 LB_1 + \mu_2 LB_2$, и
2. $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(4k^2 + 3k) \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(5k^2 + 2k - 1)$.

$$\lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2},\ \lambda_2 = \frac{4k^2 - 1}{k^2},\ \lambda_3 = \frac{-k^2 + k + 1}{k^2},$$

$$\mu_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2},\ \mu_2 = \lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2}.$$

Вывод

Теорема 1

$$\alpha(\mathcal{I}_2^R(\operatorname{rank} P = 1, G = K_2)) = F(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & k \in [1, \Phi), \\ 1, & k \geqslant \Phi. \end{cases}$$

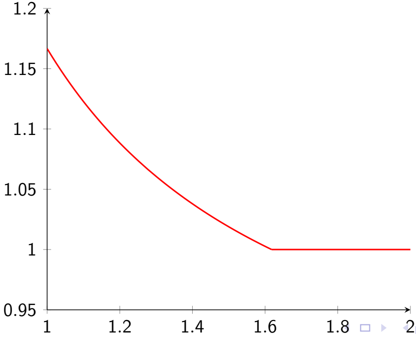
Для любого примера $I \in \mathcal{I}_2^R(\operatorname{rank} P = 1, G = K_2)$ расписание длины $\leqslant F(k)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

Вывод

Теорема 1

$$\alpha(\mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2)) = F(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & k \in [1, \Phi), \\ 1, & k \geqslant \Phi. \end{cases}$$

Для любого примера $I \in \mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\,P = 1, G = K_2)$ расписание длины $\leqslant F(k)\bar{R}$ может быть построено за линейное время.

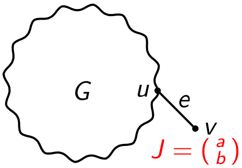


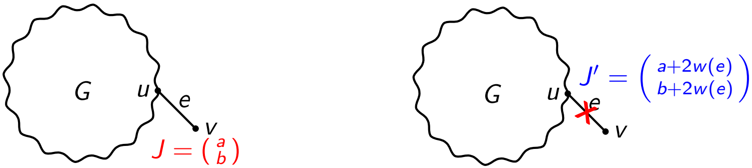
Открытые вопросы/планы

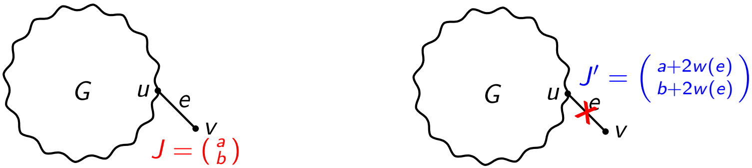
$$F(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & x \in [1, \Phi), \\ 1, & x \geqslant \Phi. \end{cases}$$

1. Верна ли аналогичная теорема для $G = K_3$, $G = tree$, etc.
2. Алгоритмическая сложность для класса $\mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2)$ в зависимости от k:
   - При $k = 1$ имеем NP-трудную задачу $RO2|j\text{-}prpt, G = K_2|R_{\max}$,
   - при $k \geqslant \Phi$ задача разрешима за линейное время,
   - при $k \in (1, \Phi)$ — ???
3. Исследовать задачу $O3|\mathrm{rank}\, P = 1|C_{\max}$ и другие задачи с ограничением $\mathrm{rank}\, P = 1$.

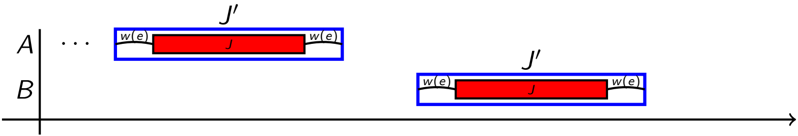
Исследование задачи на дереве
Типичный приём: стягивание висячих рёбер




G
u
e
v
J = (a b)
G
u
e
v
J′ = (a+2w(e) b+2w(e))



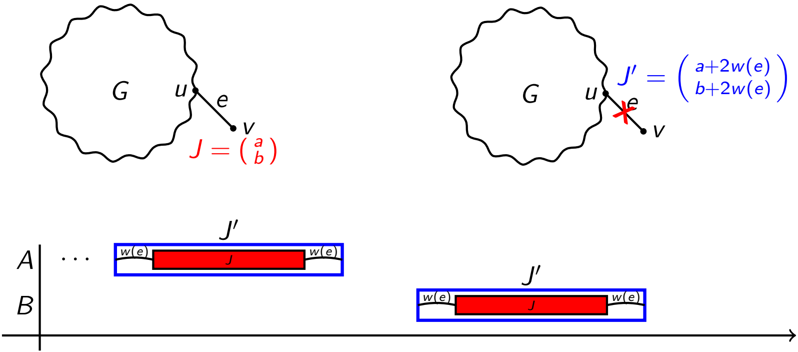
G
u
e
v
$J = \binom{a}{b}$
G
u
e
v
$J' = \binom{a+2w(e)}{b+2w(e)}$



A
B
...
J'
w(e)
J
w(e)
J'
w(e)
J
w(e)

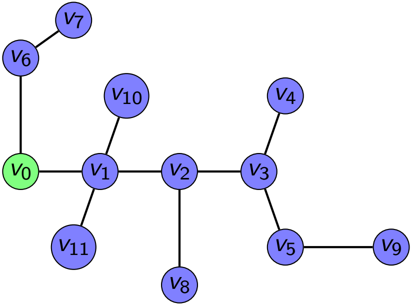
Исследование задачи на дереве

Типичный приём: стягивание висячих рёбер



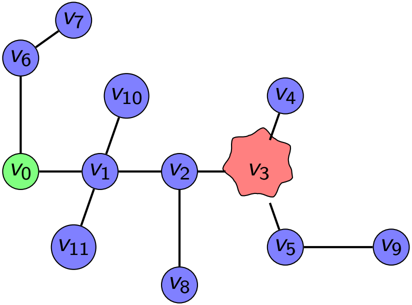
- Ребро, инцидентное висячей вершине с единственной работой (не базой!) называется перегруженным, если его стягивание приводит к увеличению $\bar{R}$.
- Любой пример двухмашинной задачи содержит не более одного перегруженного элемента;
- Любой пример $RO2|G = tree|R_{\max}$ с перегруженным ребром является нормальным [Chernykh, Lgotina 2021]

Упрощение дерева



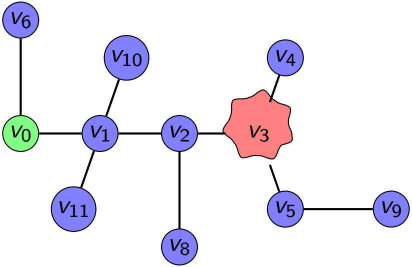
Возможные результаты:

Упрощение дерева



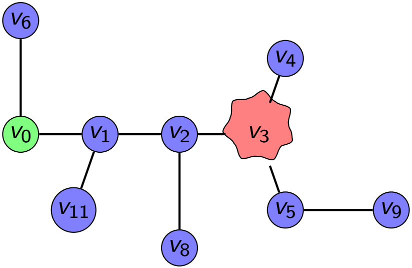
Возможные результаты:

Упрощение дерева



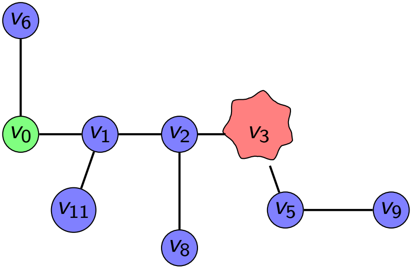
Возможные результаты:

Упрощение дерева



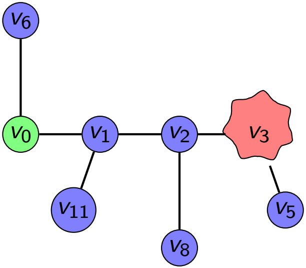
Возможные результаты:

Упрощение дерева



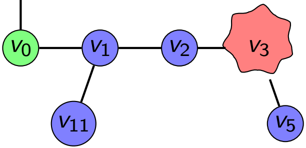
Возможные результаты:

Упрощение дерева



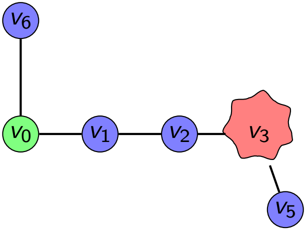
Возможные результаты:

Упрощение дерева



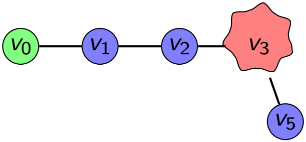
Возможные результаты:

Упрощение дерева



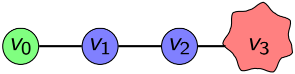
Возможные результаты:

Упрощение дерева

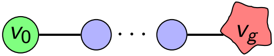


Возможные результаты:

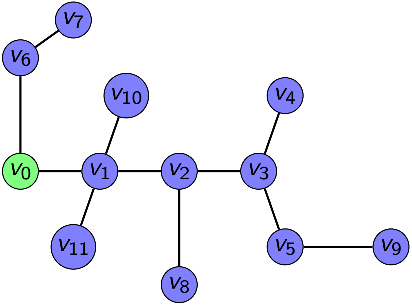
Упрощение дерева



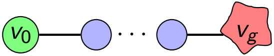
Возможные результаты:

1. 

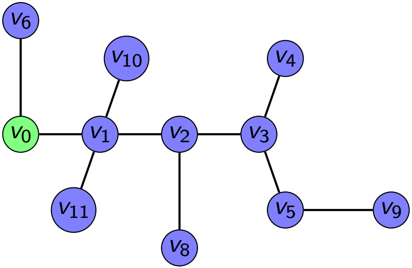
Упрощение дерева



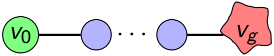
Возможные результаты:

1. 

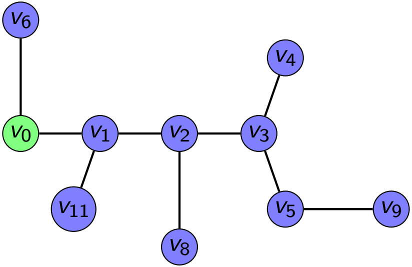
Упрощение дерева



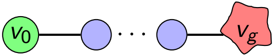
Возможные результаты:

1. 

