Интегральные уравнения

28 Интегральные уравнения Фредгольма

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2 рода называется уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a;b], \tag{1}$$

где $y(x)$ — искомая функция, $K(x,t)$ — ядро интегрального оператора, определенное в прямоугольнике $[a;b] \times [a;b]$, $f(x)$ — свободный член. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*. Положим

$$\mathcal{F}u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt,$$

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right]^{1/2} = \sqrt{u\cdot u}, \quad u \in \mathrm{L}_2(\Omega),$$

$$\|K\| = \left[\int_\Omega\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dx\right]^{1/2} = \sqrt{K\cdot K}, \quad K \in \mathrm{L}_2(\Omega\times\Omega).$$

Теорема 1. Пусть $K \in \mathrm{L}_2(\Omega\times\Omega)$, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ и $\|K\| < 1$. Тогда уравнение Фредгольма 2-го рода $u = \mathcal{F}\,u$ имеет единственное решение $u = u(x)$ в классе функций $\mathrm{L}_2(\Omega)$. При этом

$$u = \mathcal{F}^\infty v,$$

где $v \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ — выбрана произвольно, а $\mathcal{F}^\infty v = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}^k v$.

28.1. Методом последовательных приближений решите интегральное уравнение $y(x) = \sin\pi x + \int_0^1 \frac{1}{2}y(t)dt$. *Ответ*: $y(x) = \sin\pi x + \frac{2}{\pi}$.

28.2. Методом последовательных приближений решите интегральное уравнение $y(x) = 2x + \int_0^1 xty(t)dt$. *Ответ*: $y(x) = 3x$.

Ядро $K(x,t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде $K(x,t) = \sum_i p_i(x)q_i(t)$. В этом случае решение уравнения (1) имеет вид $y(x) = f(x) + \sum_i p_i(x)u_i$, где константы u_i находятся из СЛАУ

$$u_i = b_i + \sum_j a_{ij}u_j, \quad b_i = \int_a^b q_i(t)f(t)dt, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(t)p_j(t)dt.$$

28.3. Решите две предыдущие задачи как уравнения с вырожденным ядром.

28.4. Решите уравнение $y(x) = -\frac{1}{6}(x+3) + \int_0^1(1+2xt)y(t)dt$. *Ответ*: $y(x) = x + \frac{1}{2}$.

28.5. Решите уравнение $y(x) = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6} - \int_0^1(x-\sqrt{t})y(t)dt$. *Ответ*: $y(x) = 1+\sqrt{x}$.

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2 рода с параметром λ

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a;b]. \tag{2}$$

Значение параметра λ, при котором уравнение (2) имеет тождественно не нулевые решения, называется характеристическим числом уравнения (2), а эти ненулевые решения называются собственными функциями, соответствующими этому числу. Заметим, что $\lambda \neq 0$, так как при $\lambda = 0$ уравнение имеет только тривиальное решение. Если λ — характеристическое число, то число $\mu = \frac{1}{\lambda}$ называется собственным ($\mu \neq 0$).

28.6. Найдите характеристические числа, собственные числа и собственные функции для интегрального уравнения с вырожденным ядром $y(x) = \lambda \int_0^1 (xt - 2x^2) y(t) dt$. *Ответ*: $\lambda = \frac{1}{\mu} = -6$, $y(x) = C(x - 2x^2)$.

28.7. Найдите характеристические числа, собственные числа и собственные функции для интегрального уравнения с вырожденным ядром $y(x) = \lambda \int_0^1 (1 + 2x) t y(t) dt$.

Ответ: $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{6}{7}$, $y(x) = C\frac{6}{7}(1 + 2x)$.

28.8. Найдите решение уравнения $y(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 x(1 + t) y(t) dt$ в зависимости от параметра λ.

Ответ: При $\lambda \neq \frac{6}{5}$ $y(x) = x^2 + \frac{7\lambda}{2(6-5\lambda)} x$, при $\lambda = \frac{6}{5}$ решений нет.

Для самостоятельного решения

28.9. Для уравнения $y(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 t \, y(t) dt$ проверьте условие $\|K\|_2 < 1$ и решите его методом последовательных приближений.

Ответ: $y(x) = \frac{2}{3}$.

28.10. Решите уравнение $y(x) = \sin 2x + \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t) y(t) dt$.

Ответ: $y(x) = C(\frac{1}{\pi} \sin x + 2) + \sin 2x - \pi$, $C \in \mathbb{R}$.

28.11. Найдите решение уравнения $y(x) = \sin \pi x + \lambda \int_{-1}^1 (1 + xt) y(t) dt$ в зависимости от параметра λ.

Ответ: При $\lambda \neq \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ $y(x) = \sin \pi x + \frac{6\lambda}{\pi(3-2\lambda)} x$, при $\lambda = \frac{1}{2}$ $y(x) = \sin \pi x + \frac{3}{2\pi} x + C$, при $\lambda = \frac{3}{2}$ решений нет.