Метод интегральных преобразований

12 Свойства интегрального преобразования Лапласа

Пусть f это функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. *Преобразованием Лапласа* функции f называется функция комплексного переменного F, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Интеграл, стоящий в правой части (1) называется *интегралом Лапласа.* Если функция f удовлетворяет условиям:
L1) функция $f(t)$ кусочно-непрерывна при $t \geqslant 0$, то есть на любом конечном отрезке $[0;a]$ функция f может иметь лишь конечное количество точек разрыва и все эти точки разрыва только первого рода;
L2) существуют $M > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $|f(t)| \leqslant M\, e^{\alpha\, t}$,
то интеграл Лапласа сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, то есть функция $F(p)$ определена при $\operatorname{Re} p > \alpha$. Кроме того, $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Свойства преобразования Лаласа. Пусть f и g оригиналы, а F и G их изображения по Лапласу. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. **Теорема линейности.** $a\, f + b\, g \risingdotseq a\, F + b\, G$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$.
2. **Теорема подобия.** $f(a\, t) \risingdotseq \frac{1}{a}\, F(\frac{p}{a})$ для любого $a > 0$.
3. **Теорема затухания.** $e^{a\, t} f(t) \risingdotseq F(p-a)$ для любого $a \in \mathbb{C}$.
4. **Теорема запаздывания.** $\mathbf{1}(t>\tau) f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$ для любого $\tau > 0$, где $\mathbf{1}(t>\tau) = 1$ при $t > \tau$ и $\mathbf{1}(t>\tau) = 0$ при $t \leqslant \tau$.
5. **Теорема о дифференцировании по параметру.** Если при любом значении x оригиналу $f(t,x)$ соответствует изображение $F(p,x)$, то (при дополнительных условиях на гладкость функции f) $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \risingdotseq \frac{\partial F}{\partial x}(p,x)$.
6. **Теорема дифференцирования оригинала.** Если $f^{(n-1)} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+)$ и $f^{(n)}$ является оригиналом, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n\, F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)$.
7. **Теорема интегрирования оригинала.** $\int\limits_0^t f(s)\, ds \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.
8. **Теорема дифференцирования изображения.** $-t\, f(t) \risingdotseq F'(p)$.
9. **Теорема интегрирования изображения.** Если интеграл $\int\limits_p^\infty F(z)\, dz$ сходится, то $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(z)\, dz$.
10. **Теорема умножения изображений.** $f * g \risingdotseq F\, G$, где $*$ это операция свертки, определяемая равенством $(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(s)\, g(t-s)\, ds = \int\limits_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds$.
11. **Теорема умножения оригиналов** $f(t)\, g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(z)\, G(p-z)\, dz$, где $\beta > \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$ — выбирается произвольно, α_f и α_g это константы из условия L2 для функций f и g соответственно.

Таблица пар «оригинал $\risingdotseq$ изображение» при преобразовании Лапласа ($a \in \mathbb{R}$).

$$1 \risingdotseq \tfrac{1}{p}, \quad e^{a\,t} \risingdotseq \tfrac{1}{p-a},$$

$$\sin a\, t \risingdotseq \tfrac{1}{2i}\left(\tfrac{1}{p-i\,a} - \tfrac{1}{p+i\,a}\right) = \tfrac{a}{p^2+a^2}, \quad \cos a\, t \risingdotseq \tfrac{p}{p^2+a^2}, \quad \operatorname{sh} a\, t \risingdotseq \tfrac{a}{p^2-a^2}, \quad \operatorname{ch} a\, t \risingdotseq \tfrac{p}{p^2-a^2},$$

$$\sin(\omega\, t + \varphi) \risingdotseq \tfrac{\omega \cos\varphi + p \sin\varphi}{p^2+\omega^2}, \quad \cos(\omega\, t + \varphi) \risingdotseq \tfrac{p \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{p^2+\omega^2},$$