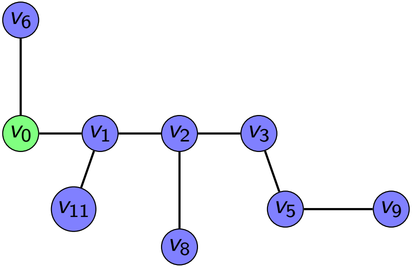
Упрощение дерева



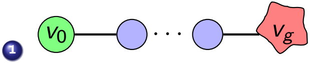
Возможные результаты:

1. 

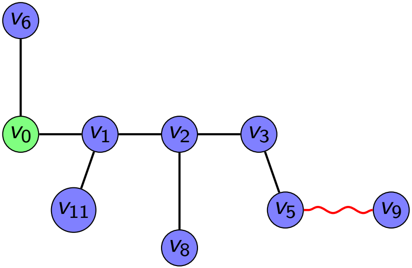
Упрощение дерева



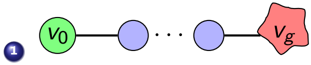
Возможные результаты:



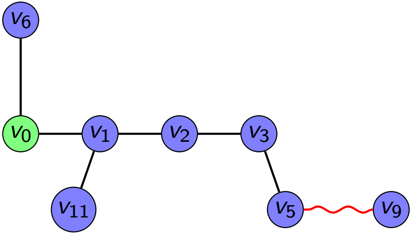
Упрощение дерева



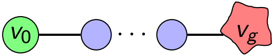
Возможные результаты:



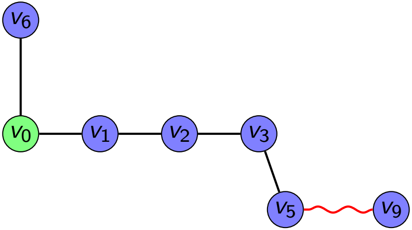
Упрощение дерева



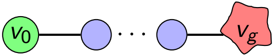
Возможные результаты:

1. 

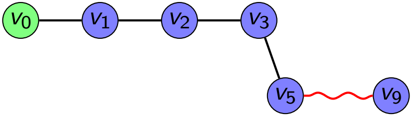
Упрощение дерева



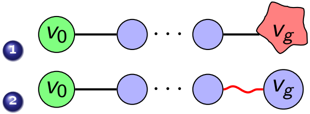
Возможные результаты:

1 

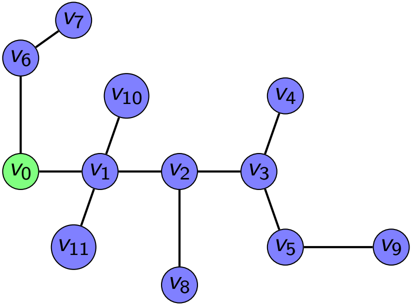
Упрощение дерева



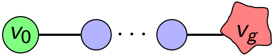
Возможные результаты:

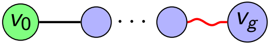


Упрощение дерева

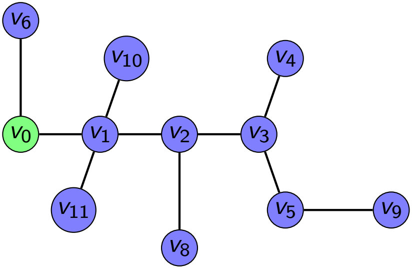


Возможные результаты:

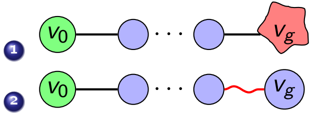
1. 

2. 

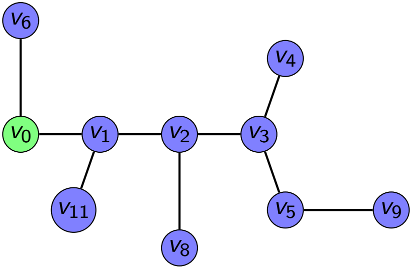
Упрощение дерева



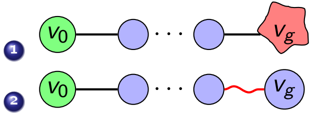
Возможные результаты:



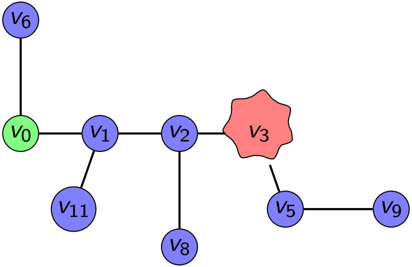
Упрощение дерева



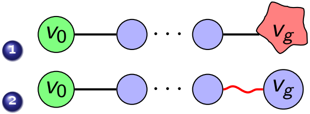
Возможные результаты:



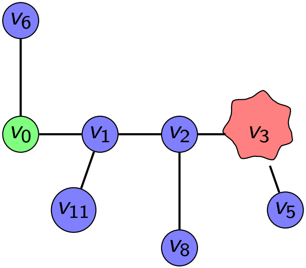
Упрощение дерева



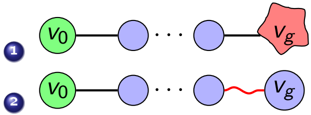
Возможные результаты:



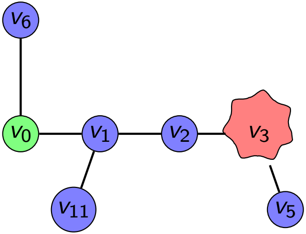
Упрощение дерева



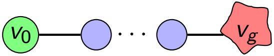
Возможные результаты:

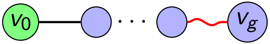


Упрощение дерева

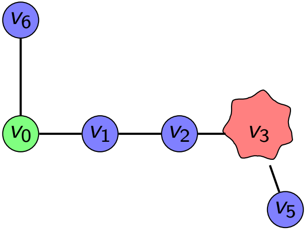


Возможные результаты:

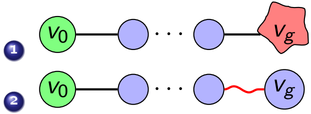
1. 

2. 

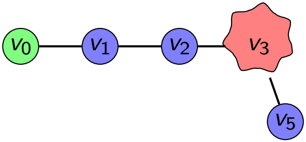
Упрощение дерева



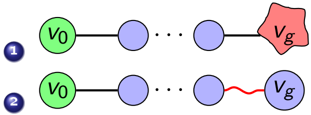
Возможные результаты:



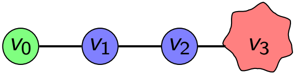
Упрощение дерева



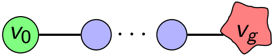
Возможные результаты:

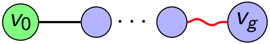


Упрощение дерева

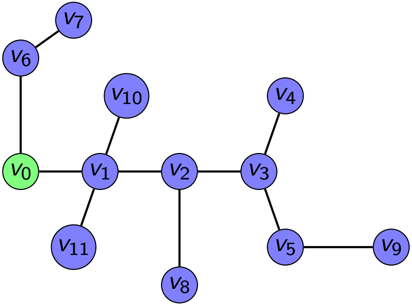


Возможные результаты:

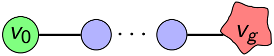
1. 

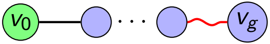
2. 

Упрощение дерева

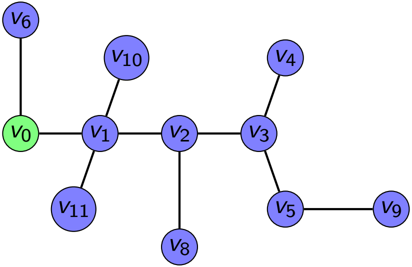


Возможные результаты:

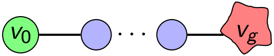
1. 

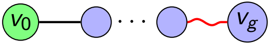
2. 

Упрощение дерева

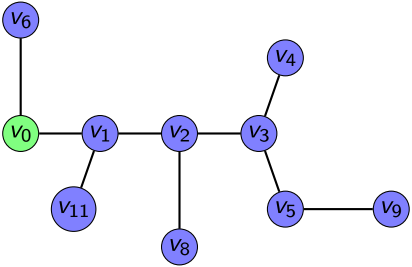


Возможные результаты:

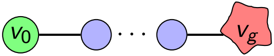
1. 

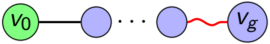
2. 

Упрощение дерева

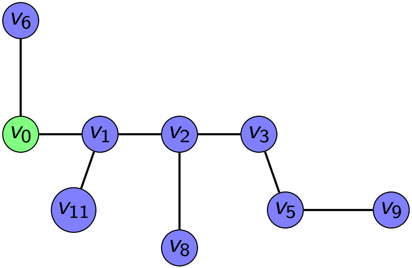


Возможные результаты:

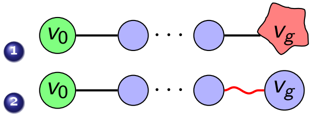
1. 

2. 

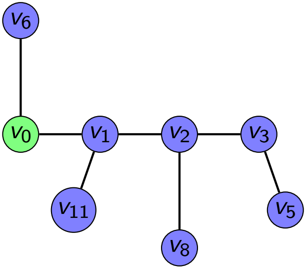
Упрощение дерева



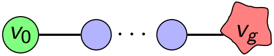
Возможные результаты:

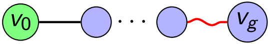


Упрощение дерева

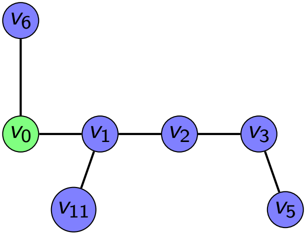


Возможные результаты:

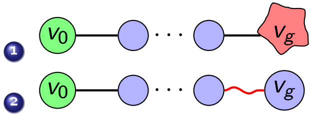
1. 

2. 

