Метод интегральных преобразований

14 Интегральное преобразование Фурье

Пусть f это функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. *Преобразованием Фурье* функции f называется функция F, определенная равенством

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\,\xi\, x}\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Если $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то есть сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dt$, то функция $F(\xi)$ определена и непрерывна в каждой точке $\xi \in \mathbb{R}$. Кроме того, $F(\xi)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} F(\xi) = 0$.

Если в точке $x \in \mathbb{R}$ функция f удовлетворяет условию Гёльдера степени $\alpha \in (0; 1]$, то для этой точки справедливо равенство

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \tfrac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} F(\xi)\, e^{i\,\xi\, x}\, d\xi.$$

Свойства преобразования Фурье. Пусть $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f \rightleftharpoons F$ и $g \rightleftharpoons G$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. **Теорема линейности.** $a\, f + b\, g \rightleftharpoons a\, F + b\, G$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$.

2. **Теорема подобия.** $f(a\, x) \rightleftharpoons \frac{1}{a}\, F(\frac{\xi}{a})$ для любого $a \neq 0$.

3. **Теорема затухания.** $e^{i\,a\,x} f(x) \rightleftharpoons F(\xi - a)$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

4. **Теорема смещения.** $f(x+a) \rightleftharpoons e^{i\,\xi\,a} F(\xi)$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Следовательно, для любого $a \in \mathbb{R}$ верно $\frac{f(x+a)+f(x-a)}{2} \rightleftharpoons \cos(a\,\xi)\, F(\xi)$, $\frac{f(x+a)-f(x-a)}{2i} \rightleftharpoons \sin(a\,\xi)\, F(\xi)$.

5. **Теорема о дифференцировании по параметру.** Если при любом значении t оригиналу $f(x,t)$ соответствует изображение Фурье $F(\xi, t)$, то (при дополнительных условиях на гладкость функции f) $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \rightleftharpoons \frac{\partial F}{\partial t}(\xi, t)$.

6. **Теорема дифференцирования оригинала.** Если $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $f^{(k)} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для всех $k = 0, \ldots, n$, то $f^{(k)}(x) \rightleftharpoons (i\,\xi)^k\, F(\xi), \quad k = 0, \ldots, n$.

7. **Теорема интегрирования оригинала.** $\int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds \rightleftharpoons \frac{F(\xi)}{i\,\xi}$.

8. **Теорема дифференцирования изображения.** Если $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $x^k\, f(x) \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для всех $k = 1, \ldots, n$, то $F \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $x^k\, f^{(k)}(x) \rightleftharpoons i^k\, F^{(k)}(\xi)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

9. **Теорема умножения изображений.** $f * g \rightleftharpoons F\, G$, где

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(x-s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\, g(s)\, ds$$

это свертка функций f и g.

14.1. Докажите теорему дифференцирования оригинала.

14.2. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, найдите общее решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0$. Указание: рассмотрите интегральное преобразование Фурье $U(\xi, t)$ от функции $u(x,t)$ по переменной x.
Ответ: $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$.

14.3. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите задачу:
$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ -\infty < x < \infty, \ t > 0, \ u(x, 0) = 0$.
Указание: $\frac{1}{2\sqrt{a\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4\,a}} \rightleftharpoons e^{-a\,\xi^2}$ при $a > 0$.
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, e^{-\frac{s^2}{4\,a^2\,\tau}}\, f(x - s, t - \tau)\, ds\, d\tau$.

Пусть $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $f \rightleftharpoons F$. Тогда если f — четная функция, то

$$F_{\cos}(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\,\cos\xi\,x\,dx, \quad f(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F_{\cos}(\xi)\,\cos\xi\,x\,d\xi,$$

ее прямое и обратное *косинус-преобразование Фурье*. Причем $F_{\cos} \equiv F$. Если f — нечетная функция, то

$$F_{\sin}(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\,\sin\xi\,x\,dx, \quad f(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F_{\sin}(\xi)\,\sin\xi\,x\,d\xi,$$

ее прямое и обратное *синус-преобразование Фурье*. При этом $F_{\sin} \equiv -i\,F$.

14.4. Докажите, что для косинус-преобразования Фурье справедливо соответствие:

$$f''(x) \rightleftharpoons -\xi^2 F(\xi) - f'(0).$$

А для синус-преобразования Фурье справедливо соответствие:

$$f''(x) \rightleftharpoons -\xi^2 F(\xi) + \xi f(0).$$

14.5. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите задачу:
$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ u(0,t) = u(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_0^{\infty} \frac{f(s,t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4\,a^2\,\tau}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4\,a^2\,\tau}} \right] ds\,d\tau.$

Для самостоятельного решения

Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решите следующие задачи.

14.6. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau.$

14.7. $u_t = a^2 u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x).$
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\,ds.$

14.8. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ u_x(0,t) = v(t), u(x,0) = 0.$
Ответ: $u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$