Метод Фурье разделения переменных

24 Эллиптические уравнения

24.1. Решите стационарную задачу в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s, \\ u(0,y) = u_x(p,y) = 0, \ u(x,0) = 0, \ u(x,s) = f(x). \end{cases}$$

Ответ: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi s}{2p}} \operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi y}{2p} \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2p}$, где $f_k = \frac{(f,X_k)}{(X_k,X_k)} = \frac{2}{p}\int\limits_0^p f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2p}dx$.

24.2. Решите стационарную задачу в полуполосе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < \infty, \ 0 < y < \ell, \\ u(x,0) = u_y(x,\ell) = 0, \ u(0,y) = f(y), \ u(\infty,y) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}} \sin\frac{(2k-1)\pi y}{2\ell}$, где $f_k = \frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2\ell}dy$.

24.3. а) Найдите общее решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полярных координатах.
б) Найдите непрерывное решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leqslant r < R$.
в) Найдите непрерывное и ограниченное решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ вне круга $0 \leqslant r < R$.
Указание: $\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$.

Ответ: а) $u = A_0 \ln r + B_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(C_k r^k + D_k r^{-k})(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$.

б) $u = B_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$.

в) $u = B_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^{-k} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$.

Для самостоятельного решения

24.4. Решите стационарную задачу в полуполосе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < \infty, \ 0 < y < \ell, \\ u_y(x,0) = u_y(x,\ell) + hu(x,\ell) = 0, \ u(0,y) = f(y), \ u(\infty,y) = 0, \ h > 0. \end{cases}$$

Ответ: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\lambda_k x} \cos\lambda_k y$, где $f_k = \frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)} = \frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\lambda_k y\,dy$, λ_k — положительные корни уравнения $\lambda \operatorname{tg}\lambda\ell = h$.