Метод Фурье разделения переменных

19 Декомпозиция граничных условий

Решите следующие начально-краевые задачи колебаний струны.

19.1. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = t^2, \quad u(\pi,t) = t^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = (1 - \frac{x}{\pi})t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin x \cos t +$
$+\frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \Big[(-1)^k 3t - 1 + \cos kt - 3\frac{(-1)^k}{k} \sin kt\Big] \sin kx.$

19.2. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{x}{2}, \ \ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = x + t + \cos\frac{t}{2} \sin\frac{x}{2} - \frac{8}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)t}{2} \sin\frac{(2k+1)x}{2}.$

Для самостоятельного решения

19.3. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad u(\pi,t) = t, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x \cos x, \ \ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = (1 - \frac{x}{\pi})e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x -$
$-\frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k^2)} \big[e^{-t} + k^2 \cos kt - (2k + \frac{1}{k}) \sin kt\big] \sin kx.$

19.4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = \frac{2}{a} \sin\frac{2\ell}{a} \sin 2t, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{t}{2} - (\frac{1}{4} + \cos\frac{2x}{a}) \sin 2t.$