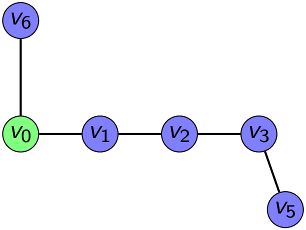
Упрощение дерева



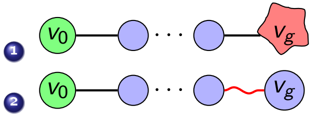
Возможные результаты:



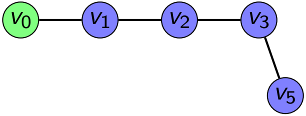
Упрощение дерева



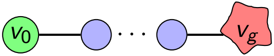
Возможные результаты:

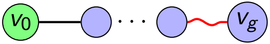


Упрощение дерева

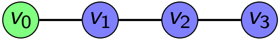


Возможные результаты:

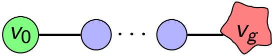
1. 

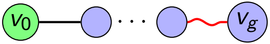
2. 

Упрощение дерева

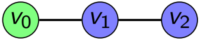


Возможные результаты:

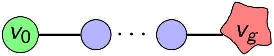
1. 

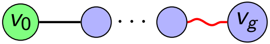
2. 

Упрощение дерева

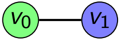


Возможные результаты:

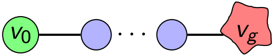
1. 

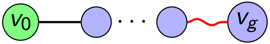
2. 

Упрощение дерева



Возможные результаты:

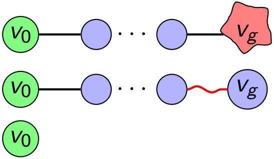
1. 

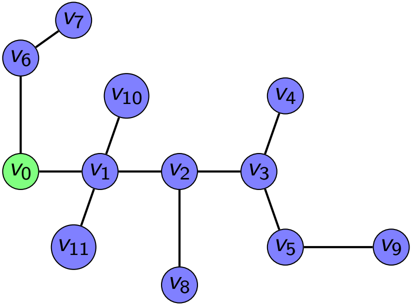
2. 

Упрощение дерева

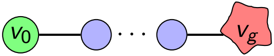
Возможные результаты:

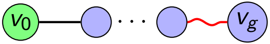
1.
2.
3.





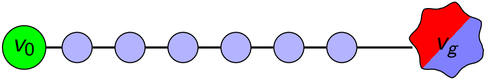
Возможные результаты:

1. 

2. 

3. 

Достаточно (было бы) рассматривать примеры такого вида:



Вершины $v_0, \ldots, v_{g-1}$ содержат по одной работе, перегруженная вершина v_g содержит работы J_ξ и J_ζ.

Попытка обобщения

Теорема 2

Пусть

$$\mathcal{K} \doteq \{I \in \mathcal{I}_2^R(\operatorname{rank} P = 1, G = chain) | G \text{ — цепь, соединяющая базу с перегруженной вершиной}\}.$$

Тогда $\alpha(\mathcal{K}) = F(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & k \in [1, \Phi), \\ 1, & k \geqslant \Phi. \end{cases}$, и для любого примера $I \in \mathcal{K}$ расписание длины $\leqslant F(k)\bar{R}$ может быть построено за $O(n)$.

Попытка обобщения

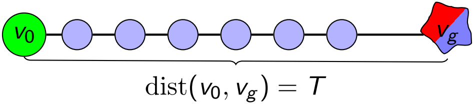
Теорема 2

Пусть

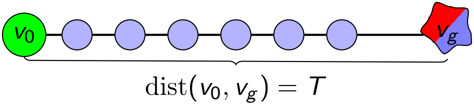
$$\mathcal{K} \doteq \{I \in \mathcal{I}_2^R(\mathrm{rank}\, P = 1, G = chain) | G \text{ — цепь, соединяющая базу с перегруженной вершиной}\}.$$

Тогда $\alpha(\mathcal{K}) = F(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & k \in [1, \Phi), \\ 1, & k \geqslant \Phi. \end{cases}$, и для любого примера $I \in \mathcal{K}$ расписание длины $\leqslant F(k)\bar{R}$ может быть построено за $O(n)$.

Доказательство опирается на леммы $1'$, 2 и $3'$ (леммы $1'$ и $3'$ аналогичны леммам 1 и 3, только для класса примеров $\mathcal{K}$).



Вершины $v_0, \ldots, v_{g-1}$ содержат по одной работе, перегруженная вершина v_g содержит работы J_ξ и J_ζ.

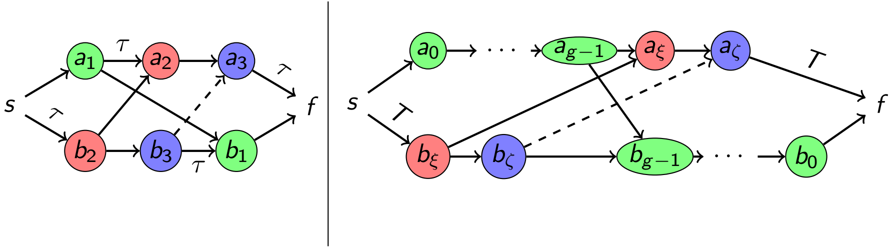


Вершины $v_0, \dots, v_{g-1}$ содержат по одной работе, перегруженная вершина v_g содержит работы J_ξ и J_ζ.
Предварительные замечания:

