Метод Фурье разделения переменных

21 Параболические уравнения (продолжение)

Решите следующие начально-краевые задачи теплообмена в тонком стержне.

21.1. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = A. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = 2hA \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}[l(h^2+\lambda_k)+h]} e^{-(a^2\lambda_k+\beta)t} F_k(x)$, где $F_k(x) = \sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}x + h\sin\sqrt{\lambda_k}x$, λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}$.

21.2. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{\beta+(\frac{a\pi}{l})^2}[1 - e^{-[\beta+(\frac{a\pi}{l})^2]t}]\sin\frac{\pi}{l}x.$

21.3. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = q, \quad t > 0, \\ u(x,0) = Ax. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = qx + \frac{l(A-q)}{2} - \frac{4(A-q)l}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{a\pi(2m+1)}{l})^2 t}}{(2m+1)^2} \cos\frac{\pi(2m+1)}{l}t.$

Для самостоятельного решения

21.4. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = T, \quad u(l,t) = A, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A-T}{l}x + T + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}[(-1)^k A - T] e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x.$