Метод Фурье разделения переменных

25 Эллиптические уравнения внутри круга, вне круга, в кольце

Используя результат задачи **??**, решите следующие стационарные задачи.

25.1. $\Delta u = 0,\ 0 \leqslant r < R,\ u(R,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi).$

Ответ: $u = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k^2 R^k} \cos k\varphi.$

25.2. $\Delta u = 0,\ 0 \leqslant r < R,\ u(x,y)|_{r=R} = 4xy^2.$

Ответ: $u = rR^2\cos\varphi - r^3\cos 3\varphi.$

25.3. $\Delta u = 0,\ R < r < \infty,\ u(x,y)|_{r=R} = x^2 + 1,\ u(x,y)$ — ограничена.

Ответ: $u = 1 + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^{-2}R^4\cos 2\varphi.$

25.4. $\Delta u = 0,\ a < r < b,\ u(a,\varphi) = A,\ u(b,\varphi) = B\sin 2\varphi.$

Ответ: $u = A\frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} + \frac{Bb^2(r^4 - a^4)}{r^2(b^4 - a^4)}\sin 2\varphi.$

25.5. Найдите значение константы A, при котором разрешима задача Неймана $\Delta u = 0$, $0 \leqslant r < R,\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_{r=R} = A + \cos^2\varphi$ и найдите ее решение.

Ответ: $u = 4r^2\cos 2\varphi$ (может быть).

Для самостоятельного решения

25.6. $\Delta u = 0,\ R < r < \infty,\ u(R,\varphi) = \frac{1}{2} + \varphi\sin 2\varphi,\ u(x,y)$ — ограничена.

Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{4\,R}{3}\,r^{-1}\,\cos\varphi + \pi\,R^2\,r^{-2}\,\sin 2\varphi - \frac{R^2}{4}\,r^{-2}\,\cos 2\varphi - \sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{4}{4-k^2}R^k\,r^{-k}\,\cos k\varphi.$

25.7. $\Delta u = 0,\ a < r < b,\ u(a,\varphi) = 0,\ u(b,\varphi) = A\cos\varphi.$

Ответ: $u = A\frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)}\cos\varphi.$