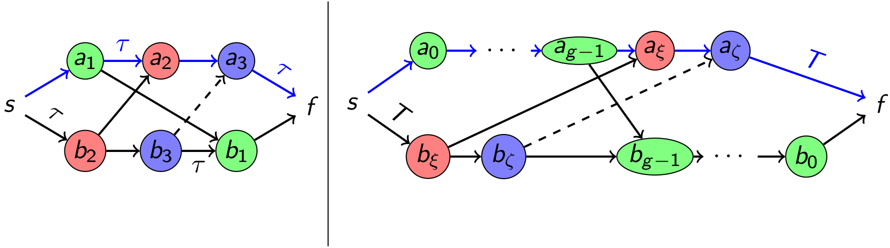
1. $$P = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} a_0 & \cdots & a_{g-1} & a_\xi & a_\zeta \\ b_0 & \cdots & b_{g-1} & b_\xi & b_\zeta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|cc} kp_0 & \cdots & kp_\xi & kp_\zeta \\ p_0 & \cdots & p_\xi & p_\zeta \end{array} \right),$$
2. Без ограничения общности считаем $p_\xi \geqslant p_\zeta$,
3. $T^* = 2T$. Обозначим $p' = \sum_{j=0}^{g-1} p_j = \ell_2 - p_\xi - p_\zeta$,
4. $d_\xi + d_\zeta = (1+k)(p_\xi + p_\zeta) > \bar{R} - 2T = \bar{R} - T^*$,
5. $\sum_j d_j = (1+k)(p' + p_\xi + p_\zeta) = \ell_1 + \ell_2 \leqslant 2(\bar{R} - T^*)$,
6. следовательно, $(1+k)p' + 2T < \bar{R}$.

Различия и сходство доказательство лемм 1 и 1$'$

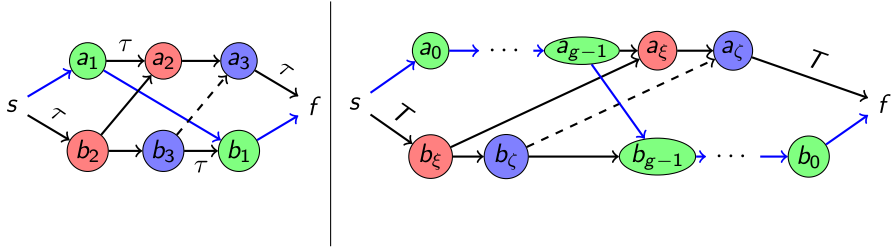
Рассмотрим расписание S_1:



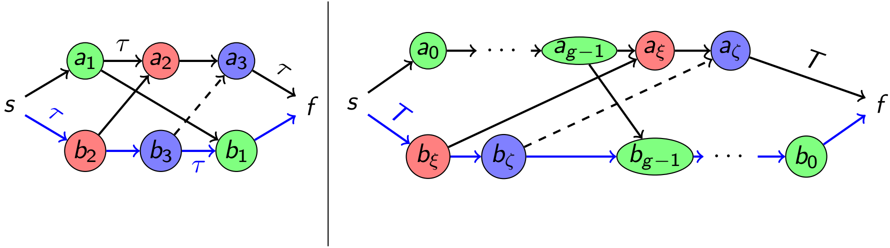
Рассмотрим расписание S_1:



Рассмотрим расписание S_1:

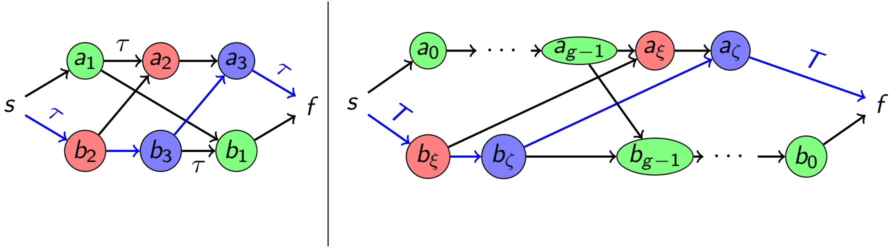


Рассмотрим расписание S_1:

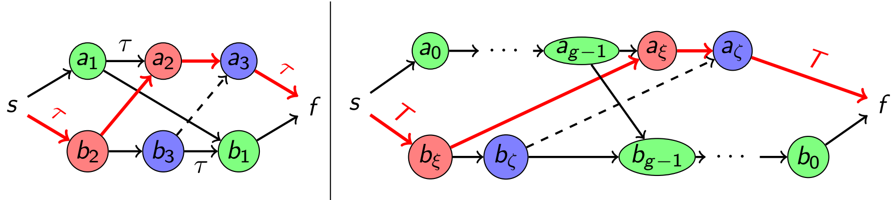


Различия и сходство доказательство лемм 1 и 1′

Рассмотрим расписание S_1:



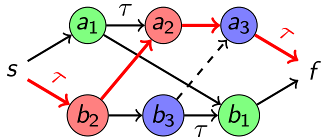
Рассмотрим расписание S_1:



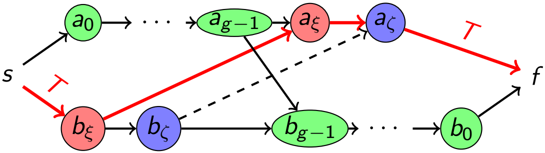
$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$ | $R_1' = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T.$

