Метод интегральных преобразований

13 Применение преобразования Лапласа к решению задач математической физики

13.1. Пользуясь преобразованием Лапласа по переменной x, решите задачу
$u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+;\ u(0, y) = u_x(0, y) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = -\frac{1}{a} \int\limits_0^x f(x - s) \sin as\, ds.$

13.2. Пользуясь преобразованием Лапласа по переменной x, решите задачу
$u_{xx} + u_{xt} = 0,\ (x, t) \in \mathbb{R}^2_+;\ u(0, t) = \psi(t),\ u_x(0, t) = 0,\ u(x, 0) = \varphi(x);\ \psi(0) = \varphi(0) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = \psi(t) + \varphi(x - t)\, \mathbf{1}(x > t).$

13.3. Пользуясь преобразованием Лапласа по переменным x и t, решите задачу
$9u_{xx}+4u_{tt} = 36e^{2x} \sin 3t,\ (x, t) \in \mathbb{R}^2_+;\ u(0, t) = 0,\ \ u_x(0, t) = \sin 3t,\ u(x, 0) = 0,\ \ u_t(x, 0) = 3xe^{2x}.$
Ответ: $u(x, y) = xe^{2x} \sin 3t.$

13.4. Пользуясь преобразованием Лапласа по переменным x и t, решите задачу
$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ (x, t) \in \mathbb{R}^2_+;\ u_x(0, t) - hu(0, t) = \varphi(t),\ \ u(\infty, t) = 0,\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = -ae^{h(x-at)} \int\limits_0^{t-x/a} e^{ah\tau} \varphi(\tau) d\tau\, \mathbf{1}(x < at).$

Для самостоятельного решения

13.5. Пользуясь преобразованием Лапласа, решите задачу
$u_y = u_{xx} + u + B \cos x,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+;\ u(0, y) = Ae^{-3y},\ \ u_x(0, y) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = Ae^{-3y} \cos 2x - \frac{B}{2} x \sin x.$

13.6. Пользуясь преобразованием Лапласа, решите задачу
$u_{xx} - u_t + u = f(x),\ (x, t) \in \mathbb{R}^2_+;\ u(0, t) = t,\ \ u_x(0, t) = 0.$
Ответ: $u(x, y) = t \cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \int\limits_0^x f(s) \sin(x - s) ds.$