Первый семинар второго семестра

16 Повторение

Пусть $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $f \rightleftharpoons F$. Тогда если f — четная функция, то

$$F_{\cos}(\xi) = \int_0^\infty f(x)\,\cos\xi\,x\,dx, \quad f(x) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty F_{\cos}(\xi)\,\cos\xi\,x\,d\xi,$$

ее прямое и обратное *косинус-преобразование Фурье*. Причем $2\,F_{\cos} \equiv F$. Если f — нечетная функция, то

$$F_{\sin}(\xi) = \int_0^\infty f(x)\,\sin\xi\,x\,dx, \quad f(x) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty F_{\sin}(\xi)\,\sin\xi\,x\,d\xi,$$

ее прямое и обратное *синус-преобразование Фурье*. При этом $-2\,i\,F_{\sin} \equiv F$.

16.1. Пусть $f, g \in \mathrm{L}_1([0;\infty), \mathbb{C})$. Докажите соответствие

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(s)\,g(x-s)\,ds \rightleftharpoons F_{\sin}\,G_{\cos} + F_{\cos}\,G_{\sin}.$$

16.2. Решите начально-краевую задачу:
$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ u(0,t) = u(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \frac{f(s,t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2\tau}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2\tau}} \right] ds\,d\tau.$

Решите следующие задачи колебаний полубесконечной струны.

16.3. $u_{tt} = u_{xx},\ x > \frac{\pi}{2},\ t > 0;\ u(\frac{\pi}{2}, t) = 3\,t,\ t \geqslant 0;\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 3 - 2\cos x,$ $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.
Ответ: $v(x,t) = u(x + \frac{\pi}{2}, t) - 3\,t$, $v(x,t) = \cos(x-t) - \cos(x+t)$,
$u(x,t) = v(x - \frac{\pi}{2}, t) + 3\,t = \sin(x-t) - \sin(x+t) + 3\,t.$

16.4. $u_{tt} = u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u_x(0,t) - 2\,u(0,t) = t\,e^{-3\,t},\ t \geqslant 0;\ u(x,0) = 2\,e^{-x},\ u_t(x,0) = 0,\ x \geqslant 0.$
Ответ: $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \begin{cases} e^{-x-t} + e^{-x+t}, & 0 < t \leqslant x; \\ e^{-x-t} + 3\,e^{2\,(x-t)} + (1 - x + t)\,e^{3\,(x-t)} - 3\,e^{x-t}, & 0 < x < t. \end{cases}$

Для самостоятельного решения

Решите следующие задачи колебаний полубесконечной струны.

16.5. $u_{tt} = 4\,u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u_x(0,t) - u(0,t) = 2\,e^{-2\,t},\ t \geqslant 0;\ u(x,0) = 2\sin x,$ $u_t(x,0) = 0,\ x \geqslant 0.$
Ответ: $u(x,t) = f(x + 2\,t) + g(x - 2\,t) =$
$= \begin{cases} \sin(x + 2\,t) + \sin(x - 2\,t), & 0 < 2\,t \leqslant x; \\ \sin(x + 2\,t) + (2\,x - 4\,t - 1)\,e^{x - 2\,t} + \cos(x - 2\,t), & 0 < x < 2\,t. \end{cases}$

16.6. $u_{tt} = 4\,u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u_x(0,t) - u(0,t) = e^{-2\,t},\ t \geqslant 0;\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 4\,e^{-x},\ x \geqslant 0.$
Ответ: $u(x,t) = f(x + 2\,t) + g(x - 2\,t) = \begin{cases} -e^{-x-2\,t} + e^{-x+2\,t}, & 0 < 2\,t \leqslant x; \\ -e^{-x-2\,t} + (1 - x + 2\,t)\,e^{x-2\,t}, & 0 < x < 2\,t. \end{cases}$