Метод Фурье разделения переменных

18 Неоднородные гиперболические уравнения

Решите следующие начально-краевые задачи вынужденных колебаний струны.

18.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{a(2k+1)\pi\, t}{\ell}\cos\frac{(2k+1)\pi\, x}{\ell}$

или $u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\ \text{нечет.}}}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos\frac{ak\pi\, t}{\ell}\cos\frac{k\pi\, x}{\ell}$;

18.2. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi\, t}{\ell} + \frac{\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi\, t}{\ell}\right)\sin\frac{\pi\, x}{\ell}$.

18.3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axe^{-t}, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{2A\ell}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1+(\frac{ak\pi}{\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{ak\pi\, t}{\ell} + \frac{\ell}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi\, t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi\, x}{\ell}$.

Для самостоятельного решения

18.4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + A\sin t, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{4A}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\ \text{нечет.}}}^{\infty}\frac{1}{k\left((\frac{ak\pi}{2\ell})^2-1\right)}\left(\sin t - \frac{2\ell}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi\, t}{2\ell}\right)\sin\frac{k\pi\, x}{2\ell}$.

18.5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2\ell}, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{2\ell})^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi\, t}{2\ell} + \frac{2\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi\, t}{2\ell}\right)\cos\frac{\pi\, x}{2\ell}$.