15 Применение преобразования Фурье к решению двумерных задач математической Физики

Если $f = f(x,y) \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, то к функции f можно применять преобразование Фурье дважды: сначала по переменной x, а затем по переменной y. В итоге получаются формулы:

$$F(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(\xi x+\eta y)}\, dx\, dy, \quad f(x,y) = \tfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)\, e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta.$$

15.1. Используя интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t = a^2\Delta u,\ -\infty < x, y < \infty, t > 0,\ u(x,y,0) = \varphi(x,y)$.
Ответ: $u(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2t}}\varphi(p,q)\, dp\, dq.$

15.2. Используя интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t = a^2\Delta u,\ -\infty < x < \infty, y > 0, t > 0,\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,y,0) = \varphi(x,y)$.
Указание: сведите эту задачу к задаче 15.1.
Ответ: $u(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x-p)^2+(y+q)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(p,q)\, dp\, dq.$

15.3. Используя интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t = a^2\Delta u,\ -\infty < x < \infty, y > 0, t > 0,\ u_y(x,0,t) = f(x,t),\ u(x,y,0) = 0$.
Указание: по переменной y использовать косинус-преобразование Фурье.
Ответ: $u(x,y,t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\, dp\, d\tau.$

Для самостоятельного решения

15.4. Используя интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t = a^2\Delta u + f(x,y,t),\ -\infty < x, y < \infty, t > 0,\ u(x,y,0) = 0$.
Ответ: $u(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,q,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, dp\, dq\, d\tau.$

15.5. Используя интегральное преобразование Фурье по переменным x и y найдите решение задачи: $u_t = a^2\Delta u,\ -\infty < x < \infty, y > 0, t > 0,\ u(x,0,t) = f(x,t),\ u(x,y,0) = 0$.
Указание: по переменной y используйте синус-преобразование Фурье.
Ответ: $u(x,y,t) = \frac{y}{4a^2\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-p)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\, dp\, d\tau.$