Различия и сходство доказательство лемм 1 и 1′

Рассмотрим расписание S_1:

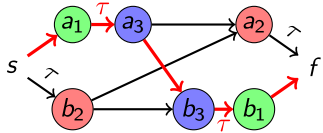


$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau.$

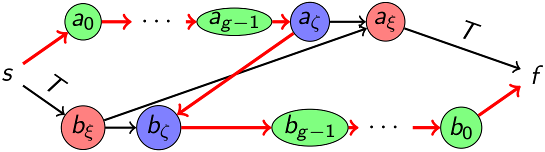


$R'_1 = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T.$

Рассмотрим расписание S_2:



$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$



$R'_2 = (1+k)(p' + p_\zeta) + 2T.$

Доказательство лемм 1 и 1′

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)(p_1+p_3) + 2\tau,$$

$$LB_1 = k(p_1+p_2+p_3) + 2\tau,$$

$$LB_2 = k(p_1+2p_3) + 2\tau.$$

Возьмём $\lambda = \dfrac{k-1}{k}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

$$\lambda R_1 + (1-\lambda)R_2 = \frac{k+1}{k}p_1 + \frac{k^2-1}{k}p_2 + \frac{k^2+1}{k}p_3 + 2\tau,$$

$$\mu LB_1 + (1-\mu)LB_2 = kp_1 + \frac{k^2-1}{k}p_2 + \frac{k^2+1}{k}p_3 + 2\tau,$$

$$\lambda R_1 + (1-\lambda)R_2 \leqslant \mu LB_1 + (1-\mu)LB_2 \iff 1+\frac{1}{k} \leqslant k \iff k^2 - k \geqslant 1.$$

Доказательство лемм 1 и 1′

$$R_1' = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T,$$
$$R_2' = (1+k)(p' + p_\zeta) + 2T,$$
$$LB_1' = k(p' + p_\xi + p_\zeta) + 2T,$$
$$LB_2' = k(p' + 2p_\zeta) + 2T.$$

Возьмём $\lambda = \dfrac{k-1}{k}$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

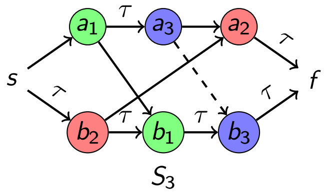
$$\lambda R_1' + (1-\lambda)R_2' = \frac{k+1}{k}p' + \frac{k^2-1}{k}p_\xi + \frac{k^2+1}{k}p_\zeta + 2T,$$

$$\mu LB_1' + (1-\mu)LB_2' = kp' + \frac{k^2-1}{k}p_\xi + \frac{k^2+1}{k}p_\zeta + 2T,$$

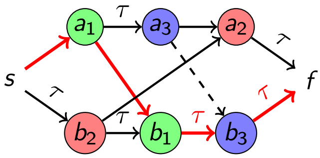
$$\lambda R_1' + (1-\lambda)R_2' \leqslant \mu LB_1' + (1-\mu)LB_2' \iff 1 + \frac{1}{k} \leqslant k \iff k^2 - k \geqslant 1.$$

Различия и сходство доказательство лемм 3 и 3′

$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$
$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$



$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$
$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$

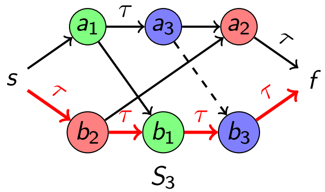


S_3

Случай 1:
$R_3 = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau.$

Различия и сходство доказательство лемм 3 и 3′

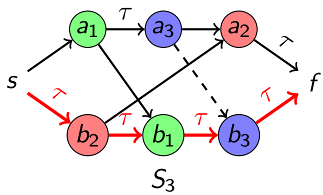
$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$
$R_2 = (1+k)(p_1+p_3) + 2\tau.$



Случай 1:
$R_3 = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau.$
Случай 2:
$R_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$

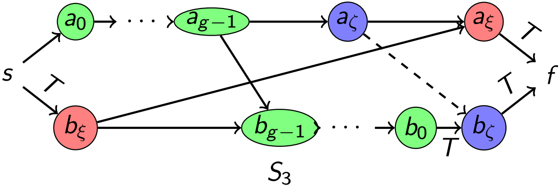
Различия и сходство доказательство лемм 3 и 3′

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$
$$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$$

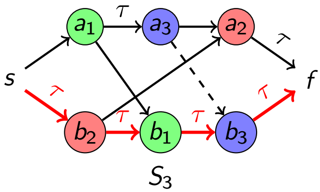


Случай 1:
$$R_3 = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau.$$
Случай 2:
$$R_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

$$R'_1 = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T,$$
$$R'_2 = (1+k)(p' + p_\zeta) + 2T.$$

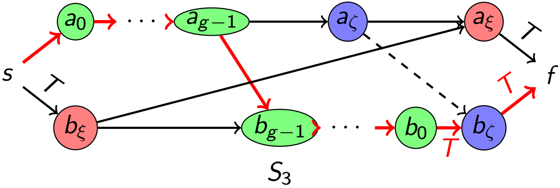


$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$
$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$



