# 22 Задача теплообмена в шаре

Рассмотрим *однородный* шар $B_R = \{0 \leqslant r < R\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Пусть $u(x,y,z,t)$ — температура в точке $(x,y,z) \in B_R$ в момент $t > 0$. Тогда изменение температуры описывается уравнением

$$u_t = a^2 \Delta u - \beta u + \gamma, \quad (x,y,z) \in B_R, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $\beta = \frac{\alpha}{c\rho}$, $\gamma = \frac{Q}{c\rho}$, $k = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, $c = \mathrm{const} > 0$ — удельная теплоемкость шара, $\rho = \mathrm{const} > 0$ — плотность шара, $\alpha = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент поглощения тепла в шаре (например, за счет химических реакций), $Q = \mathrm{const} > 0$ — плотность источников тепла внутри шара.

Перейдем в уравнении (1) к сферическим координатам.

$$u = u(r,\varphi,\theta,t), \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах выглядит ужасно

$$\Delta u = \tfrac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \tfrac{1}{r^2 \sin\theta}(u_\theta \sin\theta)_\theta + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi}.$$

Но мы рассматриваем однородный шар и если начальное распределение температуры и краевое условие не зависят от $\varphi$ и $\theta$, то для всех $t > 0$ температура $u$ также не будет зависеть от $\varphi$ и $\theta$, то есть $u = u(r,\varphi,\theta,t) = u(r,t)$. В этом случае производные по углам $\varphi$, $\theta$ пропадут.

$$\Delta u = \tfrac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r.$$

Далее всегда будем считать, что $u = u(r,t)$ (иначе сдохнем). В итоге задача теплообмена в шаре приобретет вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r - \beta u + \gamma, \quad 0 \leqslant r < R,\ \ t > 0, \\ u(R,t) = U, \quad u(0,r) = u_\circ(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \\ u(r,t) \text{ — ограничена по } r. \end{cases}$$

Где краевое условие $u(R,0) = U$ означает, что на поверхности шара поддерживается постоянная температура $U$. Краевые условия могут меняться.

**22.1.** В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности $Q$. Начальная температура шара равна $T$. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если:
а) поверхность шара поддерживается при постоянной температуре $U$;
б) с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной плотности $q$;
в) на поверхности происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Температура среды равна $P$.

### Для самостоятельного решения

**22.2.** Решите задачу теплообмена в шаре:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r - \beta u, \quad 0 \leqslant r < R,\ \ t > 0,\ \ \beta > 0, \\ u_r(R,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(r,t) \text{ — ограничена по } r, \\ u(r,0) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < \frac{R}{2} \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R. \end{cases} \end{cases}$$

*Ответ*: $u(r,t) = e^{-\beta t}\left[\frac{U}{8} + \frac{2U}{r}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{R\lambda_k}{2} - R\lambda_k \cos\frac{R\lambda_k}{2}}{2R\lambda_k - \sin 2R\lambda_k} e^{-a^2\lambda_k^2 t} \sin\lambda_k r\right]$, где $\lambda_k$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = R\lambda$.