Интегральные уравнения

29 Уравнения Вольтерра 2 рода

Линейным интегральным уравнением Вольтерра 2 рода называется уравнение

$$u(x) = f(x) + \int\limits_0^x K(x,y)u(y)dy, \quad x \in [0;a], \tag{1}$$

где $u(x)$ — искомая функция, $K(x,y)$ — ядро интегрального оператора, определенное в треугольнике $T = \{0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a\}$, $f(x)$ — свободный член. Решением уравнения (1) называется функция $u(x)$, $x \in [a;b]$, которая обращает это уравнение в тождество. Вопрос о существовании и единственности решения уравнения (1) решается различным образом в зависимости от свойств ядра $K(x,y)$ и свободного члена $f(x)$, а также от того в каком классе функций ищется решение. В частности, если функции $K(x,y)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения, то уравнение (1) имеет единственное решение и это решение непрерывно на $[a;b]$.

29.1. Составьте интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши
$u' + 2\,x\,u = e^x$, $u(0) = 1$.
Ответ: $u(x) = e^x - \int_0^x 2\,y\,u(y)\,dy$.

29.2. Решите интегральное уравнение $u(x) = e^x + \int_0^x u(y)\,dy$, сведя его к дифференциальному.
Ответ: $u' = e^x + u$, $u(0) = 1$, $\quad u = e^x\,(x+1)$.

29.3. Решите интегральное уравнение $u(x) = x - 1 + \int_0^x (x-y)\,u(y)\,dy$, сведя его к дифференциальному.
Ответ: $u'' = u$, $u(0) = -1$, $u'(0) = 1$; $u(x) = -e^{-x}$.

29.4. Решите интегральное уравнение с вырожденным ядром
$u(x) = 4\,x^2 - x^5 + \int_0^x x\,y\,u(y)\,dy$.
Ответ: $u(x) = 4\,x^2$.

29.5. Методом последовательных приближений решите интегральное уравнение
$u(x) = 1 - \int_0^x (x-y)\,u(y)\,dy$.
Ответ: $u(x) = \cos x$.

Если ядро интегрального уравнения имеет вид $K(x,y) = K(x-y)$, то

$$\int_0^x K(x-y)\,u(y)\,dy = K * u.$$

В этом случае интегральное уравнение можно попытаться решить при помощи преобразования Лапласа. Напомним некоторые пары «прообраз $\risingdotseq$ образ» при преобразовании Лапласа ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\sin(ax) \risingdotseq \tfrac{a}{\xi^2+a^2}, \quad \cos(ax) \risingdotseq \tfrac{\xi}{\xi^2+a^2},$$

$$x^n \sin(ax) \risingdotseq \tfrac{i\,n!}{2}\left(\tfrac{1}{(\xi+ia)^{n+1}} - \tfrac{1}{(\xi-ia)^{n+1}}\right), \quad x^n \cos(ax) \risingdotseq \tfrac{n!}{2}\left(\tfrac{1}{(\xi+ia)^{n+1}} + \tfrac{1}{(\xi-ia)^{n+1}}\right),$$

$$\mathrm{sh}(ax) \risingdotseq \tfrac{a}{\xi^2-a^2}, \quad \mathrm{ch}(ax) \risingdotseq \tfrac{\xi}{\xi^2-a^2}, \quad x^n \risingdotseq \tfrac{n!}{\xi^{n+1}}.$$

И еще заметим, что если $f(x) \risingdotseq \hat{f}(\xi)$, $g(x) \risingdotseq \hat{g}(\xi)$, то

$$(f*g)(x) \risingdotseq \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad (f*g)(x) = \int\limits_0^x f(y)g(x-y)dy, \qquad f(x)e^{ax} \risingdotseq \hat{f}(\xi - a).$$

29.6. Используя интегральное преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение $u(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-y)u(y)dy$.
Ответ: $u(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x$.

29.7. Используя интегральное преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение $u(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-y)u(y)dy$.
Ответ: $u(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$.

29.8. Используя интегральное преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение $u(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-y)u(y)dy$.
Ответ: $u(x) = 2e^x - x - 1$.

Для самостоятельного решения

29.9. Решите интегральное уравнение $u(x) = 1 + \int_0^x y\, u(y)dy$, сведя его к дифференциальному.
Ответ: $u' = x\, u$, $u(0) = 1$; $u = e^{x^2/2}$.

29.10. Решите интегральное уравнение $u(x) = x + \int_0^x [4\sin(x-y) - x + y]\, u(y)dy$.
Ответ: $u(x) = x \operatorname{ch} x$.

29.11. Методом последовательных приближений решите интегральное уравнение $u(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-y}\, u(y)\, dy$.
Ответ: $u(x) = 2^x e^x$.

29.12. Используя интегральное преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение $u(x) = \sin(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(x-y)\, u(y)\, dy$.
Ответ: $u(x) = 2\, \sin x - x$.

29.13. Используя интегральное преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение $u(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-y)\, e^{x-y}\, u(y)\, dy$.
Ответ: $u(x) = \frac{1}{4}(e^{2x}\,(2x+3) + 1)$.