Гармонические функции

27 Принцип экстремума, сопряженные гармонические функции

Функция $u \in \mathrm{C}^2(D)$ называется гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если $\Delta u(x) = 0$ для всех $x \in D$.

27.1. Пусть u — гармоническая в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функция. а) Является ли функция $v(x) = u(x+h)$, $h = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^n$, гармонической в области $D' = D - h = \{x - h : x \in D\}$. б) Является ли гармоничной и в какой области функция $v(x) = u(\lambda x)$, $\lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

27.2. Найдите значение постоянной α, для которой являются гармоническими функции: а) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + \alpha z^2$; б) $u(x) = r^{-\alpha}$, где $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, в области, не содержащей точку $x = 0$.

Ответ: а) $\alpha = -2$; б) $\alpha = 0$ и $\alpha = n - 2$ при $n > 2$.

Теорема 1 (принцип максимума для гармонических функций)**.** Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей S, функция $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ — гармоническая в Ω. Тогда $u(x) \leqslant \max\limits_{y \in S} u(y)$, $x \in \overline{\Omega}$.

27.3. В замкнутой области $\overline{D} = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ найдите точки экстремума гармонической в D функции $u(x, y) = xy$.

Ответ: $(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

27.4. В замкнутой области $\overline{D} = \{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leqslant 1\}$ найдите точки экстремума гармонической в D функции $u(x, y) = x^2 - y^2$. Вычислите $\frac{\partial u}{\partial n}$ в точках максимума, где n — внешняя нормаль к границе области D.

Ответ: $u_{\max} = 4$, в точках $(-2, 0)$, $(2, 0)$; $u_{\min} = -9$, в точках $(0, -3)$, $(0, 3)$; $\frac{\partial u}{\partial n} = x^2 - \frac{4}{9}y^2$, $\frac{\partial u}{\partial n}(-2, 0) = \frac{\partial u}{\partial n}(2, 0) = 4$.

Пусть комплексная функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ (то есть имеет в D комплексную производную, то есть всюду в D существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$). Тогда если представить f в виде $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, то функции u и v гармонические в D и для них выполняется условие *Коши-Римана*

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

Функции u и v называются *сопряженными*.

27.5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$, если $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = e^x \sin y$.

Ответ: $f(z) = e^x \sin y + i(C - e^x \cos y)$, $C = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

27.6. Найдите функцию v, гармонически сопряженную с функцией $u = xy^3 - x^3 y$.

Ответ: $v = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + C$.

27.7. Пользуясь системой уравнений Коши-Римана, найдите гармоническую функцию $u(x, y)$, если $u_x = 3x^2 y - y^3$.

Ответ: $u = x^3 y - xy^3 + C_1 y + C_2$.

27.8. Пользуясь системой уравнений Коши-Римана, найдите гармоническую функцию $u(x, y)$, если $u_y = e^x \cos y$.

Ответ: $u = e^x \sin y + C_1 x + C_2$.

27.9. Найдите гармоническую функцию $u(x, y, z)$, если $u_y = e^x \cos z - 2y$.

Ответ: $u = ye^x \cos z - y^2 + x^2 + g(x, y)$, где $g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция.

27.10. Найдите функцию v, гармонически сопряженную с функцией $u_x = y^3 - 3x^2 y$.

Ответ: $v = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) - \frac{3}{2}x^2 y^2 + C_1 x + C_2$.

Для самостоятельного решения

27.11. Найдите аналитическую функцию $f(z)$, если $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$.

Ответ: $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i(\cos x \operatorname{sh} y + C)$.

27.12. Найдите функцию v, гармонически сопряженную с функцией $u = e^y \sin x$.

Ответ: $v = e^y \cos x + C$.

27.13. Найдите гармоническую функцию $u(x, y, z)$, если $u_x = \operatorname{sh} x \cos z + 2xy$.

Ответ: $u = \operatorname{sh} x \cos z + yx^2 - y^2 + g(x, y)$, где $g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция.