

# Метод Фурье разделения переменных

---

## 17 Однородные гиперболические уравнения

17.1. Решите уравнения а)  $y'' - 4y = 0$ ; б)  $y'' + 4y = 0$ .

Решите следующие начально-краевые задачи свободных колебаний струны.

17.2. 
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{\ell}, & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Ответ: а)  $u(x, t) = \frac{\ell}{2a\pi} \sin \frac{2\pi x}{\ell} \sin \frac{2a\pi t}{\ell}$ .

17.3. 
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{2\ell}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2\ell}, & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Ответ:  $u(x, t) = \frac{2\ell}{a\pi} \sin \frac{\pi x}{2\ell} \sin \frac{a\pi t}{2\ell} + \sin \frac{5\pi x}{2\ell} \cos \frac{5a\pi t}{2\ell}$ .

17.4. Докажите ортогональность системы функций  $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{\ell}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ , и найдите  $(X_k, X_k)$ .

### Для самостоятельного решения

17.5. Докажите ортогональность системы функций  $X_k(x)$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ , и найдите  $(X_k, X_k)$ , если

а)  $X_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

б)  $X_k(x) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

в)  $X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{\ell}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $(X_0(x) \equiv 1)$ .

17.6. Дайте физическую интерпретацию и решите начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2\ell}, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2\ell} + \cos \frac{5\pi x}{2\ell}, & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$