$$e^{a\,t}\sin\omega\,t \risingdotseq \tfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},\quad e^{a\,t}\cos\omega\,t \risingdotseq \tfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},$$
$$e^{a\,t}\operatorname{sh}\omega\,t \risingdotseq \tfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2},\quad e^{a\,t}\operatorname{ch}\omega\,t \risingdotseq \tfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$
$$t^n\,e^{a\,t} \risingdotseq \tfrac{n!}{(p-a)^{n+1}},\quad t^k \risingdotseq \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}},\ \ k>-1,$$
$$t^n\sin\omega\,t \risingdotseq \tfrac{n!}{2i}\left(\tfrac{1}{(p-i\,\omega)^{n+1}}-\tfrac{1}{(p+i\,\omega)^{n+1}}\right),\quad t^n\cos\omega\,t \risingdotseq \tfrac{n!}{2}\left(\tfrac{1}{(p-i\,\omega)^{n+1}}+\tfrac{1}{(p+i\,\omega)^{n+1}}\right),$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi\,t}}e^{-\frac{a^2}{4t}} \risingdotseq \tfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}},\quad \tfrac{a}{2\sqrt{\pi\,t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}} \risingdotseq e^{-a\sqrt{p}},\quad 2-2\Phi(\tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{t}}) \risingdotseq \tfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}},$$
$$2e^t(1-\Phi(\sqrt{2t})) \risingdotseq \tfrac{1}{p+\sqrt{p}},\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi\,t}}-2e^t(1-\Phi(\sqrt{2t})) \risingdotseq \tfrac{1}{1+\sqrt{p}},$$
$$J_0(t) \risingdotseq \tfrac{1}{\sqrt{p^2+1}},\quad J_0(i\,t) \risingdotseq \tfrac{1}{\sqrt{p^2-1}},\quad J_1(t) \risingdotseq 1-\tfrac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$
$$\tfrac{1}{t}J_1(t) \risingdotseq \sqrt{p^2+1}-p,\quad J_0(2\sqrt{a\,t}) \risingdotseq \tfrac{1}{p}e^{-\frac{a}{p}},$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi\,t}}\cos(2\sqrt{a\,t}) \risingdotseq \tfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}},\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi\,a}}\sin(2\sqrt{a\,t}) \risingdotseq \tfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}},$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi\,t}}\operatorname{ch}(2\sqrt{a\,t}) \risingdotseq \tfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a}{p}},\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi\,a}}\operatorname{sh}(2\sqrt{a\,t}) \risingdotseq \tfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{\frac{a}{p}},$$

где $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-s^2/2}\,ds$ — функция Лапласа (функция распределения стандартной нормальной случайной величины), $J_0(t)$ и $J_1(t)$ — функции Бесселя первого рода порядка 0 и 1 соответственно.

12.1. Докажите теорему подобия.

12.2. Докажите теорему дифференцирования оригинала.

12.3. Докажите теорему умножения изображений.

12.4. Найдите все изображения, которые представимы в виде многочлена.

12.5. Найдите оригинал для изображения $F(p)=\frac{3p}{(p-1)(p+2)}$.
Ответ: $f(t)=e^t+2\,e^{-2\,t}$.

12.6. Найдите оригинал для изображения $F(p)=\frac{2}{(p^2+1)^2}$.
Ответ: $f(t)=\sin t-t\,\cos t$.

12.7. Пусть $A(p)$ и $B(p)$ многочлены, B не имеет кратных корней, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ — все корни многочлена B, $\deg A\leqslant\deg B$. Докажите соответствие

$$\frac{A(p)}{B(p)} \risingdotseq f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k\,t}.$$

12.8. Найдите решение задачи Коши: $\ddot{x}+4\,\dot{x}+4\,x=t^3\,e^{-2\,t}$, $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=2$.
Ответ: $x(t)=e^{-2\,t}(1+4\,t+\frac{1}{20}\,t^5)$.

12.9. Найдите решение задачи Коши: $\ddot{x}+x=\mathbf{1}(1<t<3)$, $x(0)=\dot{x}(0)=0$; где $\mathbf{1}(\mathcal{A})$ — это индикатор условия $\mathcal{A}$: $\mathbf{1}(\mathcal{A})=1$, если $\mathcal{A}$ истинно и $\mathbf{1}(\mathcal{A})=0$, если $\mathcal{A}$ ложно.
Ответ: $x(t)=(1-\cos(t-1))\mathbf{1}(t>1)-(1-\cos(t-3))\mathbf{1}(t>3)$.

Для самостоятельного решения

12.10. Докажите теорему затухания.

12.11. Найдите оригинал для изображения $F(p)=\frac{2\,p^3+3\,p+6\,p^2+3}{(p+1)(p+2)(p^2+1)}\,e^{-3p}$
Ответ: $x(t)=(2\,e^{-t+3}-e^{-2\,t+6}+\cos(t-3))\mathbf{1}(t>3)$.

12.12. Найдите решение задачи Коши: $\dot{x}+x=\mathbf{1}(0<t<2)$, $x(0)=0$.
Ответ: $x(t)=1-e^{-t}-(1-e^{-t+2})\mathbf{1}(t>2)$.