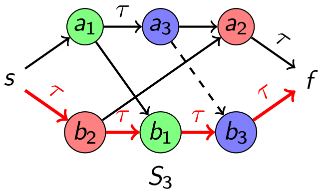
Случай 1:
$R_3 = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau.$
Случай 2:
$R_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$

$R'_1 = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T,$
$R'_2 = (1+k)(p' + p_\zeta) + 2T.$



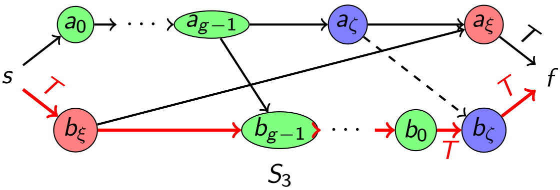
Случай 1: $R'_3 \leqslant (k+1)p' + p_\zeta + 2T.$

$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$
$R_2 = (1+k)(p_1 + p_3) + 2\tau.$



Случай 1:
$R_3 = (k+1)p_1 + p_3 + 2\tau.$
Случай 2:
$R_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$

$R'_1 = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T,$
$R'_2 = (1+k)(p' + p_\zeta) + 2T.$



Случай 1: $R'_3 \leqslant (k+1)p' + p_\zeta + 2T.$
Случай 2: $R'_3 = p' + p_\xi + p_\zeta + 4T.$

Доказательство, случай 2

$$R_1 = (1+k)p_2 + kp_3 + 2\tau,$$

$$R_2 = (1+k)p_1 + (1+k)p_3 + 2\tau,$$

$$R_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 4\tau.$$

Требуется доказать, что $\min\{R_1, R_2, R_3\} \leqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.

$$LB_1 = k(p_1 + p_2 + p_3) + 2\tau,\ LB_2 = k(p_1 + 2p_3) + 2\tau.$$

Достаточно доказать, что существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$, что

1. $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 \leqslant \mu_1 LB_1 + \mu_2 LB_2$, и
2. $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(4k^2 + 3k) \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(5k^2 + 2k - 1)$.

$$\lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2},\ \lambda_2 = \frac{4k^2 - 1}{k^2},\ \lambda_3 = \frac{-k^2 + k + 1}{k^2},$$

$$\mu_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2},\ \mu_2 = \lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2}.$$

Доказательство, случай 2

$$R_1' = (1+k)p_\xi + kp_\zeta + 2T,$$
$$R_2' = (1+k)p' + (1+k)p_\zeta + 2T,$$
$$R_3' = p' + p_\xi + p_\zeta + 4T.$$

Требуется доказать, что $\min\{R_1', R_2', R_3'\} \leqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.

$$LB_1' = k(p' + p_\xi + p_\zeta) + 2T,\ LB_2' = k(p' + 2p_\zeta) + 2T.$$

Достаточно доказать, что существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$, что

1. $\lambda_1 R_1' + \lambda_2 R_2' + \lambda_3 R_3' \leqslant \mu_1 LB_1' + \mu_2 LB_2'$, и
2. $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(4k^2 + 3k) \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(5k^2 + 2k - 1)$.

$$\lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2},\ \lambda_2 = \frac{4k^2 - 1}{k^2},\ \lambda_3 = \frac{-k^2 + k + 1}{k^2},$$
$$\mu_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2},\ \mu_2 = \lambda_1 = \frac{2k^2 + k - 1}{k^2}.$$

Заключение

Сделано:

1. Введён новый вид ограничения на длительности операций $\operatorname{rank} P = 1$ (а можно рассматривать и $\operatorname{rank} P = 2$ и т.д.)
2. Описан критерий нормальности в терминах коэффициента пропорциональности для задачи $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = K_2|R_{\max}$ (золотое сечение!)
3. Предыдущий результат обобщён на "странный" частный случай задачи $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = chain|R_{\max}$

Заключение

Сделано:

1. Введён новый вид ограничения на длительности операций $\mathrm{rank}\, P = 1$ (а можно рассматривать и $\mathrm{rank}\, P = 2$ и т.д.)
2. Описан критерий нормальности в терминах коэффициента пропорциональности для задачи $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = K_2|R_{\max}$ (золотое сечение!)
3. Предыдущий результат обобщён на "странный" частный случай задачи $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = chain|R_{\max}$

Не сделано:

1. Другие частные (и общие) случаи задач $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = chain$, $RO2|\mathrm{rank}\, P = 1, G = tree$, …
2. Классические задачи ТР с тремя машинами и $\mathrm{rank}\, P = 1$
3. …

Заключение

Сделано:

1. Введён новый вид ограничения на длительности операций $\operatorname{rank} P = 1$ (а можно рассматривать и $\operatorname{rank} P = 2$ и т.д.)
2. Описан критерий нормальности в терминах коэффициента пропорциональности для задачи $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = K_2|R_{\max}$ (золотое сечение!)
3. Предыдущий результат обобщён на "странный" частный случай задачи $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = chain|R_{\max}$

Не сделано:

1. Другие частные (и общие) случаи задач $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = chain$, $RO2|\operatorname{rank} P = 1, G = tree, \ldots$
2. Классические задачи ТР с тремя машинами и $\operatorname{rank} P = 1$
3. $\ldots$

Спасибо за внимание!