Метод Фурье разделения переменных

20 Параболические уравнения

Решите следующие начально-краевые задачи теплообмена в тонком стержне.

20.1. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = Ax. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2Al}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x.$

20.2. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{-[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}]^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$, где $a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx.$

20.3. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l}. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = e^{-(\frac{a^2\pi^2}{4l^2} + \beta)t} \sin \frac{\pi}{2l} x.$

20.4. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{-[(\frac{ak\pi}{l})^2 + \beta]t} \cos \frac{k\pi}{l} x$, $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$, $a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для самостоятельного решения

20.5. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = A(l-x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}]^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x.$

20.6. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi) e^{-[(\frac{a\pi k}{l})^2 + \beta]t} \sin \frac{k\pi}{l} x.$